

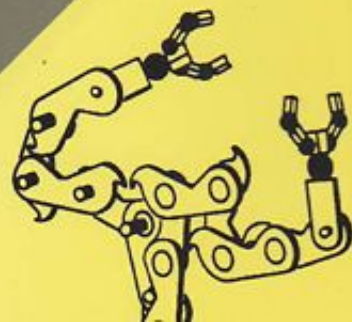


# مکانیک و کنترل در روباتیک

جان کریگ

ترجمه

دکتر علی مقداری  
مهندس فائزه میرفخرایی

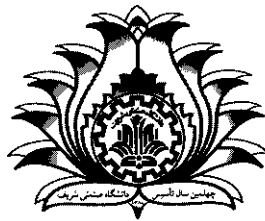




# مکانیک و کنترل در روباتیک

جان کریگ

ترجمه دکتر علی مقداری  
مهندس فائزه میرفخرائی



مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف



مؤسسه انتشارات علمی

دانشگاه صنعتی شریف

*Introduction to Robotics*

*Mechanics and Control* (Second Edition)

John J. Craig

Addison-Wesley, 1989

مکانیک و کنترل در روباتیک

تألیف جان کریگ

ترجمه علی مقداری، فائزه میرفخرایی

ویراسته محمدرضا افضلی

مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چاپ سوم: ۱۳۸۵

شمارگان: ۲۰۰۰

بها: ۳۹۰۰۰ ریال

چاپ و صحافی: چاپخانه چهل چاپ

حق چاپ برای مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است.

ISBN 964-6379-29-X

شابک X-۲۹-۶۳۷۹-۹۶۴

*Craig, John. J.*

کریگ، جان، ۱۹۵۵-

مکانیک و کنترل در روباتیک | جان کریگ؛ ترجمه علی مقداری، فائزه میرفخرایی. -- تهران: دانشگاه صنعتی

شریف، مؤسسه انتشارات علمی، ۱۳۷۷.

پانزده، ۵۵۲ ص.: مصور، نمودار.

ISBN 964-6379-29-X

فهرستبندی براساس اطلاعات فیا.

*Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 2nd. ed.,

عنوان اصلی:

چاپ سوم: ۱۳۸۵: ۳۹۰۰۰ ریال.

واژه نامه.

کتابنامه.

۱. روباتیک. ۲. روباتیک -- مسائل، تمرینها و غیره. الف. مقداری، علی، ۱۳۳۹، مترجم -- ب. میرفخرایی،

فائزه، ۱۳۴۰، مترجم -- ج. دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسه انتشارات علمی. د. عنوان.

۶۲۹/۸۹۲

TJ۲۱۱/ک۴م۷

۱۳۷۷

م ۷۷-۳۶۹۰

کتابخانه ملی ایران

دفتر فروش: ۶۶۴۰۵۱۳۲ - ۶۶۹۶۷۸۹۶

دفتر مرکزی: ۶۶۰۱۳۱۲۹ - ۲ و ۶۶۱۶۴۰۷۰

## فهرست مطالب

پیشگفتار مترجمان	نه
پیشگفتاری بر نسخه فارسی	یازده
پیشگفتار مؤلف	سیزده
۱ مقدمه	۱
۱-۱ زمینه	۱
۲-۱ مکانیک و کنترل بازوهای مکانیکی ماهر	۴
۳-۱ نمادگذاری	۱۶
۲ توصیفها و تبدیلهای فضایی کلی	۲۱
۱-۲ مقدمه	۲۱
۲-۲ توصیفها: مکانها، جهتگیرها، و چهارچوبها	۲۱
۳-۲ نگاشتها: تغییر دادن توصیفها از چهارچوبی به چهارچوب دیگر	۲۷
۴-۲ عملگرها: انتقالها، دورانها، و تبدیلهای کلی	۳۴
۵-۲ خلاصه تعبیرها	۴۰
۶-۲ عملیات ریاضی در تبدیل کلی	۴۱
۷-۲ معادله‌های تبدیل	۴۴
۸-۲ مطالبی دیگر درباره نمایش جهتگیری	۴۶
۹-۲ تبدیل بردارهای آزاد	۶۲
۱۰-۲ ملاحظات محاسباتی	۶۴
۳ سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر	۷۷
۱-۳ مقدمه	۷۷
۲-۳ توصیف رابط	۷۷

۸۱	۳-۳ توصیف اتصال رابط
۸۳	۴-۳ قرارداد برای اتصال چهارچوبها به رابطها
۹۱	۵-۳ سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر
۹۵	۶-۳ فضای کاراندازی، فضای مفصلی، و فضای دکارتی
۹۶	۷-۳ مثالها: سینماتیک دو روبات صنعتی
۱۰۹	۸-۳ چهارچوبهای با نامهای استاندارد
۱۱۲	۹-۳ ابزار کجاست؟
۱۱۲	۱۰-۳ ملاحظات محاسباتی
۱۲۵	۴ سینماتیک وارون بازوهای مکانیکی ماهر
۱۲۵	۱-۴ مقدمه
۱۲۵	۲-۴ حل پذیر بودن
۱۳۲	۳-۴ نمادگذاری زیرفضای بازوی مکانیکی ماهر در حالت $n < 6$
۱۳۴	۴-۴ راه حل جبری در مقابل راه حل هندسی
۱۴۰	۵-۴ راه حل جبری از طریق تبدیل به چندجمله‌ای
۱۴۲	۶-۴ روش حل پاییر برای سه محور متقاطع در یک نقطه
۱۴۵	۷-۴ مثالهایی از سینماتیک وارون بازوهای مکانیکی ماهر
۱۵۶	۸-۴ چهارچوبهای استاندارد
۱۵۸	۹-۴ استفاده از زیربرنامه SOLVE برای بازوهای مکانیکی ماهر
۱۵۸	۱۰-۴ دقت و تکرارپذیری
۱۵۹	۱۱-۴ ملاحظات محاسباتی
۱۶۹	۵ ژاکوبیها، سرعتها و نیروهای استاتیکی
۱۶۹	۱-۵ مقدمه
۱۶۹	۲-۵ نمادگذاری برای مکان و جهتگیری متغیر با زمان
۱۷۳	۳-۵ سرعت خطی و دورانی اجسام صلب
۱۷۶	۴-۵ مطالبی بیشتر درباره سرعت زاویه‌ای
۱۸۲	۵-۵ حرکت رابطهای روبات
۱۸۲	۶-۵ چگونگی «اشاعه» سرعت از رابطی به رابط دیگر
۱۸۸	۷-۵ ژاکوبیها
۱۹۱	۸-۵ حالت‌های تکین
۱۹۴	۹-۵ نیروهای استاتیکی در بازوهای مکانیکی ماهر
۱۹۷	۱۰-۵ ژاکوبیها در حوزه نیرو

## ۶ دینامیک بازوهای مکانیکی ماهر

۲۰۹

۲۰۹

۲۱۰

۲۱۲

۲۱۷

۲۱۹

۲۲۳

۲۲۴

۲۲۸

۲۳۰

۲۳۵

۲۳۸

۲۴۰

۲۴۱

۱-۶ مقدمه

۲-۶ شتاب جسم صلب

۳-۶ توزیع جرم

۴-۶ معادله نیوتن-معادله اوپلر

۵-۶ محاسبات دینامیکی تکراری نیوتن-اوپلر

۶-۶ معادله‌های تکراری و معادله‌های به شکل بسته

۷-۶ مثالی از معادله‌های دینامیکی بسته

۸-۶ ساختار معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر

۹-۶ روش لاگرانژ در به دست آوردن معادله‌های دینامیکی بازوهای مکانیکی

۱۰-۶ به دست آوردن معادله‌های دینامیکی بازوهای مکانیکی در فضای دگارتی

۱۱-۶ شمول اثرات جسم غیر صلب

۱۲-۶ شبیه سازی دینامیکی

۱۳-۶ ملاحظات محاسباتی

## ۷ تولید مسیر

۲۵۵

۲۵۵

۲۵۶

۲۵۷

۲۷۴

۲۷۸

۲۸۱

۲۸۳

۲۸۴

۲۸۵

۱-۷ مقدمه

۲-۷ ملاحظات کلی درباره توصیف و تولید مسیر

۳-۷ روشهای فضای مفصلی

۴-۷ روشهای فضای دگارتی

۵-۷ مشکلات هندسی مسیرهای دگارتی

۶-۷ تولید مسیر در هنگام اجرای برنامه کامپیوتری

۷-۷ توصیف مسیر با زبان برنامه ریزی روبات

۸-۷ طرح ریزی مسیر با استفاده از مدل دینامیکی

۹-۷ طرح ریزی مسیرهای عاری از برخورد

## ۸ طراحی مکانیزم بازوی مکانیکی ماهر

۲۹۳

۲۹۳

۲۹۴

۲۹۷

۳۰۳

۱-۸ مقدمه

۲-۸ طراحی بر پایه عملیات خواسته شده از روبات

۳-۸ پیکربندی سینماتیکی

۴-۸ معیارهای کمتی مشخصات فضای کاری

۳۰۸	۵-۸ سازه‌های زنجیری زاید و بسته
۳۱۱	۶-۸ روشهای کاراندازی
۳۱۴	۷-۸ سختی و تغییر شکل خمشی
۳۲۰	۸-۸ حس مکان
۳۲۱	۹-۸ حس نیرو

۳۳۳	۹ کنترل خطی بازوهای مکانیکی ماهر
۳۳۳	۱-۹ مقدمه
۳۳۴	۲-۹ کنترل مدار بسته و پسخوراند (فیدبک)
۳۳۶	۳-۹ سیستمهای خطی درجه دوم
۳۴۴	۴-۹ کنترل سیستمهای درجه دوم
۳۴۷	۵-۹ تقسیم قانون کنترل
۳۴۹	۶-۹ کنترل تعقیب مسیر
۳۵۰	۷-۹ دفع اغتشاش
۳۵۳	۸-۹ کنترل زمانی پیوسته و ناپیوسته (منقطع)
۳۵۴	۹-۹ مدلسازی و کنترل یک مفصل تنها
۳۶۱	۱۰-۹ ساختمان کنترل کننده یک روبات صنعتی

۳۶۹	۱۰ کنترل غیرخطی بازوهای مکانیکی ماهر
۳۶۹	۱-۱۰ مقدمه
۳۷۰	۲-۱۰ سیستمهای غیرخطی و متغیر با زمان
۳۷۵	۳-۱۰ سیستمهای کنترل چند ورودی-چند خروجی
۳۷۵	۴-۱۰ کنترل بازوهای مکانیکی ماهر
۳۷۷	۵-۱۰ ملاحظات عملی
۳۸۲	۶-۱۰ سیستمهای کنترل روباتهای صنعتی امروزی
۳۸۵	۷-۱۰ تحلیل پایداری لیاپونوف
۳۹۰	۸-۱۰ سیستمهای کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی
۳۹۵	۹-۱۰ کنترل تطبیقی

۴۰۵	۱۱ کنترل نیرو در بازوهای مکانیکی ماهر
۴۰۵	۱-۱۱ مقدمه
۴۰۶	۲-۱۱ کاربرد روباتهای صنعتی در عملیات مونتاژ
۴۰۶	۳-۱۱ چهارچوب اعمال کنترل در عملیات مقید شده جزئی



۴۱۳	۴-۱۱ مسئله کنترل ترکیبی مکان-نیرو
۴۱۴	۵-۱۱ کنترل نیروی سیستم جرم-فنر
۴۱۸	۶-۱۱ روش کنترل ترکیبی مکان-نیرو
۴۲۴	۷-۱۱ روشهای کنترل روبانهای صنعتی کنونی
۴۳۳	۱۲ سیستمها و زبانهای برنامه ریزی روبات
۴۳۳	۱-۱۲ مقدمه
۴۳۴	۲-۱۲ سه شیوه برنامه ریزی روبات
۴۳۷	۳-۱۲ کاربرد نمونه
۴۳۹	۴-۱۲ شرایط لازم برای زبان برنامه ریزی روبات
۴۴۴	۵-۱۲ کاربرد نمونه به سه زبان برنامه ریزی روبات
۴۵۱	۶-۱۲ مسائل ویژه در زبانهای برنامه ریزی روبات
۴۵۹	۱۳ سیستمهای برنامه ریزی خارج خط
۴۵۹	۱-۱۳ مقدمه
۴۶۲	۲-۱۳ مطالب اصلی در سیستمهای OLP
۴۶۷	۳-۱۳ ایستگاه Cim
۴۷۹	۴-۱۳ اتوماسیون عملیات فرعی در سیستمهای OLP
۴۸۲	۵-۱۳ خلاصه
۴۸۷	پیوست الف روابط مثلثاتی
۴۸۹	پیوست ب قراردادهای بیست و چهارگانه برای مجموعه زوایا
۴۹۳	پیوست ج برخی روابط سینماتیک وارون
۴۹۵	پیوست د پاسخ به برخی از تمرینها
۵۰۹	واژه نامه فارسی-انگلیسی
۵۲۹	واژه نامه انگلیسی-فارسی
۵۴۷	فهرست راهنما



## پیشگفتار مترجمان

در پاییز سال ۱۳۶۷، درس «روباتیک: سینماتیک و دینامیک» برای نخستین بار در ایران توسط مترجم نخست در دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شریف ارائه، و به دنبال آن آزمایشگاه روباتیک و بیومکانیک در این دانشکده تأسیس شد. در حال حاضر، این آزمایشگاه مجهز به دو روبات  $Ma2000$  (با شش درجه آزادی برای مقاصد آموزشی)، و  $Ma3000$  (با پنج درجه آزادی برای مقاصد نیمه صنعتی و پژوهشی)، سیستمهای بینایی ماشینی، میکروکمپیوتر، و برخی دستگاههای دیگر لازم برای اتوماسیون است.

از آنجا که روباتیک در کشور ما زمینه‌ای بسیار تازه است، در ترجمه برخی اصطلاحات به‌کار رفته در این کتاب با مشکلاتی مواجه بوده‌ایم. در این موارد، تا حد امکان از معادل فارسی استفاده شده، اما گاهی نیز به ناچار عین واژه‌های انگلیسی به کار رفته‌اند. برای آسان نمودن مراجعه به واژه‌های انگلیسی، در پایان کتاب واژه‌نامه فارسی به انگلیسی اضافه شده است، و نیز برای استفاده دانشجویان، پاسخ به تمرینهای برگزیده کتاب در پیوست (د) آمده است. این پیوست حاصل سالها تدریس درس روباتیک توسط مترجم نخست است و در کتاب اصلی وجود ندارد. پیشنهادهای خوانندگان کتاب درباره معادل‌یابی واژه‌ها در جهت بهتر رساندن مطالب، مورد امتنان مترجمان خواهد بود.

علی مقداری-فائزه میرفخرائی  
دانشگاه صنعتی شریف  
اسفندماه ۱۳۷۴



## Introduction to Robotics: Mechanics and Control

John J. Craig

### Preface to the Persian Edition

It was with great pleasure that I learned that this text book would be translated into the Persian language. The book is now available in English, Japanese, Korean, Polish, Italian, Chinese, and Persian. I hope that readers of the Persian language find my efforts in writing this book were worthwhile. My thanks to Prof. Ali Meghdari and his students for this translation.

John J. Craig

August, 1992

California, USA

مکانیک و کنترل در روباتیک

نوشته جان جی کریگ

پیشگفتاری بر نسخه فارسی

هنگامی که آگاه شدم این کتاب به زبان فارسی ترجمه خواهد شد، بسیار خرسند شدم. این کتاب در حال حاضر به زبانهای انگلیسی، ژاپنی، کره‌ای، لهستانی، ایتالیایی، چینی و فارسی در دسترس است. امیدوارم که خوانندگان فارسی‌زبان تلاشهای مرا در نوشتن این کتاب، با ارزش ببینند. تشکرات خود را به پروفسور علی مقداری و دانشجویانش برای این ترجمه تقدیم می‌دارم.

جان جی کریگ

اوت، ۱۹۹۲

کالیفرنیا، آمریکا



## پیشگفتار مؤلف

دانشمندان غالباً احساس می‌کنند که با انجام مطالعاتشان، درباره جنبه‌ای از خود(انسان) چیزهایی می‌آموزند. فیزیکدانان، روانشناسان، و شیمی‌دانان، همه این ارتباط را مشاهده می‌کنند. در مطالعه روباتیک (علم شناخت و طراحی آدمکهای مصنوعی هوشمند)، ارتباط بین این زمینه مطالعاتی و خود انسان، بسیار قابل لمس است. همچنین، روباتیک بر خلاف علومى که تنها به تحلیل بسنده می‌کنند، در شکل حاضر خود از مهندسی نیز برای ترکیب (ستز) استفاده می‌کند. شاید به همین دلایل باشد که این رشته بسیاری را شیفته خود ساخته است.

مطالعه روباتیک، با تمایل شخص به ترکیب بعضی از کارهای انجام شده توسط انسان با استفاده از مکانیزمها، حساسه‌ها، کاراندازها، و کامپیوترها ارتباط نزدیک دارد. این کار عظیمی است که به نظرات متعددی از رشته‌های «کلاسیک» گوناگون نیاز دارد.

در حال حاضر، بررسی ابعاد مختلف تحقیقات روباتیکی توسط متخصصان زمینه‌های گوناگون انجام می‌پذیرد. معمولاً نمی‌توان فردی را پیدا کرد که بر کل زمینه روباتیک مسلط باشد. از این رو این رشته به رشته‌های فرعی تقسیم شده است. به‌طور مجرد می‌توان روباتیک را به چهار رشته فرعی اعمال مکانیکی، انتقال و حرکت، بینایی کامپیوتری، و هوش مصنوعی تقسیم کرد.

در این کتاب، رشته فرعی علم و مهندسی اعمال مکانیکی معرفی می‌شود. مبانی این رشته فرعی روباتیکی در چندین زمینه کلاسیک مختلف یافت می‌شود که اصلترین آنها مکانیک، نظریه کنترل، و علوم کامپیوتر است. فصلهای ۱ تا ۸ عنوانهایی از مهندسی مکانیک و ریاضیات، فصلهای ۹ تا ۱۱ موضوعاتی در نظریه کنترل، و فصلهای ۱۲ و ۱۳ مطالبی در علوم کامپیوتر را در بر می‌گیرند. به علاوه، در این کتاب بر جنبه محاسباتی مسائل نیز تأکید شده است، و در پایان فصلهایی که بیشتر درباره مکانیک بحث کرده‌اند، بخشی کوتاه ویژه مسائل محاسباتی در نظر گرفته شده است.

این کتاب، کامل شده یادداشتهای کلاسی مورد استفاده برای تدریس «مقدمه‌ای بر روباتیک» در دانشگاه استنفورد از پاییز سال ۱۹۸۳ تا سال ۱۹۸۵، و ویرایش اول همین کتاب است که از سال ۱۹۸۶ تا ۱۹۸۸ در استنفورد و بسیاری دانشگاههای دیگر تدریس شده است. در ویرایش حاضر، از تجربیات حاصل از تدریس ویرایش قبلی، برای تصحیح و بهتر ساختن مطالب استفاده شده است. در دانشگاه استنفورد، که سال تحصیلی سه ترم دارد، مقدمه‌ای بر روباتیک در ترم اول، بینایی کامپیوتری در ترم دوم، و هوش مصنوعی، انتقال و حرکت، و عناوین پیشرفته‌تر، در ترم سوم ارائه می‌شود.

این کتاب برای تدریس در سال چهارم دوره کارشناسی یا سال اول دوره کارشناسی ارشد مناسب است. برای درک مطالب، بهتر است دانشجو درسهای استاتیک، دینامیک، جبر خطی، و برنامه‌نویسی به یکی از زبانهای سطح بالا را گذرانده باشد. به علاوه، گذراندن درس مقدمه‌ای بر نظریه کنترل، به درک بهتر موضوعات کمک خواهد کرد، اما ضروری نیست. یکی از هدفهای این کتاب، ارائه مطالب به زبان ساده و قابل فهم است. اگر چه بسیاری از مطالب از مهندسی مکانیک گرفته شده‌اند، اما نیازی نیست خواننده مهندس مکانیک باشد. در دانشگاه استنفورد، بسیاری از مهندسان برق، متخصصان کامپیوتر، و ریاضیدانان، این کتاب را قابل استفاده تشخیص داده‌اند. این کتاب، در درجه نخست برای مهندسانی که بر روی سیستمهای روباتی کار می‌کنند، نوشته شده است، اما برای افراد دیگری که به صورتی با روباتیک سروکار دارند نیز زمینه اطلاعاتی مناسبی را فراهم می‌آورد. همان گونه که متخصصان نرم‌افزارهای کامپیوتری تا حدی با سخت افزار آشنا هستند، افرادی که مستقیماً با مکانیک و کنترل روباتها سروکار ندارند نیز بایست، در حد مطالب این کتاب، در این زمینه آگاهی داشته باشند.

ویزایش دوم این کتاب از ۱۳ فصل تشکیل شده است. مطالب در یک ترم تحصیلی ۱۸ هفته‌ای به راحتی قابل تدریس‌اند، اما اگر قرار بر تدریس کتاب در یک ترم ۱۲ هفته‌ای باشد، باید بر طبق تشخیص مدرّس، تعدادی از فصلها حذف شوند. اما به هر صورت، کلیه عناوین را نمی‌توان در این مدت به طور عمقی بررسی کرد. در این کتاب، به این مسئله توجه شده است، و مثلاً در بیشتر فصلها تنها یک روش برای حل مسائل پیشنهاد می‌شود. نویسنده کوشیده است که عناوین را با توجه به فاصله‌های زمانی معمول در تدریس، مطرح کند. یک روش به کار رفته برای این منظور، استفاده از مطالبی است که مستقیماً به مطالعه بازوهای مکانیکی مربوط می‌شوند. در انتهای فصل ۱، چندین مرجع آمده است، که شامل فهرستی از نشریه‌های پژوهشی منتشر شده در زمینه روباتیک نیز می‌شود.

در پایان هر فصل، تمرینهایی مطرح شده است. هر تمرین یک «ضریب دشواری» دارد که به صورت شماره در داخل کروشه و بلافاصله پس از شماره تمرین نوشته شده است. ضریب دشواری بین  $[0^\circ]$  تا  $[5^\circ]$  تغییر می‌کند.  $[0^\circ]$  نشاندهنده تمرین ساده و آسان، و  $[5^\circ]$  نشاندهنده مسئله تحقیقاتی حل نشده است. البته دشواری و سادگی تمرینها در نظر خوانندگان مختلف یکسان نیست، و به همین دلیل شاید برخی خوانندگان ضریب دشواری را گمراه کننده ببینند. در هر حال، کوشش شده تا دشواری تمرینها ارزیابی شود.

علاوه بر این، در پایان هر فصل، یک تمرین برنامه‌نویسی پیش‌بینی شده است که در آن، دانشجو مطالب آن فصل را در مورد یک بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با سه مفصل، به کار می‌گیرد. پیچیدگی این بازوی مکانیکی به آن اندازه هست که تقریباً کلیه اصول بازوهای مکانیکی را به نمایش گذارد، بدون آنکه دانشجو را با مسائل بسیار مشکل درگیر کند. هر تمرین برنامه‌نویسی، تمرینهایی قبلی را کاملتر می‌کند، تا جایی که در انتهای دوره، دانشجو کتابخانه‌ای از نرم افزارهای بازوهای مکانیکی را در اختیار خواهد داشت.



فصل ۱ مقدمه‌ای بر زمینهٔ روباتیک است، که مطالب اولیه، نادرستی پذیرفته شده در این کتاب، چند نظریهٔ اساسی، و مطالب فصلهای آینده را معرفی می‌کند.

فصل ۲ به ریاضیات به‌کار رفته برای توصیف مکان و جهتگیری در فضای سه بعدی می‌پردازد. این فصل بسیار اهمیت دارد، زیرا بنابر تعریف در بازوی مکانیکی ماهر، حرکت اجسام (قطعات، ابزارها، و خود بازو) در فضا مطرح می‌شود. برای توصیف این حرکات، به ارائهٔ روشهای ساده و قابل درک نیاز داریم.

در فصلهای ۳ و ۴، دربارهٔ هندسهٔ بازوهای مکانیکی ماهر بحث می‌شود، و در این فصلها شاخه‌ای از مهندسی مکانیک به نام سینماتیک (مطالعهٔ حرکت بدون توجه به نیروهای پدیدآورندهٔ آن) را معرفی می‌کنیم. در این دو فصل، سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر، فقط در حالت استاتیکی بررسی خواهد شد.

در فصل ۵، بحث سینماتیک به سرعت و نیروهای استاتیکی گسترش داده می‌شود. در فصل ۶، برای نخستین بار نیروها و لنگرهای لازم برای حرکت یک بازوی مکانیکی ماهر مطرح می‌شود. مسئلهٔ اساسی در دینامیک بازوهای مکانیکی ماهر نیز همین است.

فصل ۷ به توصیف حرکات بازوهای مکانیکی ماهر بر اساس مسیر آنها در فضا می‌پردازد. در فصل ۸، مسائل طراحی مکانیکی بازوهای مکانیکی ماهر، از قبیل اینکه چه تعداد مفصل برای هر بازو لازم است؟ این مفصلها باید از چه نوع باشند؟ و ترتیب قرارگیری آنها چگونه باید در نظر گرفته شود بررسی می‌شود.

در فصلهای ۹ و ۱۰، روشهای کنترل یک بازوی مکانیکی ماهر (معمولاً به وسیلهٔ کامپیوتر رقمی) برای تعقیب دقیق مسیر مورد نظر در فضا، بررسی خواهد شد. در فصل ۹ روشهای کنترل خطی، و در فصل ۱۰ تعمیم این روشها به قلمرو کنترل غیرخطی مطالعه می‌شود.

فصل ۱۱ زمینهٔ نسبتاً جدید کنترل نیروی فعال را در بر می‌گیرد، که در آن چگونگی کنترل نیروهای وارد شده از سوی بازو، بررسی می‌شود. این روش کنترل، به هنگام تماس بازو با محیط اطراف آن، مثلاً هنگامی که بازو برای شستن پنجره از اسفنج استفاده می‌کند، اهمیت دارد.

در فصل ۱۲ دربارهٔ روشهای برنامه‌ریزی روباتها، به ویژه اجزایی که در هر سیستم برنامه‌ریزی روبات مورد نیازند، و مسائل ویژهٔ مربوط به برنامه‌ریزی روباتهای صنعتی، بحث می‌شود.

در فصل ۱۳ شبیه‌سازی خارج خط و سیستمهای برنامه‌ریزی نوین، که آخرین دستاوردها در سازگار ساختن انسان با روبات هستند، معرفی می‌شود.

جان جی کریگ  
پالو آلتو، کالیفرنیا



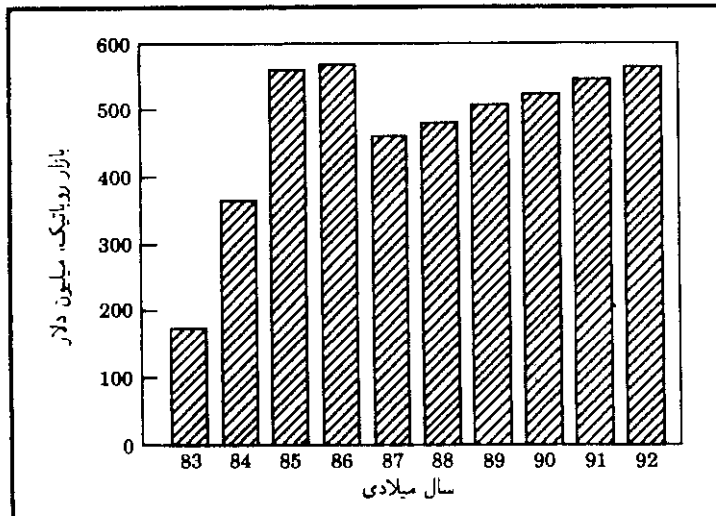
## مقدمه

### ۱-۱ زمینه

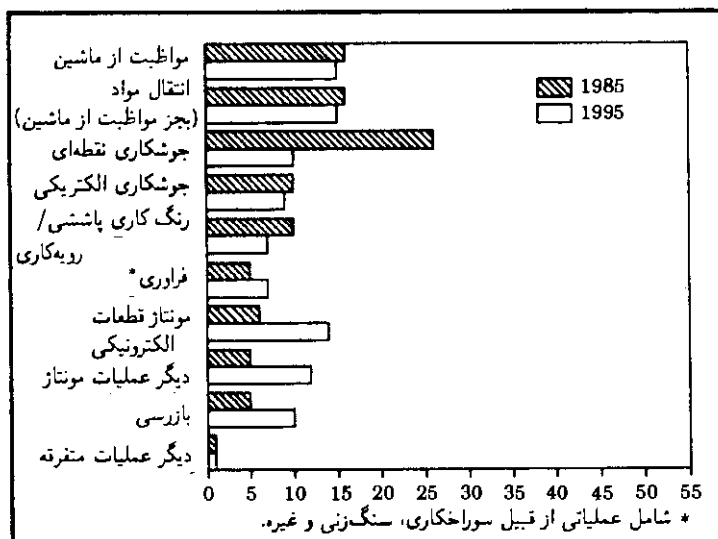
تاریخ اتوماسیون صنعتی با دوره‌هایی مشخص می‌شود که در آنها تغییرات سریع و ناگهانی در روشهای معمول صورت گرفته است. به نظر می‌رسد که این دوره‌های تغییر در فنون اتوماسیون، به صورت علت و شاید معلول، با اقتصاد جهانی عمیقاً همبسته باشد. استفاده از روبات صنعتی، که در دهه ۱۹۶۰ میلادی به عنوان دستگاهی منحصر به فرد شناخته شد، به همراه سیستمهای طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) و سیستمهای تولید به کمک کامپیوتر (CAM)، مشخصه آخرین روندهای اتوماسیون فرایند تولید است [۱]. این تکنولوژیها، اتوماسیون صنعتی را به گذار دیگری که چشم انداز آن هنوز نامعلوم است، هدایت می‌کنند.

اگرچه رشد بازار روباتیک در مقایسه با سالهای اول دهه ۱۹۸۰ کاهش یافته است (شکل ۱-۱)، اما بر طبق پیش‌بینیهای انجام شده، استفاده از روباتهای صنعتی هنوز دوران ابتدایی خود را طی می‌کند. صرف نظر از اینکه این پیش‌بینیها به طور کامل تحقق یابند یا نه، روشن است که روباتهای صنعتی، در هر حال و به هر شکل، در صنعت ماندگار خواهند بود.

امروزه از روباتهای صنعتی اغلب در کارهای نسبتاً ساده و تکراری، که محتاج دقت زیاد نیستند، استفاده می‌شود. شکل ۱-۲ این واقعیت را که در دهه ۱۹۸۰ انجام کارهای نسبتاً ساده مانند مواظبت از ماشینها، انتقال مواد، نقاشی، و جوشکاری به وسیله روباتها اقتصادی است، نمایش می‌دهد. تحلیل گران بازار در بخش تولید، پیش‌بینی می‌کنند که در دهه ۱۹۹۰ میلادی، روباتهای صنعتی به گونه‌ای روزافزون در کارهایی مانند مونتاژ، که به دقت بیشتر نیاز دارند و از نظر حساسی به فرسایش، به طور گسترده مورد استفاده قرار خواهند گرفت.



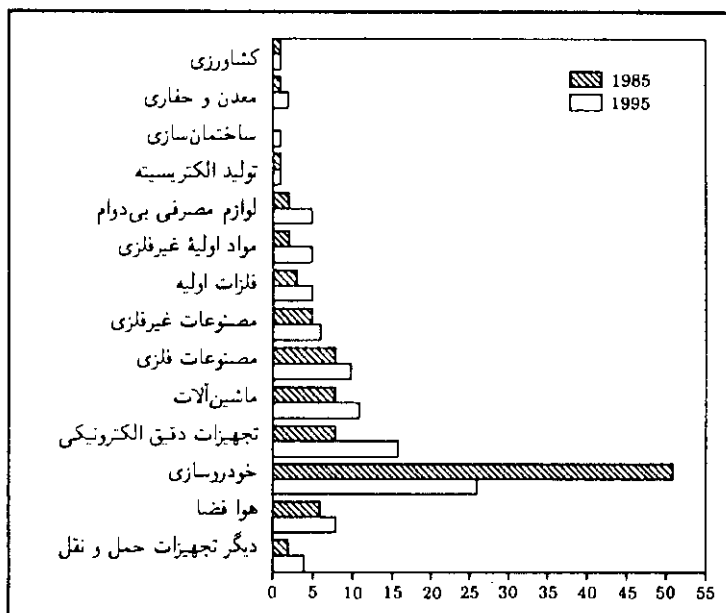
شکل ۱-۱ بازار روباتیک در آمریکای شمالی برحسب میلیون دلار.



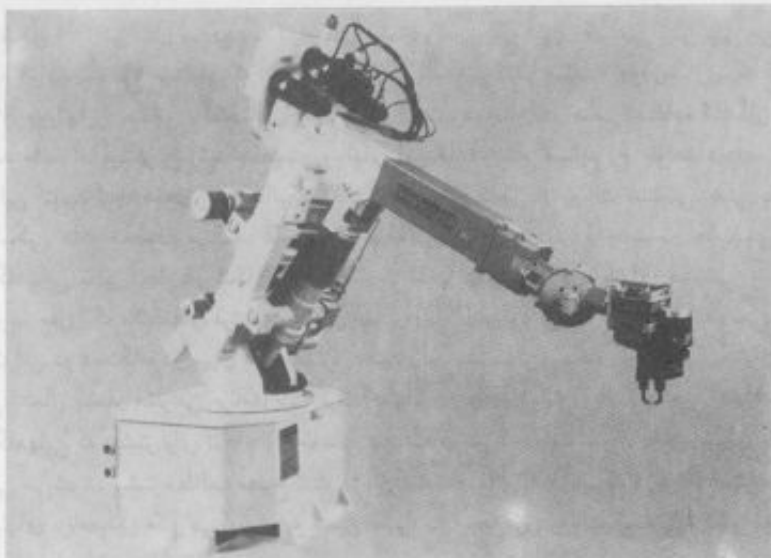
شکل ۱-۲ درصد فروش روبات برحسب کاربرد، در ایالات متحده آمریکا.

شکل ۱-۳ نیز نشان می‌دهد که قابلیت‌های بیشتری که برای روبات‌های صنعتی پیش‌بینی می‌شود، سبب خواهد شد نوع صناعی که آنها را به‌کار می‌گیرند، تغییر کند. صنعت خودروسازی، که از دهه ۱۹۷۰ روبات‌ها را به نحوی اقتصادی به‌کار گرفته است، همچنان در صدر استفاده‌کنندگان باقی خواهد ماند، اما بیشترین رشد جمعیت روبات‌های آمریکا، در سایر صنایع رخ خواهد داد. این کتاب، توجه خود را به مکانیک و کنترل مهمترین شکل از روبات صنعتی، یعنی بازوی مکانیکی ماهر معطوف می‌کند. غالباً بر سر اینکه روبات صنعتی دقیقاً چیست، بحث می‌شود. دستگاه‌هایی نظیر آنچه در شکل ۱-۴ دیده می‌شود، همیشه جزو روبات‌های صنعتی به شمار می‌روند، حال آنکه ماشین‌های فرز دارای کنترل عددی (NC)، معمولاً روبات صنعتی نامیده نمی‌شوند. تفاوت این دو دستگاه، در میزان بفرنجی برنامه‌پذیری آنهاست. اگر وسیله‌ای مکانیکی را بتوان برای انجام اعمال بسیار متنوعی برنامه‌ریزی کرد، احتمالاً آن وسیله یک روبات صنعتی خواهد بود. دستگاه‌هایی که بیشتر برای انجام کار خاصی درست می‌شوند، تحت عنوان «اتوماسیون ثابت» بررسی می‌شوند. بیشتر مطالب مطرح شده در این کتاب، مسائل پایه‌ای‌اند که در انواع گسترده‌ای از ماشین‌های برنامه‌پذیر به‌کار می‌روند، و به همین دلیل، در اینجا فرق روبات صنعتی و سایر ماشین‌ها بررسی نخواهد شد.

روی هم رفته، بررسی و مطالعه مکانیک و کنترل بازوهای مکانیکی ماهر دانش نوینی نیست،



شکل ۱-۳ درصد فروش روبات به صنایع مختلف آمریکا در آینده.



شکل ۱-۴ بازوی مکانیکی ماهر سین سیناتی میلاکرون ۷۷۶ با شش مفصل چرخشی، که در جوشکاری نقطه‌ای کاربرد زیاد دارد.

بلکه صرفاً مجموعه‌ای از عناوین برگرفته از زمینه‌های کلاسیک است. مهندسی مکانیک، اسلوبهایی را برای مطالعه ماشینها در حالت‌های استاتیکی و دینامیکی ارائه می‌کند. ریاضیات ابزارهایی را برای توصیف حرکات فضایی و سایر خواص بازوی مکانیکی ماهر، فراهم می‌آورد. نظریه کنترل وسایلی را برای طراحی و ارزیابی الگوریتم‌هایی به منظور درک نیروها یا حرکت‌های مطلوب فراهم می‌آورد. فنون مهندسی برق، موجبات طراحی حساسه‌ها و فصل مشترکها را برای روبانهای صنعتی پدید می‌آورد، و علم کامپیوتر ساختن زمینه‌ای برای برنامه‌ریزی این روبانها، به منظور انجام کار مورد نظر، را برعهده دارد.

## ۱-۲ مکانیک و کنترل بازوهای مکانیکی ماهر

در بخشهای آینده، برخی اصطلاحات تعریف می‌شود و هر یک از مباحث مطرح شده در این کتاب، به‌طور خلاصه شرح داده خواهد شد.

### توصیف مکان و جهتگیری

در مطالعه روبانیک، پیوسته با مکان و جهتگیری اجسام در فضای سه بعدی سروکار داریم. این اجسام ممکن است رابطهای بازوی مکانیکی ماهر، قطعات و ابزار که بازوی مکانیکی ماهر با آنها

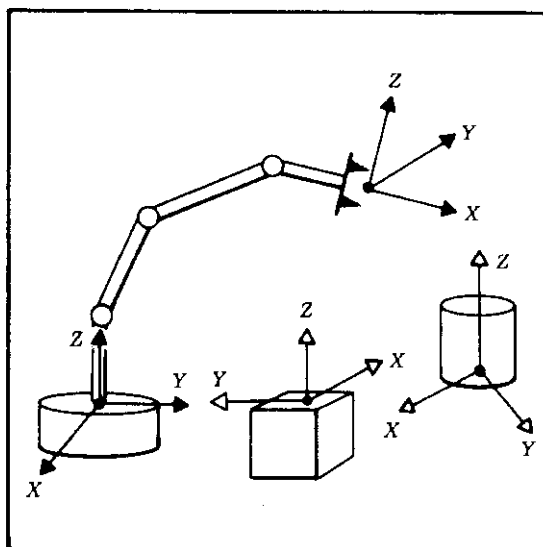
سرکار دارد، و یا سایر اجسام موجود در محیط کار بازو باشند. این اجسام، در سطحی ابتدایی اما پراهمیت، تنها با دو مشخصه تعیین می‌شوند: مکان و جهتگیری. طبیعتاً موضوعی که باید بیش از هر چیز دیگر مطرح شود، روشی است که مطابق آن این کمیتها را نشان می‌دهیم و در عملیات ریاضی به‌کار می‌بریم.

به منظور توصیف مکان و جهتگیری هر جسم در فضا، همواره یک دستگاه مختصات یا چهارچوب را به‌صورت صلب به جسم متصل می‌کنیم. سپس به توصیف مکان و جهتگیری این چهارچوب نسبت به دستگاه مختصات مرجع خواهیم پرداخت (شکل ۱-۵ را ببینید).

از آنجا که هر دستگاه مختصات دلخواه را می‌توان به‌منزله دستگاه مرجع برای بیان مکان و جهتگیری جسم به‌کار برد، غالباً علاقه‌مند به تبدیل یا تغییر توصیف مشخصه‌های جسم (مکان و جهتگیری) از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر هستیم. در فصل ۲، درباره قواعد لازم برای توصیف مکان و جهتگیری، و ریاضیات مربوط به این کمیتها نسبت به دستگاههای مختصات گوناگون بحث می‌شود.

### سینماتیک مستقیم بازوهای مکانیکی ماهر

سینماتیک علم حرکت است و حرکت را بدون در نظر گرفتن نیروهای به‌وجود آورنده آن، مطالعه



شکل ۱-۵ دستگاههای مختصات یا چهارچوبها به بازوی مکانیکی ماهر و اجسام واقع در محیط، متصل می‌شوند.

می‌کند. در علم سینماتیک، مکان، سرعت، شتاب، و کلیه مشتق‌های مرتبه بالاتر از متغیرهای مکانی (نسبت به زمان یا هر متغیر دیگر)، بررسی می‌شود. از این رو مطالعه سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر، به تمامی ویژگیهای هندسی و زمانی حرکت مربوط می‌شود.

بازوهای مکانیکی ماهر، از رابطهای نسبتاً صلبی تشکیل می‌شوند که به وسیله مفصلهایی، که حرکت نسبی رابطهای مجاور را ممکن می‌سازند، به یکدیگر اتصال یافته‌اند. این مفصلها معمولاً به حساسه‌های مکان، که اندازه‌گیری مکان نسبی رابطهای مجاور را امکانپذیر می‌سازند، مجهزند. در حالتی که مفصلها از نوع چرخشی یا لولایی باشند، این‌گونه جابه‌جاییها را زوایای مفصلی می‌نامند. برخی از بازوهای مکانیکی ماهر، مفصلهای لغزشی یا کشویی دارند، که در آنها جابه‌جایی نسبی بین رابطها، از نوع انتقال است، و گاه آن را انحراف مفصلی نیز می‌نامند.

تعداد درجات آزادی هر بازوی مکانیکی ماهر، عبارت است از تعداد متغیرهای مکانی مستقلی که باید برای تعیین مکان و جهتگیری کلیه قسمت‌های مکانیزم مشخص شوند. این اصطلاحی کلی است که برای هر مکانیزم به کار می‌رود. مثلاً، یک اهرم‌بندی چهار میله‌ای، تنها دارای یک درجه آزادی است (هر چند در این مکانیزم، سه عضو حرکت می‌کنند). از آنجا که در روباتهای صنعتی، بازوی مکانیکی ماهر یک زنجیر سینماتیکی باز است، و چون مکان هر مفصل معمولاً تنها با یک متغیر توصیف می‌شود، تعداد درجات آزادی با تعداد مفصلها برابر خواهد بود.

در انتهای آزاد زنجیر رابطهای تشکیل‌دهنده بازوی مکانیکی ماهر، مجری نهایی قرار دارد. برحسب کاربردی که از روبات انتظار می‌رود، مجری نهایی می‌تواند گیره یا چنگک، مشعل جوشکاری، آهنربای الکتریکی، و یا ابزاری دیگر باشد. به طور کلی مکان بازوی مکانیکی ماهر را با توصیف چهارچوب ابزار، که به مجری نهایی متصل است، نسبت به چهارچوب پایه، که به پایه غیر متحرک بازو اتصال دارد، تعیین می‌کنیم (شکل ۱-۶).

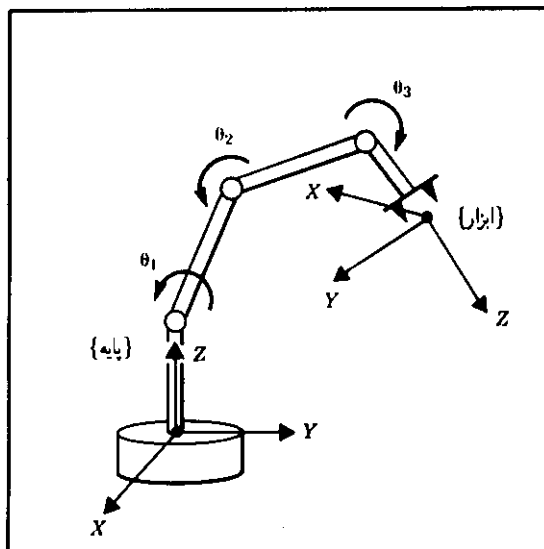
مسئله‌ای بسیار اساسی در مطالعه بازوهای مکانیکی ماهر، مسئله سینماتیک مستقیم است. این مسئله، در واقع مسئله هندسی-استاتیکی محاسبه مکان و جهتگیری مجری نهایی بازوی مکانیکی ماهر است. به طور دقیقتر، چنانچه یک دسته زاویه مفصلی داده شده باشد، مسئله سینماتیک مستقیم، عبارت است از محاسبه مکان و جهتگیری چهارچوب ابزار نسبت به چهارچوب پایه. گاهی این مسئله را، تغییر نمایش مکان بازوی مکانیکی ماهر از فضای مفصلی به فضای دکارتی تعبیر می‌کنیم.<sup>۱</sup> درباره این مسئله در فصل ۳ کاوش خواهد شد.

### سینماتیک وارون بازوهای مکانیکی ماهر

در فصل چهارم، مسئله سینماتیک وارون را در نظر خواهیم گرفت. این مسئله چنین مطرح می‌شود: چنانچه مکان و جهتگیری مجری نهایی بازوی مکانیکی ماهر داده شده باشد، کلیه مجموعه‌های زوایای مفصلی ممکن را که می‌توانند برای رساندن بازوی مکانیکی ماهر به مکان

۱. منظور از فضای دکارتی فضایی است که در آن مکان هر نقطه با سه عدد، و جهتگیری هر جسم نیز با سه عدد داده می‌شود. گاهی آن را فضای کاری یا فضای عملیاتی نیز می‌نامند.





شکل ۶-۱ معادلات سینماتیکی چهارچوب ابزار را نسبت به چهارچوب پایه به صورت تابعی از متغیرهای مفصلی، توصیف می‌کند.

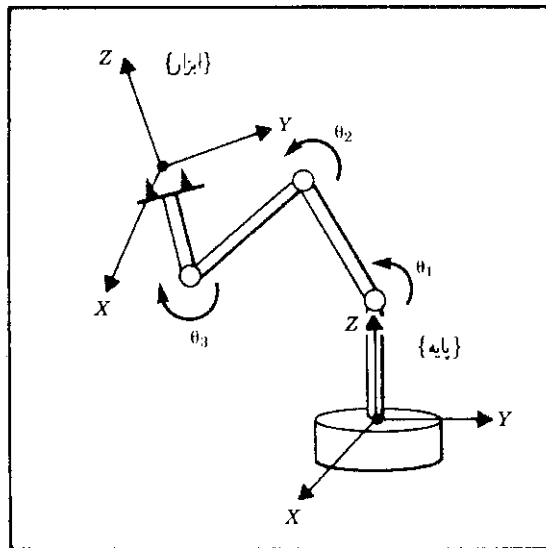
و جهتگیری مفروض مورد استفاده قرار گیرند، محاسبه کنید (شکل ۶-۱ را ببینید). این مسئله‌ای اساسی در کاربرد عملی بازوهای مکانیکی ماهر است.

مسئله سینماتیک وارون به سادگی سینماتیک مستقیم نیست. چون معادله‌های سینماتیکی غیر خطی‌اند، حل آنها به صورت بسته در اکثر موارد به سادگی امکان ندارد، و در برخی موارد نیز غیر ممکن است. وجود یک یا چند جواب نیز مورد تردید است.

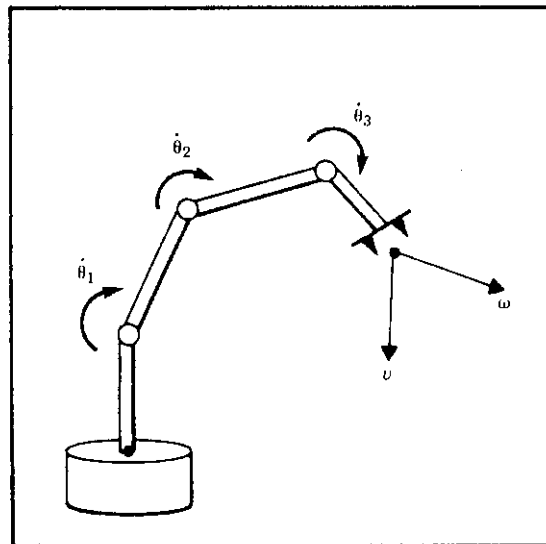
وجود یا عدم وجود حل سینماتیکی، فضای کاری هر بازوی مکانیکی ماهر را معین خواهد کرد. فقدان جواب بدین معناست که بازوی مکانیکی ماهر نمی‌تواند به مکان و جهتگیری مطلوب دست یابد، زیرا در خارج از فضای کاری واقع شده است.

### سرعتها، نیروهای استاتیکی، نقاط تکیه

علاوه بر بحث پیرامون مسائل مربوط به استقرار استاتیکی بازوهای مکانیکی ماهر در مکان و جهتگیری مطلوب، می‌خواهیم بازوهای مکانیکی ماهر را در حال حرکت نیز تحلیل کنیم. غالباً بهتر است برای تحلیل سرعت، مکانیزمی ماتریسی را که ماتریس ژاکوبی بازوی مکانیکی ماهر نامیده می‌شود، تعیین کرد. ماتریس ژاکوبی **نگاشتی** از سرعتها، از فضای مفصلی به فضای دکارتی است (شکل ۸-۱). طبیعت این نگاشت، با تغییر پیکربندی بازوی مکانیکی تغییر می‌کند. این نگاشت در نقاط معینی، که آنها را **نقاط تکیه** می‌نامیم، وارون ناپذیر است. درک این پدیده



شکل ۷-۱ برای مکان و جهتگیری مفروض چهارچوب ابزار، می‌توان با استفاده از سینماتیک وارون، متغیرهای منصلی را محاسبه کرد.



شکل ۸-۱ رابطه هندسی بین سرعت زاویه‌ای مفصلها و سرعت مجری نهایی، با ماتریسی به نام ژاکوبی توصیف می‌شود.

برای طراحان و استفاده کنندگان از بازوهای مکانیکی ماهر، اهمیت دارد. بازوهای مکانیکی ماهر همیشه در فضا حرکت نمی‌کنند، بلکه گاهی لازم است با قطعه کار یا سطح کاری تماس پیدا کنند و بر آن نیروی استاتیکی وارد نمایند. در چنین حالتی مسئله زیر مطرح می‌شود: با معلوم بودن نیرو و لنگر تماسی مورد نظر، چه مقدار گشتاور مفصلی برای ایجاد آنها مورد نیاز خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به این پرسش دوباره ماتریس ژاکوبی را مطرح می‌کنیم.

## دینامیک

دینامیک شاخه‌ای گسترده از مکانیک است که در آن نیروهای پدید آورنده حرکت مورد مطالعه قرار می‌گیرند. برای اینکه یک بازوی مکانیکی ماهر را از حال سکون با شتاب افزایشده به حرکت درآوریم، حرکت آن را به نرمی با سرعت ثابت مجری نهایی تداوم بخشیم، و سرانجام آن را با شتاب کاهنده به حال سکون درآوریم، باید مجموعه پیچیده‌ای از توابع گشتاوری را به وسیله کاراندازهای مفصل<sup>۱</sup> اعمال کنیم. شکل دقیق توابع گشتاور کارانداز مورد نیاز، نه تنها وابسته به مشخصه‌های فضایی و زمانی مسیر پیموده شده به وسیله مجری نهایی است، بلکه به خواص جرمی رابطها، بار مفید، اصطکاک در مفصلها، و غیره نیز بستگی دارد. یکی از روشهای کنترل بازوی مکانیکی ماهر برای حرکت در مسیر مورد نظر، استفاده از معادله‌های دینامیکی حرکت بازوی مکانیکی ماهر، برای محاسبه این توابع گشتاور کارانداز است.

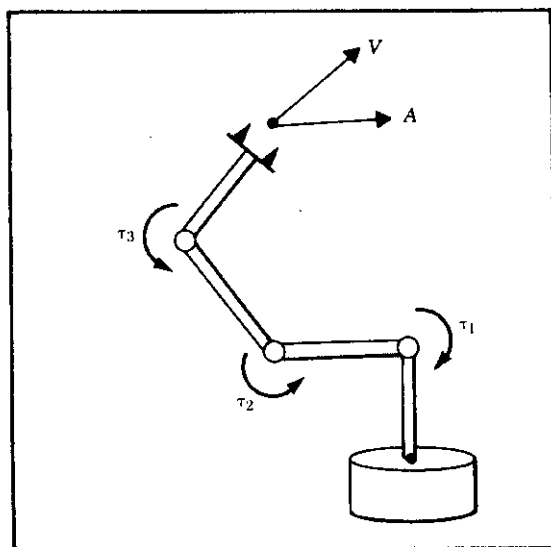
دومین کاربرد معادله‌های دینامیکی حرکت، در شبیه‌سازی است. با فرمولبندی دوباره معادله‌های دینامیکی، به‌طوری که شتاب به صورت تابعی از گشتاور کارانداز محاسبه شود، شبیه‌سازی حرکت بازوی مکانیکی ماهر که تحت تأثیر مجموعه‌ای از گشتاورهای کارانداز قرار دارد، امکانپذیر خواهد شد (شکل ۱-۹ را ببینید).

در فصل ۶ معادله‌های دینامیکی حرکت را به منظور استفاده از آنها در کنترل یا شبیه‌سازی حرکت بازوهای مکانیکی ماهر، پی‌ریزی خواهیم کرد.

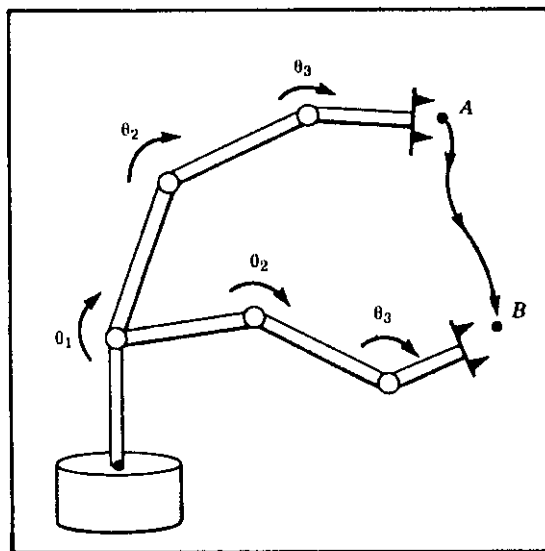
## تولید مسیر

یک راه معمول برای به حرکت در آوردن بازوی مکانیکی ماهر از نقطه‌ای به نقطه دیگر به صورت کنترل شده و هموار، آن است که ترتیبی دهیم تا مفصل به صورت تابعی هموار از زمان حرکت کند. عموماً، هر مفصل حرکت خود را در یک زمان آغاز می‌کند و به پایان می‌رساند، به گونه‌ای که حرکت بازوی مکانیکی ماهر هماهنگ به نظر می‌رسد. تولید مسیر روش دقیق محاسبه این توابع حرکت است (شکل ۱-۱۰ را ببینید). مسیر حرکت غالباً نه تنها به وسیله نقطه نهایی (مقصد)، بلکه با تعدادی نقطه میانی یا بینابینی، که بازوی مکانیکی ماهر باید برای رسیدن به مقصد از

۱. از اصطلاح کارانداز مفصل به منزله اصطلاحی عمومی برای وسایلی که بازوی مکانیکی ماهر را به حرکت درمی‌آورند، از قبیل موتورهای الکتریکی، کاراندازهای هیدرولیکی و بادی، عضلات و غیره، استفاده می‌کنیم.



شکل ۱-۹ رابطه بین گشتاورهای اعمال شده به وسیله کاراندازها و حرکت بازوی مکانیکی ماهر، در معادله‌های دینامیکی حرکت منعکس می‌شود.



شکل ۱-۱۰ برای به حرکت درآوردن مجری نهایی در فضا از نقطه  $A$  تا نقطه  $B$ ، باید برای هر مفصل، مسیری را محاسبه کنیم.

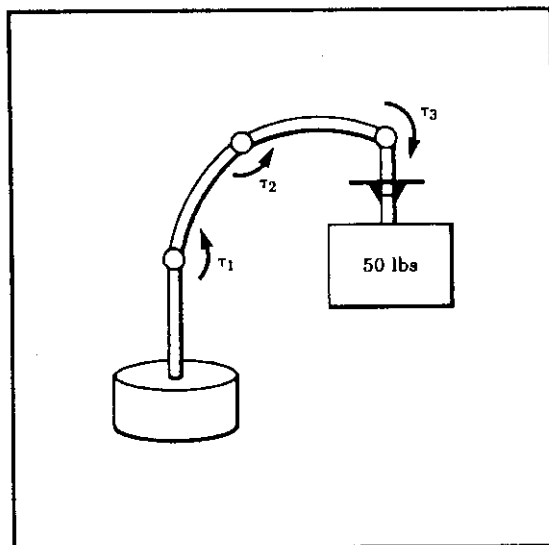
آنها بگذرد، مشخص می‌شود. در چنین مواردی، گاه تابع همواری که از مجموعه نقاط بینابینی می‌گذرد را «اسپلاین»<sup>۱</sup> می‌نامند.

برای واداشتن مجری نهایی به پیمودن خطی مستقیم (یا سایر شکل‌های هندسی) در فضا، باید حرکت مورد نظر به مجموعه‌ای معادل از حرکات مفصل‌ها تبدیل شود. این نوع تولید مسیر دکارتی نیز در فصل ۷ بررسی خواهد شد.

### طراحی بازوهای مکانیکی ماهر و حساسه‌ها

اگر چه از لحاظ نظری، بازوهای مکانیکی ماهر دستگاه‌هایی «همه کاره»، و در موارد زیادی قابل به‌کارگیری‌اند، ولی در حالت کلی، ملاحظات اقتصادی باعث می‌شوند کاری که از بازوی مکانیکی انتظار می‌رود، در طراحی مکانیکی سیستم تأثیر گذارد. طراح باید همراه با مشخصاتی چون اندازه، سرعت، و توانایی حمل بار، تعداد مفصل‌ها و ترکیب هندسی آنها را نیز در نظر بگیرد. این ملاحظات بر کیفیت و اندازه فضای کاری بازوی مکانیکی، سختی سازه بازوی مکانیکی، و سایر مشخصات آن تأثیر می‌گذارند.

در طراحی بازوهای مکانیکی، علاوه بر پارامترهایی که گفته شد، انتخاب و تعیین محل کاراندازها، سیستم‌های انتقال، و حساسه‌های مکانی (وگاه نیرویی) داخلی ضروری‌اند (شکل ۱-۱۱ را ببینید). این مطالب، و دیگر مسائل طراحی، در فصل ۸ بررسی خواهند شد.

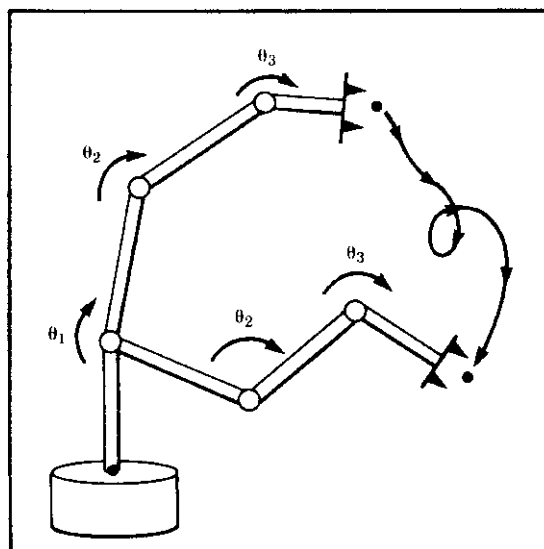


شکل ۱-۱۱ در طراحی بازوهای مکانیکی ماهر، باید نکاتی از قبیل نوع کارانداز، مکان کارانداز، سیستم انتقال، سختی سازه‌ای، مکان حساسه و... در نظر گرفته شوند.

## کنترل خطی مکان

برخی از بازوهای مکانیکی ماهر، به موتورهای پله‌ای یا کاراندازهای دیگری که می‌توانند مستقیماً مسیری مطلوب را تولید کنند، مجهزند. اما اغلب بازوهای مکانیکی ماهر، توسط کاراندازهایی که برای به حرکت در آوردن رابطها، نیرو یا گشتاور ایجاد می‌کنند، به حرکت درمی‌آیند. در این مورد، برای محاسبه گشتاورهایی که باید حرکت مطلوب را ایجاد کنند، الگوریتمی لازم است. دینامیک، در طراحی چنین الگوریتمهایی اهمیت اساسی دارد، اما خود راه حلی برای این کار فراهم نمی‌آورد. مسئله اصلی در هر سیستم کنترل مکان آن است که به طور خودکار، خطاهای موجود در اطلاعات مربوط به پارامترهای سیستم را جبران کرده، از ایجاد اغتشاشاتی که سیستم را از مسیر مورد نظر منحرف می‌سازند، جلوگیری کند. برای انجام این امر، حساسه‌های سرعت و مکان، به وسیله الگوریتم کنترل، که گشتاورهای لازم برای کاراندازها را محاسبه می‌کند، کنترل می‌شوند (شکل ۱-۱۲ را ببینید).

در فصل ۹، الگوریتمهای کنترل را که ترکیب (ستتر) آنها بر تقریبهای خطی دینامیک بازوی مکانیکی ماهر مبتنی است، بررسی خواهیم کرد. این روشهای خطی، در صنعت امروز بسیار متداول‌اند.



شکل ۱-۱۲ داشتن بازوی مکانیکی ماهر به پیمودن مسیری مطلوب، برعهده سیستم کنترل مکان است. چنین سیستمی با استفاده از پسخوراند حساسه‌های مفصل، بازوی مکانیکی ماهر را در مسیر تعیین شده نگه می‌دارد.

## کنترل غیر خطی مکان

اگر چه سیستمهای کنترل مبتنی بر مدل‌های خطی تقریبی، در روباتهای صنعتی امروز معمول‌اند، ولی در ترکیب الگوریتمهای کنترل، لازم است دینامیک غیرخطی بازوهای مکانیکی ماهر به‌طور کامل بررسی شود. بعضی از روباتهای صنعتی که در حال حاضر عرضه می‌شوند، در کنترل‌کننده‌های خود از الگوریتمهای کنترل غیرخطی استفاده می‌کنند. این روشهای غیرخطی کنترل بازوی مکانیکی ماهر، نسبت به روشهای ساده خطی، عملکرد بهتری دارند. در فصل ۱۰ سیستمهای کنترل غیرخطی بازوهای مکانیکی ماهر، معرفی خواهند شد.

## کنترل نیرو

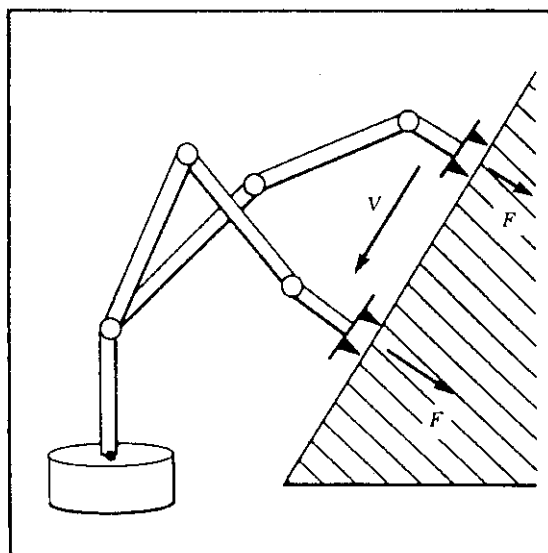
به‌نظر می‌رسد در کاربرد بازوهای مکانیکی ماهر در مسائل واقعی، توانایی بازو در کنترل نیروهای تماسی به هنگام تماس آن با ابزارها یا سطوح کار، اهمیت بسیار دارد. کنترل نیرو مکمل کنترل مکان است، به‌طوری که در هر کاربرد معین، یکی از آنها را به‌کار می‌بریم. به هنگام حرکت بازوی مکانیکی ماهر در فضای آزاد، تنها کنترل مکان مفهوم خواهد داشت، زیرا سطحی برای ایجاد نیروی واکنش در جهت مخالف، وجود ندارد. اما هنگامی که بازوی مکانیکی ماهر برای انجام کار مورد نظر با سطحی صلب تماس می‌یابد، ممکن است استفاده از کنترل مکان باعث ایجاد نیروهای بیش از اندازه در محل تماس، و یا قطع تماس بازو با سطح شود. از آنجا که بازوهای مکانیکی ماهر به‌ندرت در کلیه جهات و به‌طور هم‌زمان به‌وسیله سطوح واکنشی محدود می‌شوند، استفاده از کنترل ترکیبی یا هیبرید، که در آن برخی جهتها به‌وسیله قانون کنترل مکان، و جهتهای باقیمانده به‌وسیله قانون کنترل نیرو کنترل می‌شوند، ضروری است (شکل ۱-۱۳ را ببینید). در فصل ۱۱ روشی برای به‌کار بردن چنین طرح کنترل نیرویی، ارائه خواهد شد.

## برنامه‌ریزی روباتها

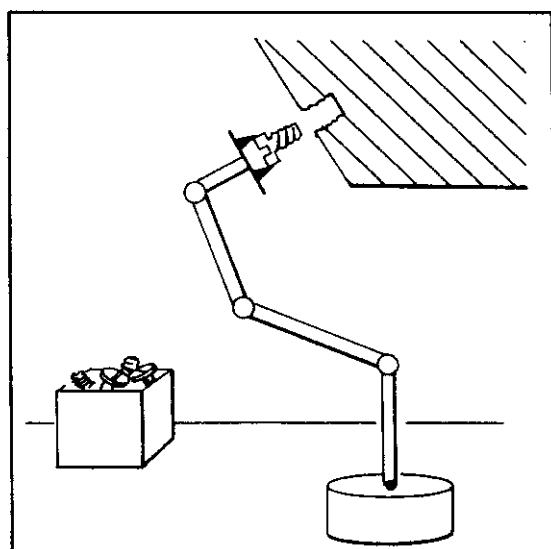
زبان برنامه‌ریزی روبات، وسیله ارتباط (فصل مشترک) بین استفاده‌کننده و روبات صنعتی است. در این بحث، پرسشهایی اساسی مطرح می‌شود: چگونه برنامه‌ریز حرکات فضایی را به آسانی توصیف می‌کند؟ چگونه می‌توان چند بازوی مکانیکی ماهر را برنامه‌ریزی کرد تا به موازات یکدیگر کار کنند؟ چگونه در یک زبان برنامه‌ریزی، می‌توان اعمالی را که بر پایه کار «حساسه‌ها» انجام می‌شوند، تشریح نمود؟

بازوهای مکانیکی ماهر روباتها، به‌دلیل انعطاف‌پذیر (برنامه‌پذیر) بودن، از اتوماسیون ثابت متمایز می‌شوند. بازوهای مکانیکی ماهر، علاوه بر داشتن حرکات برنامه‌پذیر، می‌توانند با استفاده از حساسه‌ها و سیستمهای ارتباطی با سایر قسمتهای اتوماتیک کارخانه، خود را با تغییراتی که با پیشرفت کار ایجاد می‌شود، منطبق سازند (شکل ۱-۱۴ را ببینید).

با هر چه گسترده‌تر شدن کاربرد بازوهای مکانیکی ماهر و سایر انواع اتوماسیون قابل برنامه‌ریزی در کارهای صنعتی، ارتباط بین استفاده‌کننده و روبات از لحاظ پیچیدگی اهمیت بیشتری می‌یابد.



شکل ۱-۱۳ برای آنکه بازوی مکانیکی ماهر روی یک سطح بلغزد و در ضمن به آن نیروی ثابتی اعمال کند، باید از سیستم کنترل مکان-نیروی ترکیبی استفاده شود.



شکل ۱-۱۴ حرکات مطلوب بازوی مکانیکی ماهر و مجری نهایی، نیروهای تماسی مطلوب، و استراتژیهای حرکتی پیچیده، به زبان برنامه‌ریزی روبات توصیف می‌شوند.

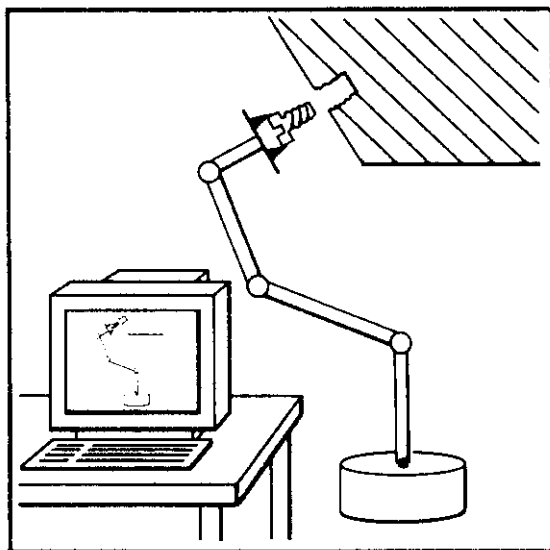


مسئله برنامه‌ریزی بازوهای مکانیکی ماهر، کلیه موضوعات برنامه‌ریزی کامپیوتری «سنتی» را در برمی‌گیرد، و به همین دلیل، خود موضوعی گسترده است. همچنین، برخی از ویژگیهای خاص در مسئله برنامه‌ریزی بازوهای مکانیکی ماهر، مسائل جدیدی را مطرح می‌سازد. برخی از این عناوین، در فصل ۱۲ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

### برنامه‌ریزی خارج خط و شبیه‌سازی

سیستم برنامه‌ریزی خارج خط، سیستمی است که معمولاً به وسیله گرافیک کامپیوتری تا جایی گسترش یافته است، که به وسیله آن می‌توان برنامه‌های روبات را بدون نیاز به دسترسی به خود روبات، نوشت. در دفاع از این سیستم، می‌توان گفت که در سیستم برنامه‌ریزی خارج خط، به هنگام برنامه‌ریزی، دسترسی به عامل تولید (یعنی روبات) لزومی ندارد، و به همین دلیل زمان تولید مفید در کارخانه‌های خودکار، بالاتر خواهد بود (شکل ۱-۱۵ را ببینید).

از سیستمهای برنامه‌ریزی خارج خط، همچنین به منزله ابزاری طبیعی برای مربوط کردن بانکهای اطلاعاتی CAD، که در مرحله طراحی محصول به کار می‌روند، به ساخت واقعی آن محصول، استفاده می‌شود. در برخی موارد، با استفاده مستقیم از داده‌های CAD، زمان لازم برای برنامه‌ریزی فرایند ساخت بسیار کاهش می‌یابد. در فصل ۱۳، مبانی یک سیستم برنامه‌ریزی خارج خط روبات صنعتی مورد بحث قرار خواهد گرفت.



شکل ۱-۱۵ در سیستمهای برنامه‌ریزی خارج خط، معمولاً با استفاده از گرافیک کامپیوتری، برنامه‌ریزی روبات بدون دسترسی به خود آن (در حین برنامه‌ریزی) امکانپذیر است.

## ۳-۱ نمادگذاری

نمادگذاری همواره در علوم و مهندسی مسئله‌ای قابل بحث است. در این کتاب، قراردادهای زیر را به کار می‌بریم:

۱. معمولاً متغیرهایی که با حروف بزرگ نوشته می‌شوند، نشان‌دهنده بردار یا ماتریس‌اند. متغیرهای نوشته‌شده با حروف کوچک، اسکالر هستند.

۲. پیش‌زیرنویسها یا پیش‌زیرنویسها، دستگاه مختصاتی را که کمیت در آن نوشته شده است، مشخص می‌کنند. مثلاً  ${}^A P$  بردار مکانی را نشان می‌دهد که در دستگاه مختصات  $\{A\}$  نوشته شده است، و یا  ${}^A R_B$  ماتریس دورانی<sup>۱</sup> است که رابطه بین دستگاههای مختصات  $\{A\}$  و  $\{B\}$  را مشخص می‌سازد.

۳. پس‌زیرنویسها، برای نشان دادن وارون یا ترانزاده یک ماتریس به کار می‌روند، مانند:  $R^T$  و  $R^{-1}$  (این قرارداد، در سطحی گسترده مورد قبول است).

۴. پس‌زیرنویسها، تابع قاعده خاصی نیستند، اما می‌توانند برای نشان دادن مؤلفه‌های یک بردار (مثلاً  $x$ ،  $y$ ، یا  $z$ )، یا برای توصیف، مانند  $P_{\text{rot}}$  به معنای مکان پیچ، به کار روند.

۵. در این کتاب، بسیاری از توابع مثلثاتی به کار می‌آیند. برای نشان دادن کسینوس زاویه‌ای مانند  $\theta_1$ ، هر یک از صورتهای  $c_1$ ،  $c\theta_1$ ، یا  $\cos \theta_1$  به کار رفته است.

بردارها همواره به صورت ستونی در نظر گرفته می‌شوند. از این رو بردارهای سطری با علامت ترانزاده به روشنی مشخص خواهند شد.

در اینجا نکته‌ای کلی درباره نمادگذاری برداری را ذکر می‌کنیم: بسیاری از کتابهای درسی مکانیک، کمیت‌های برداری را به صورتی بسیار انتزاعی در نظر می‌گیرند و در معادلات از بردارهایی استفاده می‌کنند که نسبت به دستگاههای مختصات گوناگون تعریف شده‌اند. روشترین مثال در این مورد، جمع بردارهایی است که در دستگاههای مختصات مختلف نوشته شده‌اند. غالباً این امر، کار را بسیار ساده می‌کند و، به ایجاد فرمولهای خلاصه با ظاهری مناسب، منتهی می‌شود. مثلاً، در مجموعه زنجیره‌ای چهار عضو صلب متصل به یکدیگر (مانند رابطهای یک بازوی مکانیکی ماهر)، سرعت زاویه‌ای  $\omega_4$ ، یعنی سرعت زاویه‌ای آخرین عضو این مجموعه نسبت به پایه ثابت زنجیره، را در نظر می‌گیریم. از آنجا که سرعت‌های زاویه‌ای به صورت برداری با یکدیگر جمع می‌شوند، می‌توانیم برای سرعت زاویه‌ای رابط انتهایی، معادله برداری بسیار ساده‌ای بنویسیم

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \quad (1-1)$$

اما در صورتی که این کمیتها نسبت به دستگاهی مشترک بیان نشده باشند، نمی‌توان آنها را جمع کرد. به همین دلیل، معادله (۱-۱) در پشت ظاهر ساده خود، محاسباتی طولانی دارد. در

۱. این اصطلاح در فصل ۲ تعریف می‌شود.

حالت خاصی مانند مطالعه بازوهای مکانیکی ماهر، عبارتهایی نظیر معادله (۱-۱)، عمل ثبت دستگاههای مختصات را انجام نمی‌دهند، در حالی که عملاً باید همین کار را انجام دهیم. بنابراین برای نمادگذاری بردارها، اطلاعات مربوط به دستگاه مختصات مرجع آنها را ذکر می‌کنیم و بردارها را، تنها در صورتی که در یک دستگاه مختصات نوشته شده باشند، با یکدیگر جمع خواهیم کرد. بدین ترتیب، روابطی به‌دست خواهند آمد که در آنها هم مسئله ثبت رابطه‌های ریاضی حل شده است، و هم می‌توان آنها را مستقیماً در محاسبات عددی واقعی به‌کار برد.

## مراجع

- [1] B. Roth, "Principles of Automation," Future Directions in Manufacturing Technology, Based on the Unilever Research and Engineering Division Symposium held at Port Sunlight, April 1983, Published by Unilever Research, UK.
- [2] R. Ayres, "Impact on Employment," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, 1988.
- [3] D. Smith and P. Heytler, "Industrial Robots Forecast and Trends," Delphi Study, 2nd edition, Society of Manufacturing Engineers, Dearborn, Mich., 1985.

## کتابهای مرجع عمومی

- [4] R. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, 1981.
- [5] M. Brady et al., *Robot Motion*, MIT Press, 1983.
- [6] G. Beni and S. Hachiwood, Editors, *Recent Advances in Robotics*, Wiley, 1985.
- [7] R. Dorf, *Robotics and Automated Manufacturing*, Reston, 1983.
- [8] A. Critchlow, *Introduction to Robotics*, Macmillan, 1985.
- [9] W. Synder, *Industrial Robots: Computer Interfacing and Control*, Prentice-Hall, 1985.
- [10] Y. Koren, *Robotics for Engineers*, McGraw Hill, 1985.

- [11] V. Hunt, *Industrial Robotics Handbook*, Industrial Press, 1983.
- [12] J. Engelberger, *Robots in Practice*, AMACOM, 1980.
- [13] W. Wolovich, *Robotics: Basic Analysis and Design*, Holt, Rinehart, and Winston, 1987.
- [14] K. Fu, R. Gonzalez and C.S.G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*, McGraw-Hill, 1987.
- [15] H. Asada and J.J. Slotine, *Robot Analysis and Control*, Wiley, 1986.

#### مجله‌ها و نشریه‌های مرجع عمومی

- [16] *Robotics Today*.
- [17] *Robotics World*.
- [18] *The Industrial Robot*.
- [19] *IEEE Transactions on Robotics and Automation*.
- [20] *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics*.
- [21] *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [22] *International Journal of Robotics Research*. (MIT Press)
- [23] *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*.
- [24] *International Journal of Robotics & Automation*. (IASTED)
- [25] *The Robotics Review*. (MIT Press)

#### تمرینها

- ۱-۱ [۲۰] شرحی از رویدادهای مهم در تاریخ تکامل روباتهای صنعتی در طول ۳۰ سال گذشته تهیه کنید. مراجع را ببینید.
- ۲-۱ [۲۰] نموداری تهیه کنید که نشان‌دهنده کاربردهای عمده روباتهای صنعتی (مانند جوشکاری نقطه‌ای، مونتاژ و غیره) و درصد روباتهای مورد استفاده در هر یک از زمینه‌های کاربرد در حال حاضر باشد. نمودار باید مانند نمودار شکل ۲-۱ باشد، اما اعداد آن، جدیدترین آمار را به دست دهند. مراجع را ببینید.

## تمرینها ۱۹

- ۳-۱ [۲۰] نموداری برای نمایش فروشندگان اصلی روباتهای صنعتی و بخش فروش آنها در آمریکا و سایر نقاط جهان، تهیه کنید. مراجع را ببینید.
- ۴-۱ [۱۰] در یک یا دو جمله سینماتیک، فضای کاری، و مسیر را تعریف کنید.
- ۵-۱ [۱۰] در یک یا دو جمله، چهار چوب، درجه آزادی، و کنترل مکان را تعریف کنید.
- ۶-۱ [۱۰] در یک یا دو جمله، کنترل نیرو و زبان برنامه ریزی روبات را تعریف کنید.
- ۷-۱ [۲۰] در یک یا دو جمله سختی سازه‌ای، کنترل غیرخطی، و برنامه ریزی خارج خط را تعریف کنید.
- ۸-۱ [۱۰] نموداری برای نمایش چگونگی افزایش هزینه نیروی انسانی در ۲۰ سال گذشته تهیه کنید.
- ۹-۱ [۲۰] نموداری برای نمایش چگونگی افزایش کارایی کامپیوتر نسبت به قیمت آن در ۲۰ سال گذشته، تهیه کنید.
- ۱۰-۱ [۲۰] نموداری تهیه کنید که بزرگترین استفاده کنندگان روباتهای صنعتی (مانند صنایع هوا-فضا، خودروسازی، و ...) و درصد روباتهای به کار گرفته شده در هر صنعت را نشان دهد. نمودار باید مانند نمودار شکل ۳-۱ باشد، اما در آن جدیدترین اطلاعات به کار گرفته شود. مراجع را ببینید.

## تمرین برنامه نویسی (قسمت ۱)

خود را به کار با کامپیوتری که از آن برای حل تمرینهای برنامه نویسی در پایان هر فصل استفاده خواهید کرد، عادت دهید. از توانایی خود برای ایجاد یا ویرایش «فایلها»، و گردآوری و اجرای برنامه‌ها اطمینان حاصل کنید.



## توصیفها و تبدیلهای فضایی کلی

### ۱-۲ مقدمه

اعمال روباتی بنابر تعریف عبارت از به حرکت در آوردن قطعات و ابزارها در فضا به وسیله نوعی مکانیزم است. این امر، طبیعتاً نیاز به نمایش مکانها و جهتگیریهای قطعات، ابزار، و خود مکانیزم را مطرح می‌سازد. برای تعریف و به کارگیری کمیت‌های ریاضی که مکان و جهتگیری را نشان می‌دهند، باید دستگاههای مختصاتی تعریف، و قراردادهایی برای نمایش آنها وضع کنیم. بسیاری از مطالبی که در اینجا در زمینه مکان و جهتگیری مطرح می‌شوند، اصولی را تشکیل می‌دهند که در آینده در بحث سرعت‌های خطی و دورانی، و همچنین نیروها و گشتاورها، به کار خواهند رفت.

می‌پذیریم که در جایی یک دستگاه مختصات عام وجود دارد که هر کمیت مورد بحث را می‌توانیم نسبت به آن بسنجیم. کلیه مکانها و جهتگیریها را نسبت به این دستگاه مختصات عام، یا نسبت به دستگاه مختصات دکارتی دیگری که خود نسبت به این دستگاه عام تعریف شده (یا می‌تواند تعریف شود)، توصیف می‌کنیم.

### ۲-۲ توصیفها: مکانها، جهتگیریها، و چهارچوبها

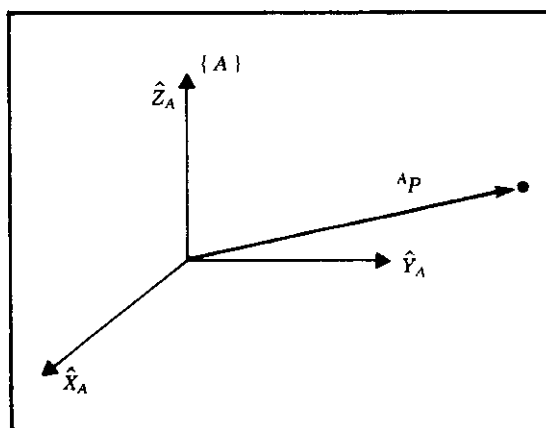
منظور از توصیف، مشخص کردن ویژگیهای اجسام مختلف مطرح شده در سیستمهای روباتی است. این اجسام می‌توانند قطعات، ابزار، و یا خود بازوی مکانیکی ماهر باشند. در این بخش، به توصیف مکان، جهتگیری، و مفهومی به نام چهارچوب، که شامل هر دوی آنهاست، می‌پردازیم.

## توصیف مکان

پس از آنکه دستگاه مختصات تعریف شد، می‌توانیم هر نقطه‌ای را نسبت به آن، در حالت کلی با یک بردار مکان  $1 \times 3$  نمایش دهیم. از آنجا که اغلب دستگاههای مختصات متعدد دیگری را علاوه بر دستگاه مختصات عام تعریف می‌کنیم، بردارها باید با نمادهایی که معرف دستگاه مربوط به آنهاست، مشخص شوند. در این کتاب، بردارها با یک پیش‌زیرنویس که نمایانگر دستگاه مختصاتی است که بردارها نسبت به آن توصیف شده‌اند، نوشته می‌شوند (مانند  $^A P$ ). این بدان معناست که مقادیر عددی مؤلفه‌های  $^A P$ ، فواصل را در راستای محوره‌های  $\{A\}$  نشان می‌دهند. هر یک از این فاصله‌ها را می‌توان تصویر بردار مورد نظر روی محور متناظر با آن، در نظر گرفت. شکل ۱-۲ دستگاه مختصات  $\{A\}$  را با سه بردار یک‌دو به‌دو عمود بر هم، نشان می‌دهد. نقطه  $^A P$  که با یک بردار نشان داده شده است، می‌تواند به‌صورت مکانی در فضا، یا به‌طور ساده، به‌صورت مجموعه‌ای مرتب از سه عدد، تصور شود. مؤلفه‌های هر بردار، با پس‌زیرنویس  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  نمایش داده می‌شوند

$$^A P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

به‌طور خلاصه، مکان هر نقطه در فضا را با بردار مکان توصیف می‌کنیم. توصیفهای دیگر مکان نقاط به‌صورت مجموعه‌های سه‌تایی (مانند مختصات کروی یا استوانه‌ای) در تمرینهای پایان فصل مورد بحث قرار خواهند گرفت.



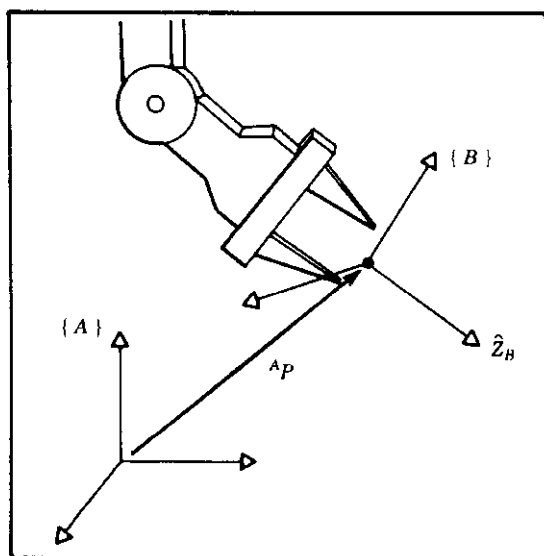
شکل ۱-۲ نمایش یک بردار نسبت به یک چهارجوب.



## توصیف جهتگیری

اغلب علاوه بر نمایش یک نقطه در فضا، به تعریف جهتگیری یک جسم در فضا نیز نیازمندیم. مثلاً، اگر بردار  $AP$  در شکل ۲-۲، نقطه‌ای بین سر انگشتان دست یک بازوی مکانیکی ماهر را نشان دهد، وضعیت کامل دست تا زمانی که جهتگیری آن مشخص نشود، قابل تعیین نخواهد بود. اگر فرض شود بازوی مکانیکی تعدادی کافی مفصل دارد<sup>۱</sup>، ممکن است در حالی که سر انگشتان در فضا از نظر مکانی ثابت‌اند، خود دست هر جهتگیری دلخواهی داشته باشد. برای توصیف جهتگیری هر جسم، دستگاه مختصاتی را به آن متصل می‌کنیم، سپس این دستگاه را نسبت به دستگاه مرجع تعریف می‌کنیم. در شکل ۲-۲، دستگاه مختصات  $\{B\}$  به‌طریقی معلوم به جسم متصل شده است. برای مشخص کردن جهتگیری جسم، کافی است دستگاه  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف کنیم.

بدین ترتیب، مکان نقاط با بردارها، و جهتگیری اجسام با دستگاه مختصات متصل به آنها، توصیف می‌شود. یکی از روشهای توصیف دستگاه مختصات  $\{B\}$  متصل به جسم، نوشتن



شکل ۲-۲ تعیین مکان و جهتگیری یک جسم.

۱. اینکه چه تعداد مفصل کافی است، در فصلهای ۳ و ۴ شرح داده خواهد شد.

بردارهای یک‌سه محور اصلی<sup>۱</sup> آن نسبت به دستگاه مختصات  $\{A\}$  است. ما این بردارهای یک‌سه که نشان‌دهنده جهات اصلی دستگاه مختصات  $\{B\}$  هستند، با  $\hat{X}_B$ ،  $\hat{Y}_B$  و  $\hat{Z}_B$  نشان می‌دهیم. هنگامی که این بردارها نسبت به دستگاه مختصات  $\{A\}$  نوشته شوند، با نمادهای  ${}^A\hat{X}_B$ ،  ${}^A\hat{Y}_B$  و  ${}^A\hat{Z}_B$  نمایش داده خواهند شد. ساده‌تر است اگر این سه بردار را به صورت ستونهای یک ماتریس  $3 \times 3$  (با ترتیب  ${}^A\hat{X}_B$ ،  ${}^A\hat{Y}_B$  و  ${}^A\hat{Z}_B$ ) نشان دهیم. این ماتریس را ماتریس دوران می‌نامیم. چون این ماتریس خاص، دستگاه  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف می‌کند، آن را با نماد  ${}^A_R B$  نشان خواهیم داد. چگونگی انتخاب پیش‌زیرنویسها و پیش‌زیرنویسها در تعریف ماتریسهای دوران، در بخشهای آینده روشن خواهد شد.

$${}^A_R B = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

به‌طور خلاصه، برای تعیین هر جهتگیری می‌توان از مجموعه سه بردار استفاده کرد. برای سادگی، ماتریسی  $3 \times 3$  خواهیم ساخت که ستونهایش را این سه بردار تشکیل می‌دهند. بنابراین، همان‌طور که مکان هر نقطه با یک بردار بیان می‌شود، جهتگیری هر جسم نیز با یک ماتریس مشخص خواهد شد. در بخش ۲-۸، روشهای دیگر توصیف جهتگیری را، که تنها به سه پارامتر نیازمندند، بررسی خواهیم کرد.

با توجه به اینکه مؤلفه‌های هر بردار، تصاویر آن بردار در امتدادهای یک‌سه چهارچوب مرجع آن هستند، می‌توانیم عباراتی برای اسکالرهایی  $r_{ij}$  در (۲-۲) بنویسیم. بدین ترتیب، هر مؤلفه  ${}^A_R B$  در (۲-۲) را می‌توان به صورت حاصل ضرب نقطه‌ای یک زوج از بردارهای یک‌سه، به ترتیب زیر نوشت

$${}^A_R B = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

برای ساده‌نویسی، در ماتریس سمت راست از نوشتن پیش‌زیرنویس خودداری کرده‌ایم. در واقع اگر زوج بردارهای یک‌سه‌ای که در هم ضرب می‌شوند، در یک دستگاه مختصات نوشته شده باشند، انتخاب دستگاه مختصات به دلخواه صورت خواهد گرفت. از آنجا که حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار یک‌سه، کسینوس زاویه بین آنها را به دست می‌دهد، مؤلفه‌های ماتریس دوران را کسینوسهای هادی می‌نامند.

بررسی بیشتر معادله (۳-۲) نشان می‌دهد که سطرهای ماتریس، بردارهای یک‌سه  $\{A\}$  در

۱. گاهی ساده‌تر است از سه محور استفاده شود، اگر چه تنها دو بردار نیز کافی خواهد بود (زیرا هر بردار را می‌توان از ضرب خارجی دو بردار دیگر به دست آورد).

دستگاه مختصات  $\{B\}$  هستند، یعنی

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (۴-۲)$$

بنابراین، توصیف دستگاه مختصات  $\{A\}$  نسبت به  $\{B\}$  به وسیلهٔ ترانزادهٔ (۳-۲) صورت می‌گیرد

$${}^B_A R = {}^A_B R^T \quad (۵-۲)$$

این رابطه نشان می‌دهد که وارون هر ماتریس دوران با ترانزادهٔ آن برابر است. این واقعیت را می‌توان به سادگی به صورت زیر اثبات کرد

$${}^A_B R^T {}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B^T \\ {}^A\hat{Y}_B^T \\ {}^A\hat{Z}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = I_r \quad (۶-۲)$$

در رابطه بالا،  $I_r$  ماتریس یکهٔ  $3 \times 3$  است. در نتیجه

$${}^A_B R = {}^B_A R^{-1} = {}^B_A R^T \quad (۷-۲)$$

از جبر خطی [۱] نیز می‌دانیم که وارون هر ماتریس با ستونهای متعامد، برابر با ترانزادهٔ آن است. در اینجا این مطلب را به طور هندسی نشان داده‌ایم.

### توصیف چهارچوب

اطلاعات مورد نیاز برای مشخص کردن کامل وضعیت دست مکانیکی در شکل ۲-۲ عبارت‌اند از یک مکان و یک جهتگیری. نقطه‌ای از جسم را که مکان آن باید تعیین شود، به دلخواه اختیار می‌کنیم، اما برای سادگی می‌توان آن را منطبق بر مبدأ چهارچوب متصل به جسم در نظر گرفت. در روباتیک، اغلب مکان و جهتگیری باهم به کار می‌روند، و به همین دلیل مفهومی به نام چهارچوب که مجموعه‌ای است از چهار بردار نشان‌دهندهٔ مکان و جهتگیری، را تعریف می‌کنیم. مثلاً، در شکل ۲-۲ از یک بردار برای نمایش مکان نوک انگشت، و از سه بردار دیگر برای توصیف جهتگیری آن، استفاده شده است. به همین ترتیب، توصیف هر چهارچوب را می‌توان به صورت یک بردار مکان و یک ماتریس دوران در نظر گرفت. چهارچوب، در واقع یک دستگاه مختصات است که در آن علاوه بر جهتگیری، یک بردار مکان نیز که مبدأ این دستگاه را نسبت به دستگاه دیگری مشخص می‌کند، نشان داده می‌شود. مثلاً، چهارچوب  $\{B\}$  به وسیلهٔ  ${}^A_B R$  و  ${}^A P_{BORG}$  توصیف می‌شود.

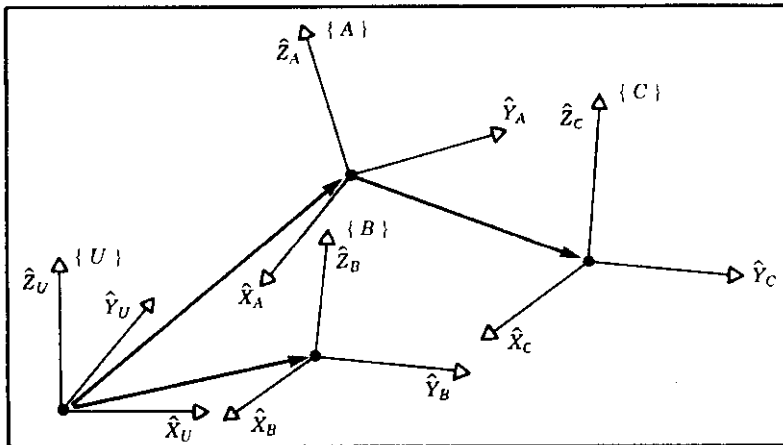
که در آن  ${}^A P_{BORG}$  بردار نشان دهنده مبدأ چهارچوب  $\{B\}$  است:

$$\{B\} = \{{}_B^A R, {}^A P_{BORG}\} \quad (A-2)$$

در شکل ۲-۳، علاوه بر دستگاه مختصات عام، سه چهارچوب دیگر نیز نشان داده شده است. چهارچوبهای  $\{A\}$  و  $\{B\}$  نسبت به دستگاه مختصات عام، و چهارچوب  $\{C\}$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  مشخص شده است.

در شکل ۲-۳ نمایشی گرافیکی از چهارچوبها، که برای تجسم آنها مناسب است، ارائه شده است. هر چهارچوب با سه بردار یکه، که محورهای اصلی آن را تشکیل می دهند، نمایش داده می شود. یک بردار نیز از مبدأ هر چهارچوب به مبدأ چهارچوب دیگر رسم می شود. این بردار، مکان مبدأ چهارچوبی را که در انتهای بردار قرار دارد، نسبت به چهارچوبی که در مبدأ واقع است، نشان می دهد. جهت این بردار در شکل ۲-۳ نشان می دهد که مثلاً چهارچوب  $\{C\}$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  مشخص شده است و نه برعکس.

به طور خلاصه، از هر چهارچوب می توان برای توصیف یک دستگاه مختصات نسبت به دستگاه مختصات دیگر استفاده کرد. چهارچوب به منظور نمایش یکجای مکان و جهتگیری به کار می رود، و می توان آن را به صورت تعمیم یافته این دو مشخصه در نظر گرفت. مکانها را می توان به وسیله چهارچوبی که قسمت ماتریس دورانی آن ماتریس یکه است و قسمت بردار مکان آن نقطه مورد بررسی را توصیف می کند، نشان داد. به همین ترتیب، جهتگیری را می توان با چهارچوبی که بردار مکان آن بردار صفر است، مشخص کرد.



شکل ۲-۳ نمونه ای از چهارچوبهای متعدد.

## ۳-۲ نگاشتها: تغییر دادن توصیفها از چهارچوبی به چهارچوب دیگر

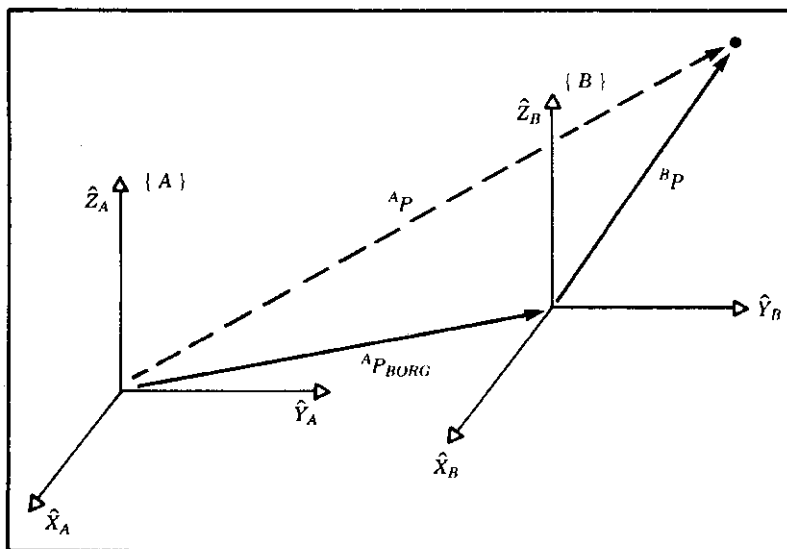
در بسیاری از مسائل روباتیک، با تعریف یک کمیت در دستگاههای مختصات مختلف روبه‌رو هستیم. در بخش قبل مکان، جهتگیری، و چهارچوب را توصیف کردیم، و در اینجا به بحث پیرامون ریاضیات نگاشت برای انتقال کمیتها از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر خواهیم پرداخت.

### نگاشت شامل چهارچوبهای انتقال یافته

در شکل ۲-۴، مکانی را با بردار  ${}^B P$  تعریف کرده‌ایم. می‌خواهیم این نقطه را در فضا نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  تعریف کنیم؛ فرض می‌شود چهارچوب  $\{A\}$  جهتگیری یکسان با  $\{B\}$  دارد. در چنین حالتی، اختلاف  $\{A\}$  و  $\{B\}$  تنها در یک انتقال است که با  ${}^A P_{BORG}$  (برداری که مکان مبدأ  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  تعیین می‌کند)، قابل بیان خواهد بود. چون هر دو بردار در چهارچوبهایی که جهتگیریهای یکسان دارند، تعریف می‌شوند، می‌توان مکان نقطه  $P$  نسبت به  $\{A\}$ ، یعنی  ${}^A P$  را با جمع برداری به‌دست آورد

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG} \quad (۲-۹)$$

توجه داشته باشید که تنها در حالت خاص چهارچوبهای دارای جهتگیری یکسان است که مجاز



شکل ۲-۴ نگاشت انتقالی.

به جمع بردارهای تعریف شده در چهارچوبهای مختلف هستیم. در این مثال ساده، نگاشت یک بردار را از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر نشان دادیم. ایده نگاشت یا تغییر توصیف کمیتها از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر، اهمیت بسیار دارد. خود کمیت (در اینجا نقطه‌ای در فضا) تغییر نمی‌کند، و تنها توصیف آن دگرگون می‌شود. این مطلب، در شکل ۲-۴ نشان داده شده است. به‌طوری‌که دیده می‌شود، مکان نقطه‌ای که با  ${}^B P$  توصیف می‌شود، انتقال نمی‌یابد. در عوض توصیف جدیدی برای آن نقطه، این بار نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  به‌دست می‌آید.

می‌گوییم بردار  ${}^A P_{BORG}$  این نگاشت را به‌طور کامل تعریف می‌کند، زیرا کلیه اطلاعات مورد نیاز برای تغییر توصیف را در بر دارد (با فرض اینکه جهتگیری چهارچوبها یکسان است).

### نگاشت شامل چهارچوبهای دوران یافته

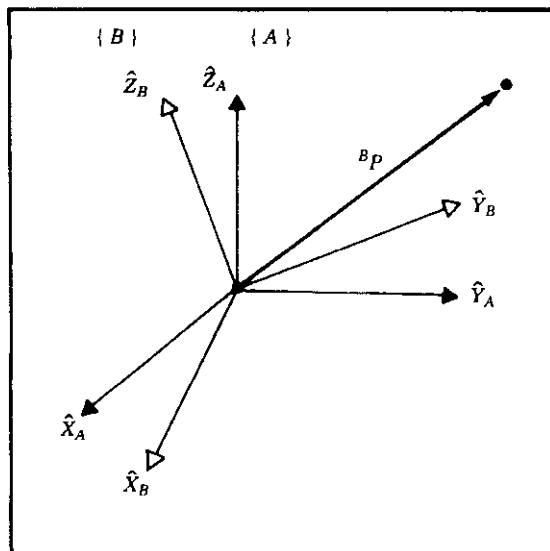
در بخش ۲-۲، روش توصیف یک جهتگیری را با سه بردار یکه نشان‌دهنده محوره‌های اصلی دستگاه مختصات متصل به جسم معرفی کردیم. برای سادگی این سه بردار یکه را در کنار یکدیگر به‌صورت یک ماتریس  $3 \times 3$  در نظر گرفتیم و این ماتریس را ماتریس دوران نامیدیم. اگر این ماتریس دوران، چهارچوب  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف کند، آن را با نماد  ${}^A R_B$  نشان می‌دهیم. توجه کنید که بنابر تعریف ما، همه ستونهای هر ماتریس دوران اندازه واحد دارند، و همچنین این بردارهای یکه، متعامدند. چنانکه اندکی پیش دیدیم، از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که

$${}^A R = {}^B R^{-1} = {}^B R^T \quad (۱۰-۲)$$

بنابراین، چون ستونهای  ${}^A R_B$  بردارهای یکه  $\{B\}$ ، نوشته شده در دستگاه  $\{A\}$  هستند، سطرای  ${}^A R_B$  بردارهای یکه  $\{A\}$  خواهند بود که نسبت به دستگاه  $\{B\}$  نوشته شده‌اند. پس هر ماتریس دوران را می‌توان به‌وسیله مجموعه‌ای از سه بردار ستونی و یا مجموعه‌ای از سه بردار سطری به‌صورت زیر نمایش داد

$${}^A R = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \hat{X}_A^T \\ {}^B \hat{Y}_A^T \\ {}^B \hat{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (۱۱-۲)$$

چنانکه در شکل ۲-۵ دیده می‌شود، اغلب تعریف یک بردار را نسبت به چهارچوبی مانند  $\{B\}$  می‌دانیم، و مایلیم تعریف آن را نسبت به چهارچوب دیگری مانند  $\{A\}$ ، که مبدأ آن بر مبدأ  $\{B\}$  منطبق است، به‌دست آوریم. اگر توصیف جهتگیری  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  معین باشد، این محاسبه امکانپذیر است. این جهتگیری، به‌وسیله ماتریس دوران  ${}^A R_B$  که ستونهایش را بردارهای یکه  $\{B\}$ ، نوشته شده نسبت به  $\{A\}$  تشکیل می‌دهند، تعیین می‌شود.



شکل ۵-۲ دوران دادن توصیف یک بردار.

برای محاسبه  ${}^A P$ ، باید توجه داشته باشیم که مؤلفه‌های هر بردار، در حقیقت تصاویر آن بردار روی امتدادهای یک چهارچوب آن بردار هستند. تصویر هر بردار، از ضرب نقطه‌ای (عددی) بردار، قابل محاسبه است. بدین ترتیب، مؤلفه‌های  ${}^A P$  چنین به دست خواهند آمد

$$\begin{aligned} {}^A p_x &= {}^B \hat{X}_A \cdot {}^B P \\ {}^A p_y &= {}^B \hat{Y}_A \cdot {}^B P \\ {}^A p_z &= {}^B \hat{Z}_A \cdot {}^B P \end{aligned} \quad (۱۲-۲)$$

برای بیان رابطه (۱۲-۲) به صورت حاصل ضرب ماتریس دوران، از رابطه (۱۱-۲) در می‌یابیم که سطرهای  ${}^A_B R$  عبارت‌اند از  ${}^B \hat{X}_A$ ،  ${}^B \hat{Y}_A$ ، و  ${}^B \hat{Z}_A$ . بنابراین رابطه (۱۲-۲) را می‌توان به وسیله یک ماتریس دوران، به شکل فشرده زیر نوشت

$${}^A P = {}^A_B R \cdot {}^B P \quad (۱۳-۲)$$

معادله (۱۳-۲) نگاشتی را نشان می‌دهد که بردار  ${}^B P$  (بر داری که نقطه‌ای در فضا را نسبت به چهارچوب  $\{B\}$  توصیف می‌کند) را بر بردار  ${}^A P$  که توصیف همان نقطه در چهارچوب  $\{A\}$  است، می‌نگارد.

چنانکه دیده می‌شود، این روش نمایش و نمادگذاری، کمک بزرگی در مطالعه و ردیابی نگاشتها

و چهارچوبهای مرجع است. یکی از مزایای این روش نمادگذاری، آن است که در روابط ریاضی، پیش‌زیرنویسهای یک کمیت، با پیش‌زیرنویسهای کمیت بعد از آن، حذف می‌شوند. برای مثال، پیشوندهای  $B$  را در معادله (۱۳-۲) در نظر بگیرید.

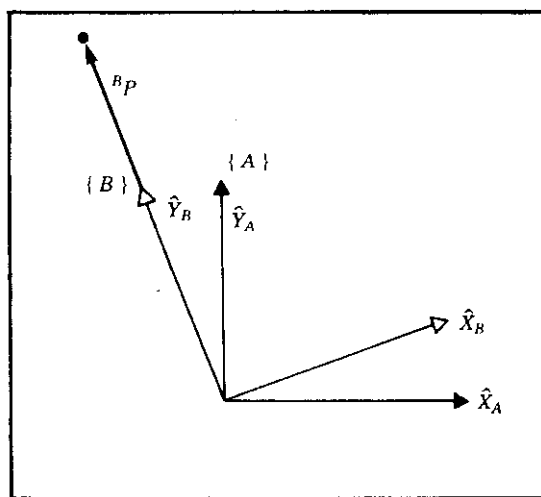
■ مثال ۱-۲

شکل ۲-۶ چهارچوب  $\{B\}$  را که نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  به اندازه  $30^\circ$  درجه حول محور  $\hat{Z}$  دوران یافته است، نشان می‌دهد. در اینجا جهت  $\hat{Z}$  به سمت خارج از صفحه کاغذ است. با نوشتن بردارهای یکه  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$ ، و دسته‌بندی آنها به صورت ستونهای یک ماتریس دوران، خواهیم داشت

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (14-2)$$

با داشتن بردار  ${}^B P$  به صورت زیر

$${}^B P = \begin{bmatrix} 0.1^\circ \\ 2.0^\circ \\ 0.1^\circ \end{bmatrix} \quad (15-2)$$



شکل ۲-۶ چهارچوب  $\{B\}$  به اندازه  $30^\circ$  درجه حول  $\hat{Z}$  چرخیده است.



نگاشتها: تغییر دادن توصیفها از چهارچوبی به چهارچوب دیگر ۳۱

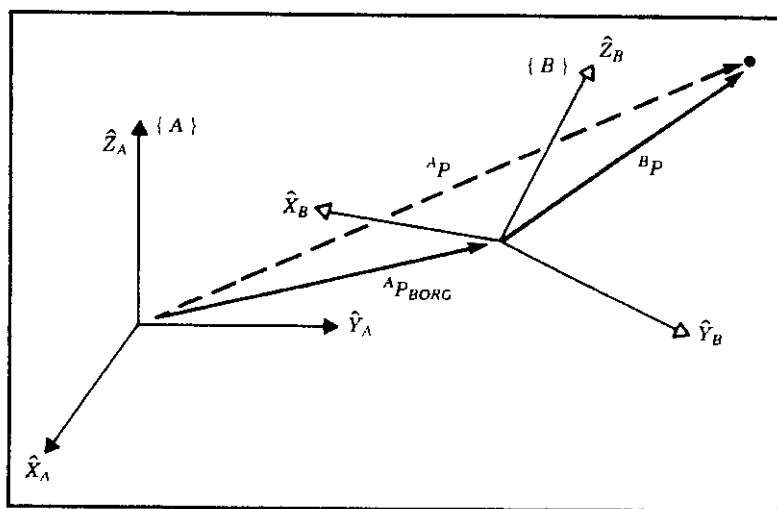
می‌توانیم بردار  ${}^A P$  را چنین محاسبه کنیم

$${}^A P = {}^A_B R {}^B P = \begin{bmatrix} -۱/۰۰۰ \\ ۱/۷۳۲ \\ ۰/۰۰۰ \end{bmatrix} \quad (۱۶-۲)$$

در اینجا  ${}^A_B R$  به صورت نگاشتی عمل می‌کند که برای توصیف  ${}^B P$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$ ، یعنی بردار  ${}^A P$ ، به کار رفته است. چنانکه در مورد انتقالها گفته شد، باید دانست که از دیدگاه نگاشت، بردار اصلی  $P$  در فضا تغییری نمی‌کند، و تنها توصیف جدیدی از آن در چهارچوبی دیگر به دست می‌آید.

### نگاشت شامل چهارچوبهای کلی (عمومی)

اغلب توصیف یک بردار را نسبت به چهارچوبی مانند  $\{B\}$  در دست داریم، و می‌خواهیم توصیف آن را نسبت به چهارچوب دیگری چون  $\{A\}$  به دست آوریم. در اینجا حالت کلی نگاشت را در نظر می‌گیریم که در آن مبدأ چهارچوب  $\{B\}$  بر مبدأ چهارچوب  $\{A\}$  منطبق نیست، و این عدم انطباق به وسیله برداری مشخص می‌شود. بردار نشان‌دهنده مبدأ  $\{B\}$  را با  ${}^A P_{BORG}$ ، و دوران  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  را با  ${}^A_B R$  نشان می‌دهیم. با در دست داشتن  ${}^B P$ ، می‌خواهیم  ${}^A P$  را مانند شکل ۷-۲ محاسبه کنیم.



شکل ۷-۲ تبدیل کلی (عمومی) یک بردار.

ابتدا می‌توانیم  ${}^B P$  را نسبت به چهارچوب سومی، که جهتگیری آن با جهتگیری  $\{A\}$  یکسان، اما مبدأ آن بر مبدأ  $\{B\}$  منطبق است، توصیف کنیم. این عمل، چنانکه در بخش ۲-۳ دیدیم، با پیش‌ضرب (ضرب از سمت چپ) در  ${}^A R_B$  انجام می‌شود. پس از آن، انتقال بین دو مبدأ مختصات را، چنانکه در بخش ۲-۳ دیدیم، با جمع‌برداری و به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P + {}^A P_{BORG} \quad (۱۷-۲)$$

معادله (۱۷-۲)، نگاشت کلی به‌کار رفته در تبدیل توصیف یک بردار از چهارچوبی به چهارچوب دیگر را نشان می‌دهد. توجه کنید که در نمادگذاری رابطه (۱۷-۲)، کلیه  $B$ ها حذف می‌شوند، و کلیه بردارها نسبت به  $\{A\}$  به‌دست می‌آیند، که سپس می‌توان آنها را با یکدیگر جمع کرد. اما شکل معادله (۱۷-۲) چندان جالب نیست، و به همین دلیل، آن را به‌صورت زیر خواهیم نوشت

$${}^A P = {}^A T_B {}^B P \quad (۱۸-۲)$$

به عبارت دیگر، می‌خواهیم عمل نگاشت از چهارچوبی به چهارچوب دیگر را به شکل یک عملگر ماتریسی تصور کنیم. معادله (۱۸-۲) در مقایسه با معادله (۱۷-۲) مختصرتر و روشنتر است. برای آنکه بتوانیم معادله (۱۷-۲) را به شکل عملگر ماتریسی پیشنهاد شده در رابطه (۱۸-۲) بنویسیم، یک عملگر ماتریسی  $4 \times 4$  را تعریف کرده، از بردارهای مکان  $4 \times 1$  استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب، رابطه (۱۸-۲) به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_{BORG} \\ \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۱۹-۲)$$

که در آن:

۱. عدد «۱» به عنوان آخرین مؤلفه بردارهای  $4 \times 1$  اضافه شده است.
  ۲. سطر « $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ » به عنوان آخرین سطر ماتریس  $4 \times 4$  اضافه شده است.
- حال این قرارداد را می‌پذیریم که هر بردار مکان، بر حسب آنکه در یک ماتریس  $3 \times 3$  یا  $4 \times 4$  ضرب شود، می‌تواند  $1 \times 3$  یا  $1 \times 4$  باشد. پس از رابطه (۱۹-۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} {}^A P &= {}^A R_B {}^B P + {}^A P_{BORG} \\ 1 &= 1 \end{aligned} \quad (۲۰-۲)$$

نگاشتها: تغییر دادن توصیفها از چهارچوبی به چهارچوب دیگر ۳۳

ماتریس  $4 \times 4$  در معادله (۲-۱۹) تبدیل همگن خوانده می‌شود، و برای مقاصد ما می‌تواند به منزله ماتریسی کلی که هم دوران، و هم انتقال یک تبدیل کلی را در بر می‌گیرد، در نظر گرفته شود. در دیگر زمینه‌های مطالعاتی، این ماتریس را می‌توان برای محاسبهٔ تجسم فضایی اجسام (پرسپکتیو) و عملیات مقیاس‌گذاری (زمانی که سطر آخر برابر با  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ )، یا ماتریس دوران «متعامد» نیست) به کار برد [۲].

غالباً معادله‌هایی مانند (۲-۱۸) را بدون هر گونه نمادی که معرف همگن بودن آن است، می‌نویسیم. توجه کنید که اگر چه تبدیلهای همگن برای نوشتن معادلات به صورت فشرده مناسب‌اند، اما معمولاً در برنامهٔ کامپیوتری به کار برده نمی‌شوند، زیرا در این صورت برای ضرب کردن صفرها و یکها وقت بسیار به هدر خواهد رفت. بنابراین، از این نوع نمایش تبدیلهای، اصولاً به منظور سهولت در ساختن این معادله‌ها در ذهن، و آوردن آنها روی کاغذ استفاده می‌شود.

درست همان‌گونه که از ماتریسهای دوران برای مشخص کردن جهتگیری استفاده کردیم، می‌توانیم تبدیلهای (معمولاً همگن) را برای نشان دادن چهارچوب به کار ببریم. توجه کنید که اگر چه پیش از این تبدیلهای همگن را در زمینهٔ نگاشتها معرفی کردیم، اما آنها را برای توصیف چهارچوبها نیز به کار خواهیم برد. توصیف چهارچوب  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  به صورت  ${}^A_B T$  نشان داده خواهد شد.

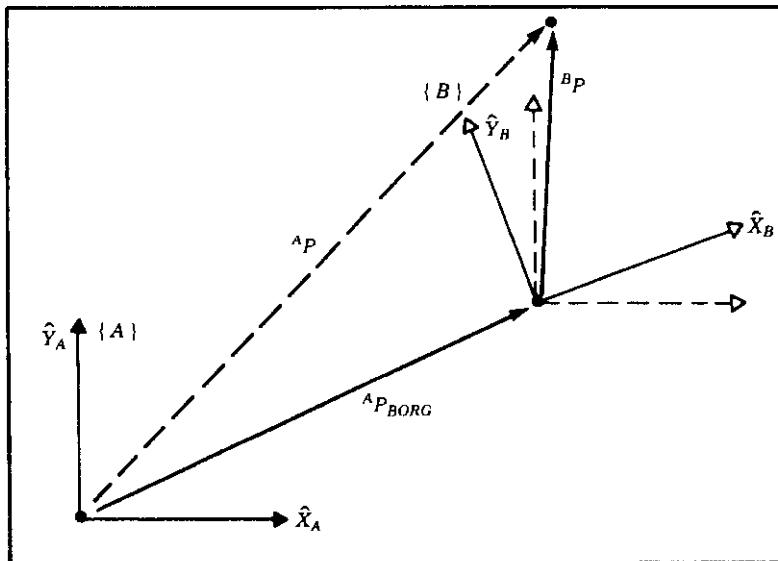
## ■ مثال ۲-۲

شکل ۲-۸ چهارچوب  $\{B\}$  را که نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  به اندازهٔ  $30^\circ$  درجه حول محور  $\hat{Z}$  دوران کرده، و به اندازهٔ  $10^\circ$  واحد در راستای  $\hat{X}_A$  و  $5^\circ$  واحد در راستای  $\hat{Y}_A$  انتقال یافته است، نشان می‌دهد. مطلوب است محاسبهٔ  ${}^A P$ ، در صورتی که  ${}^B P = [3, 7, 0, 1]^T$  تعریف چهارچوب  $\{B\}$  چنین است

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,100 & 10,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,100 & 5,0 \\ 0,100 & 0,100 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

با داشتن بردار  ${}^B P$  به شکل زیر

$${}^B P = \begin{bmatrix} 3,0 \\ 7,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$



شکل ۲-۸ چهارچوب انتقال و دوران یافته {B}.

از تعریف {B} به صورت یک تبدیل استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$${}^A P = {}_B^A T {}^B P = \begin{bmatrix} 9,098 \\ 12,562 \\ 0,000 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

■

## ۴-۲ عملگرها: انتقالها، دورانه‌ها، و تبدیلهای کلی

همان صورتهای ریاضی به‌کار رفته برای نگاشت نقاط از چهارچوبی به چهارچوب دیگر را می‌توان به منزله عملگرهایی برای انتقال نقاط، دوران بردارها، یا هر دو نیز به‌کار گرفت. در این بخش، به تفسیر روشهای ریاضی که قبلاً پی‌ریزی کردیم، خواهیم پرداخت.

### عملگرهای انتقالی

انتقال، نقطه‌ای در فضا را در راستای برداری معین، به اندازه مسافتی محدود، حرکت می‌دهد. با استفاده از این تعبیر برای انتقال نقطه‌ای در فضا، تنها به یک دستگاه مختصات نیاز خواهیم داشت. بدین ترتیب، انتقال هر نقطه در فضا، با همان روش ریاضی به‌کار رفته برای نگاشت یک نقطه به چهارچوب ثانوی، انجام خواهد گرفت. تقریباً در همه موارد، درک تعبیر ریاضی به‌کار رفته اهمیت

بسیار دارد. تمیز دادن این تعبیرات از یکدیگر، بسیار ساده است: هنگامی که یک بردار نسبت به چهارچوب به «جلو» حرکت می‌کند، می‌توان حرکت بردار را به «جلو»، یا حرکت چهارچوب را به «عقب» در نظر گرفت. بیان ریاضی در هر دو حالت یکسان است، و تنها دید ما از این وضعیت تغییر می‌کند. شکل ۹-۲ چگونگی انتقال بردار  ${}^A P_1$ ، به وسیله بردار  ${}^A Q$ ، را نشان می‌دهد. در اینجا بردار  ${}^A Q$  اطلاعات مورد نیاز برای انجام انتقال را در بر دارد.

حاصل این عمل، بردار جدید  ${}^A P_2$  است که به صورت زیر محاسبه می‌شود

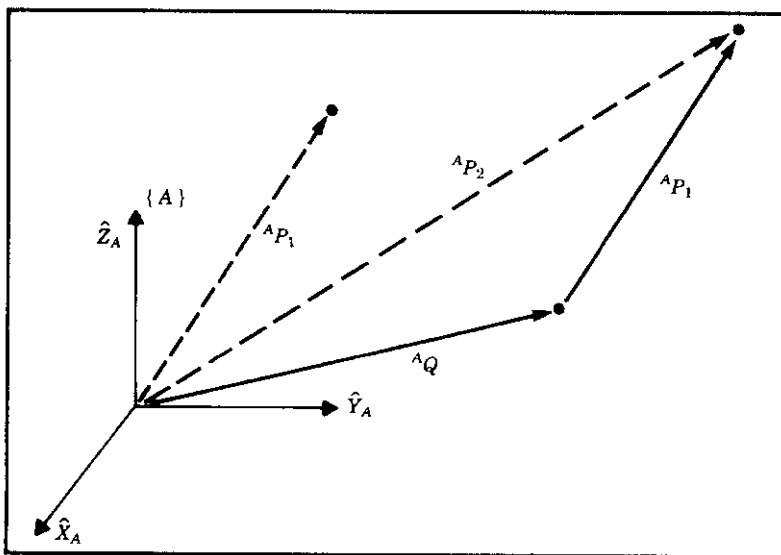
$${}^A P_2 = {}^A P_1 + {}^A Q \quad (24-2)$$

برای نوشتن این عمل انتقال به صورت عملگر ماتریسی، از نماد زیر استفاده می‌کنیم

$${}^A P_2 = D_Q(q) {}^A P_1 \quad (25-2)$$

که در آن  $q$  اندازه (با علامت مثبت یا منفی) انتقال در راستای بردار  $\hat{Q}$  است. عملگر  $D_Q$  را می‌توان به شکل ساده و خاصی از یک تبدیل همگن در نظر گرفت

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26-2)$$



شکل ۹-۲ عملگر انتقال.

که در آن،  $q_x$ ،  $q_y$ ، و  $q_z$  مؤلفه‌های بردار انتقال  $Q$  هستند و داریم

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

در معادله‌های (۹-۲) و (۲۴-۲) ریاضیات مشابهی به کار رفته است. توجه کنید که اگر در شکل ۴-۲،  ${}^B P_{AORG}$  را (به جای  ${}^A P_{BORG}$ ) تعریف کرده، در رابطه (۹-۲) قرار داده بودیم، یک تغییر علامت بین روابط (۹-۲) و (۲۴-۲) مشاهده می‌کردیم. این تغییر علامت، نمایانگر اختلاف بین حرکت بردار به «جلو» و حرکت دستگاه مختصات به «عقب» است. تعریف مکان  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  (به وسیله  ${}^A P_{BORG}$ ) سبب می‌شود که هر دو تعبیر ریاضی فوق یکسان شوند. حال که نماد  $DQ$  معرفی شده است، می‌توان آن را برای توصیف چهارچوبها، و نیز به صورت نگاشت، به کار برد.

### عملگرهای دورانی

تعبیر دیگر ماتریس دوران، به صورت عملگری دورانی است، که بردار  ${}^A P_1$  را از طریق دوران  $R$  به بردار جدید  ${}^A P_2$  تغییر می‌دهد. معمولاً هنگامی که ماتریس دوران به صورت عملگر نمایش داده می‌شود، فاقد هرگونه زیرنویس یا زبرنویس است، زیرا آن را ارتباط دهنده دو چهارچوب تلقی نمی‌کنیم. یعنی می‌توان نوشت

$${}^A P_2 = R {}^A P_1 \quad (27-2)$$

در اینجا نیز، مانند آنچه در مورد انتقالها دیدیم، ریاضیات توصیف شده در روابط (۱۳-۲) و (۲۷-۲) یکسان است، و تنها تعبیر ماست که در دو حالت تفاوت دارد. این مطلب، ما را به روش به دست آوردن ماتریسهای دورانی که به منزله عملگر به کار می‌روند، رهنمون می‌شود:

ماتریس دورانی که بردارها را با دوران  $R$  می‌چرخاند، همان ماتریس دورانی است که چهارچوب چرخانده شده به وسیله  $R$  را نسبت به چهارچوب مرجع توصیف می‌کند.

اگر چه هر ماتریس دوران را می‌توان به آسانی به صورت عملگر در نظر گرفت، اما در اینجا نماد دیگری را نیز برای عملگر دورانی تعریف خواهیم کرد، که در آن محور دوران به روشنی نشان داده شده است

$${}^A P_2 = R_K(\theta) {}^A P_1 \quad (28-2)$$

در این نمادگذاری، « $R_K(\theta)$ » عملگری دورانی است که دورانی را حول راستای محور  $\hat{K}$  به اندازه  $\theta$  درجه انجام می‌دهد. این عملگر را می‌توان به صورت یک تبدیل همگن که قسمت بردار مکان آن صفر است، نوشت. مثلاً، با جاگذاری در رابطه (۱۱-۲)، عملگری که دوران حول محور  $\hat{z}$

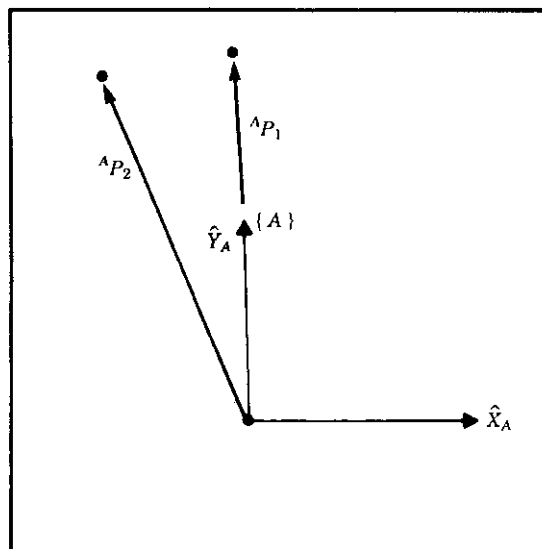
به اندازه  $\theta$  را معین می‌کند، به دست خواهد آمد

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29-2)$$

البته برای دوران هر بردار مکان، می‌توانیم از قسمت ماتریس دوران  $3 \times 3$  مربوط به تبدیل همگن استفاده کنیم. به همین دلیل، نماد « $R_K$ » را می‌توان به صورت ماتریسی  $3 \times 3$  یا  $4 \times 4$  در نظر گرفت. بعداً در همین فصل مشاهده خواهیم کرد که چگونه می‌توان ماتریس دورانی برای دوران حول محوری دلخواه مانند  $\hat{K}$  نوشت.

### ■ مثال ۳-۲

شکل ۲-۱۰ بردار  $^A P_1$  را نشان می‌دهد. می‌خواهیم برداری را که از دوران این بردار حول محور  $\hat{Z}$  به اندازه  $30^\circ$  درجه حاصل می‌شود، محاسبه کنیم. بردار جدید را  $^A P_2$  بنامید. ماتریس دورانی که بردارها را به اندازه  $30^\circ$  درجه حول  $\hat{Z}$  می‌چرخاند، برابر است با ماتریس



شکل ۲-۱۰ بردار  $^A P_1$  که به اندازه  $30^\circ$  درجه حول  $\hat{Z}$  چرخیده است.

دورانی که یک چهارچوب چرخانده شده به اندازه  $30^\circ$  درجه حول  $\hat{Z}$  را نسبت به چهارچوب مرجع توصیف می‌کند. پس عملگر دورانی صحیح چنین است

$$R_Z(30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (30-2)$$

با داشتن بردار  ${}^A P_1$

$${}^A P_1 = \begin{bmatrix} 0.1^\circ \\ 2.0^\circ \\ 0.1^\circ \end{bmatrix} \quad (31-2)$$

بردار  ${}^A P_2$  به صورت زیر به دست می‌آید

$${}^A P_2 = R_Z(30^\circ) {}^A P_1 = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.100 \end{bmatrix} \quad (32-2)$$

معادله‌های (۲-۱۳) و (۲-۲۷) از لحاظ ریاضی معادل‌اند. توجه کنید که اگر  ${}^B R_A$  را (به جای  ${}^A R_B$ ) در رابطه (۲-۱۳) تعریف کرده بودیم، آنگاه وارون  $R$  در رابطه (۲-۲۷) نمایان می‌شد. این تغییر، اختلاف بین دوران بردار به «جلو» و دوران دستگاه مختصات به «عقب» را نشان می‌دهد. تعریف مکان  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  (به وسیله  ${}^A R_B$ ) سبب می‌شود دو تغییر فوق از لحاظ ریاضی یکسان شوند.

### عملگرهای تبدیل

مانند بردارها و ماتریسهای دوران، چهارچوب را نیز می‌توان به صورت «عملگر تبدیل» تعبیر کرد. در این تعبیر، فقط یک دستگاه مختصات به کار می‌رود، و در نتیجه از علامت  $T$  بدون زیرنویس یا زیرنویس استفاده خواهد شد. عملگر  $T$  بردار  ${}^A P_1$  را دوران و انتقال می‌دهد تا بردار جدید  ${}^A P_2$  حاصل شود. بنابراین

$${}^A P_2 = T {}^A P_1 \quad (33-2)$$

در اینجا نیز مانند حالت دوران، ریاضیات توصیف شده در روابط (۲-۱۸) و (۲-۳۳) یکسان، و تنها تعبیر ما متفاوت است. همچنین، این امر به ما امکان می‌دهد که تبدیلهای همگنی را که به منزله عملگر به کار می‌روند، محاسبه کنیم:



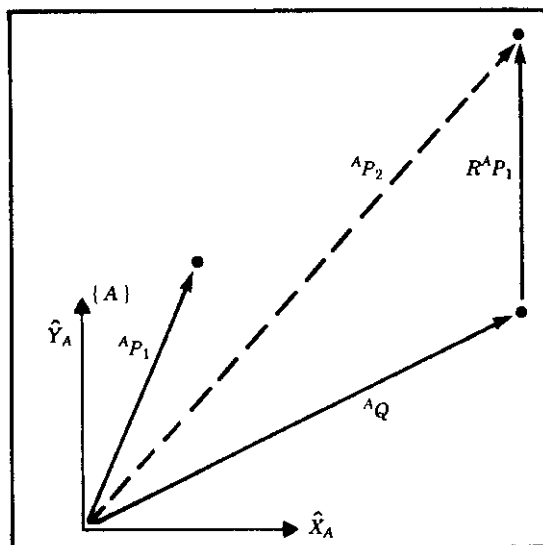
تبدیلی که به وسیله  $R$  دوران، و به وسیله  $Q$  انتقال می دهد، معادل است با تبدیلی که چهارچوب دوران داده شده به وسیله  $R$  و انتقال یافته به وسیله  $Q$  را نسبت به چهارچوب مرجع توصیف می کند. تبدیل معمولاً به صورت تبدیل همگنی متشکل از دو قسمت ماتریس دوران و بردار مکان کلی، در نظر گرفته می شود.

#### ■ مثال ۲-۴

شکل ۲-۱۱ بردار  ${}^A P_1$  را نشان می دهد. می خواهیم این بردار را به اندازه  $30^\circ$  درجه حول محور  $\hat{Z}$  دوران، و به اندازه  $10^\circ$  واحد در راستای  $\hat{X}_A$  و  $5^\circ$  واحد در راستای  $\hat{Y}_A$  انتقال دهیم. چنانچه  ${}^A P_2 = [{}^A P_1]{}^T$  را به دست آورید.

عملگر  $T$  که دوران و انتقال را انجام می دهد، چنین است

$$T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-34)$$



شکل ۲-۱۱ بردار  ${}^A P_1$  با دوران و انتقال به  ${}^A P_2$  تبدیل شده است.

می‌دانیم

$${}^A P_1 = \begin{bmatrix} 3/0 \\ 7/0 \\ 0/0 \end{bmatrix} \quad (35-2)$$

از  $T$  به منزله عملگر استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$${}^A P_7 = T {}^A P_1 = \begin{bmatrix} 9/098 \\ 12/562 \\ 0/000 \end{bmatrix} \quad (36-2)$$

توجه داشته باشید که این مثال از نظر عددی دقیقاً مانند مثال ۲-۲ است، اما تعبیری کاملاً متفاوت دارد.

## ۵-۲ خلاصهٔ تعبیرها

تاکنون مفاهیمی دربارهٔ انتقال صرف، سپس دوران صرف، و سرانجام حالت کلی دوران حول یک نقطه و انتقال آن نقطه را معرفی کرده‌ایم. با در نظر گرفتن حالت کلی دوران و انتقال، نیازی نیست به دو حالت ساده‌تر انتقال صرف و دوران صرف بپردازیم، زیرا آنها نیز جزء حالت کلی‌اند. تبدیل همگن را که ماتریسی  $4 \times 4$  است و اطلاعات مربوط به مکان و جهتگیری را در خود دارد، به منزلهٔ ابزاری عمومی برای نمایش چهارچوبها معرفی کرده‌ایم. برای این تبدیل همگن، سه نوع تعبیر ارائه کردیم:

۱. این تبدیل، توصیف یک چهارچوب است.  ${}^A T_B$  چهارچوب  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف می‌کند. به‌ویژه ستونهای  ${}^A R_B$  بردارهای یک‌ای هستند که راستای محورهای اصلی  $\{B\}$  را معرفی می‌کنند، و  ${}^A P_{BORG}$  نیز مکان مبدأ دستگاه مختصات  $\{B\}$  را نشان می‌دهد.

۲. این تبدیل، یک نگاشت است.  ${}^A T_B$  تصویر  ${}^B P$  را روی  ${}^A P$  به‌دست می‌دهد.

۳. این تبدیل، یک عملگر تبدیل است.  $T$  روی  ${}^A P_1$  عمل می‌کند و  ${}^A P_7$  را به‌دست می‌دهد.

از این پس، واژه‌های «چهارچوب» و «تبدیل» هر دو به معنای یک بردار مکان به‌علاوهٔ یک جهتگیری به‌کار خواهند رفت. از «چهارچوب» به هنگام صحبت از توصیف، و از تبدیل غالباً به مفهوم نگاشت یا عملگر استفاده می‌شود. همچنین، با توجه به اینکه واژهٔ تبدیل کلی، حالت کلی انتقال و دوران توأم را در بر می‌گیرد، بنابراین، اگر بخواهیم دوران صرف (یا انتقال صرف) را بیان کنیم، غالباً از واژهٔ تبدیل استفاده خواهیم کرد.

## ۶-۲ عملیات ریاضی در تبدیل کلی

در این بخش، ضرب تبدیلهای وارون کردن آنها را بررسی خواهیم کرد. این دو عمل ابتدایی، مجموعه‌ای کامل از عملیات عملگرهای تبدیل را به دست می‌دهند.

### تبدیلهای کلی مرکب

در شکل ۱۲-۲، بردار  ${}^C P$  را داریم، و می‌خواهیم بردار  ${}^A P$  را به دست آوریم. چهارچوب  $\{C\}$  نسبت به چهارچوب  $\{B\}$ ، و چهارچوب  $\{B\}$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  معلوم است. پس می‌توانیم  ${}^C P$  را به صورت زیر به  ${}^B P$  تبدیل کنیم

$${}^B P = {}^B T {}^C P \quad (۳۷-۲)$$

و سپس تبدیل  ${}^B P$  به  ${}^A P$  را به صورت زیر انجام دهیم

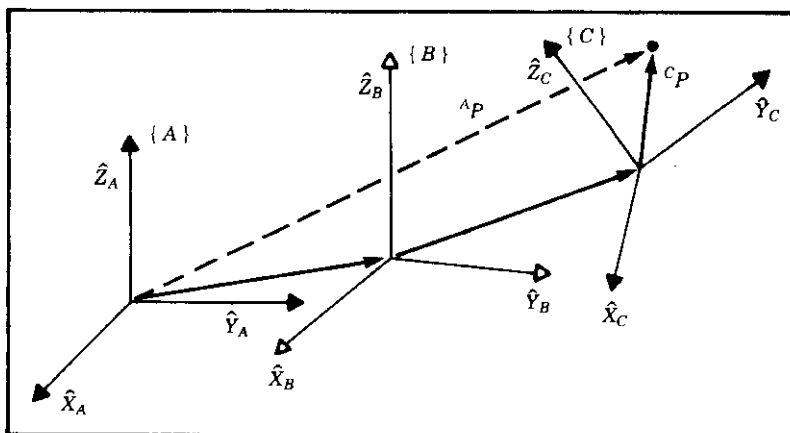
$${}^A P = {}^A T {}^B P \quad (۳۸-۲)$$

با ترکیب معادله‌های (۳۷-۲) و (۳۸-۲)، نتیجه نه چندان دور از انتظار زیر را به دست خواهیم آورد

$${}^A P = {}^A T {}^B T {}^C P \quad (۳۹-۲)$$

با توجه به معادله فوق، می‌توان عبارت زیر را تعریف کرد

$${}^A T = {}^A T {}^B T \quad (۴۰-۲)$$



شکل ۱۲-۲ چهارچوبهای مرکب: هر چهارچوب نسبت به چهارچوب قبلی معلوم است.

در اینجا نیز آشنایی با زیرنویس و زیرنویس، محاسبات را ساده خواهد کرد. می‌توانیم عبارت  ${}^A_C T$  را برحسب توصیفهای معلوم از چهارچوبهای  $\{B\}$  و  $\{C\}$ ، به صورت زیر نمایش دهیم

$${}^A_C T = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R & {}^B_C R \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right] \quad (41-2)$$

### وارون کردن تبدیل

چهارچوب  $\{B\}$  را که نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  معلوم است، در نظر بگیرید (این به معنای دانستن مقدار  ${}^A_B T$  است). گاهی مایلیم این تبدیل را وارون کنیم تا توصیف  $\{A\}$  نسبت به  $\{B\}$ ، یعنی  ${}^B_A T$  به دست آید. روشی ساده برای انجام این کار، محاسبه وارون تبدیل همگن  $4 \times 4$  است. ساختار این ماتریس تبدیل به گونه‌ای است که برای محاسبه وارون آن، می‌توان از روشی ساده‌تر از روش معمول استفاده کرد.

برای محاسبه  ${}^B_A T$ ، باید مقادیر  ${}^B_A R$  و  ${}^B A P_{AORG}$  را به ترتیب از  ${}^A_B R$  و  ${}^A P_{BORG}$  به دست آوریم. ابتدا با توجه به مطالب گفته شده درباره ماتریسهای دوران، می‌نویسیم

$${}^B_A R = {}^A_B R^T \quad (42-2)$$

سپس با استفاده از معادله (۲-۱۲)،  ${}^A P_{BORG}$  را در چهارچوب  $\{B\}$  چنین توصیف می‌کنیم

$${}^B ({}^A P_{BORG}) = {}^B_A R {}^A P_{BORG} + {}^B A P_{AORG} \quad (43-2)$$

چون طرف چپ رابطه (۲-۴۳) باید صفر باشد

$${}^B A P_{AORG} = -{}^B_A R {}^A P_{BORG} = -{}^A_B R^T {}^A P_{BORG} \quad (44-2)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲-۴۲) و (۲-۴۴)، می‌توان  ${}^B_A T$  را به صورت زیر نوشت

$${}^B_A T = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R^T & -{}^A_B R^T {}^A P_{BORG} \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right] \quad (45-2)$$

توجه کنید که بر طبق نمادگذاری ما،

$${}^B_A T = {}^A_B T^{-1}$$

معادله (۲-۴۵) راهی کلی و بسیار سودمند برای محاسبه وارون هر تبدیل همگن است.

■ مثال ۵-۲

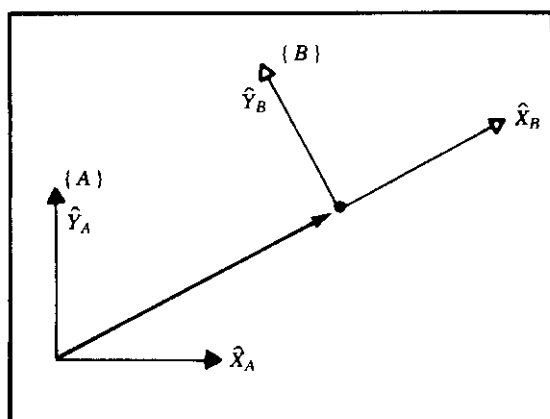
شکل ۱۳-۲ چهارچوب  $\{B\}$  را نشان می‌دهد که نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  به اندازه  $30^\circ$  درجه حول محور  $\hat{Z}$  دوران کرده، در راستاهای  $\hat{X}_A$  و  $\hat{Y}_A$  به ترتیب ۴ و ۳ واحد انتقال یافته است. بنابراین  ${}^A_B T$  مشخص است.  ${}^B_A T$  را بیابید.

چهارچوب  $\{B\}$  چنین تعریف می‌شود

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 & 0,000 & 4,0 \\ 0,500 & 0,866 & 0,000 & 3,0 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46-2)$$

با استفاده از رابطه (۴۵-۲)، نتیجه می‌شود

$${}^B_A T = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,500 & 0,000 & -4,964 \\ -0,500 & 0,866 & 0,000 & -0,598 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47-2)$$



شکل ۱۳-۲ چهارچوب  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$ .

## ۷-۲ معادله‌های تبدیل

شکل ۲-۱۴ وضعیتی را نشان می‌دهد که در آن چهارچوب  $\{D\}$  را می‌توان با استفاده از حاصل ضرب تبدیلهای، به دو صورت متفاوت بیان کرد. نخست به صورت

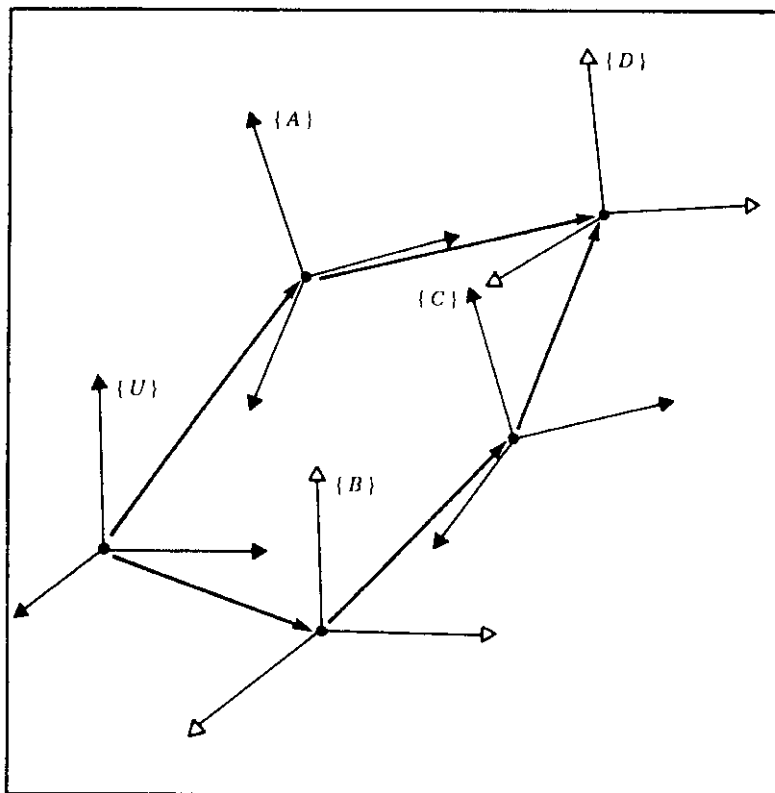
$${}^U_D T = {}^U_A T {}^A_D T \quad (۲۸-۲)$$

و سپس به شکل

$${}^U_D T = {}^U_B T {}^B_C T {}^C_D T \quad (۲۹-۲)$$

با مساوی قرار دادن این دو توصیف از  ${}^U_D T$ ، معادله تبدیل به صورت زیر به دست خواهد آمد

$${}^U_A T {}^A_D T = {}^U_B T {}^B_C T {}^C_D T \quad (۵۰-۲)$$



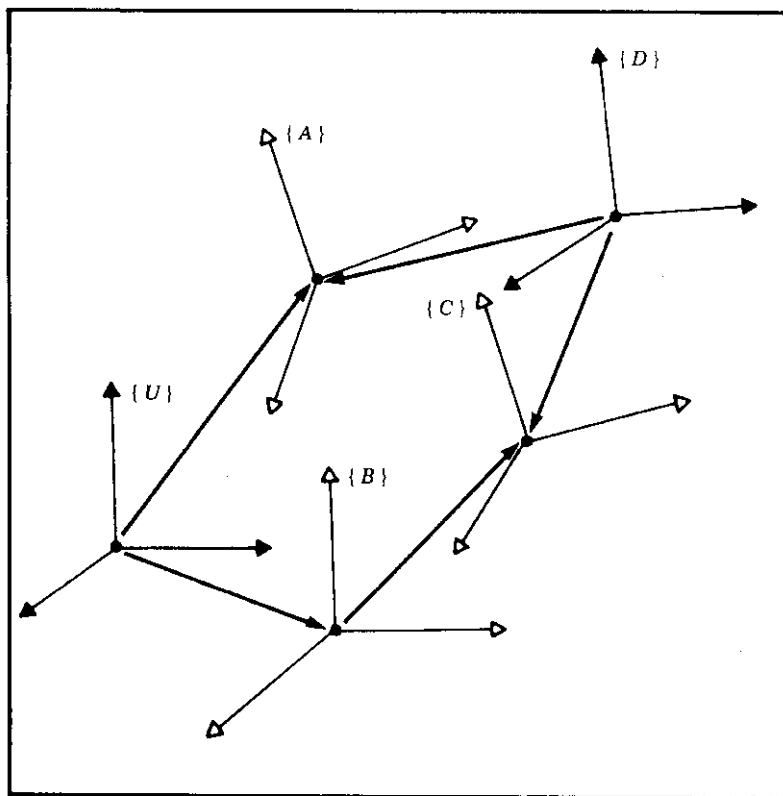
شکل ۲-۱۴ مجموعه‌ای از تبدیلهای که یک حلقه تشکیل می‌دهند.

از معادله‌های تبدیل، می‌توان برای محاسبه تبدیلهای، هنگامی که  $n$  تبدیل مجهول و  $n$  معادله تبدیل موجود است، استفاده کرد. رابطه (۵۰-۲) را برای حالتی که کلیه تبدیلهای  ${}^B T$  معلوم‌اند، در نظر بگیرید. در اینجا یک معادله تبدیل و یک تبدیل مجهول داریم. پس تبدیل مجهول را می‌توان به آسانی به دست آورد

$${}^B T = {}^U T^{-1} {}^U A {}^A T {}^D T {}^D T^{-1} \quad (51-2)$$

در شکل ۱۵-۲، وضعیت مشابه دیگری نشان داده شده است.

توجه کنید که در کلیه شکلها، چهارچوبها به صورت گرافیکی، به وسیله پیکانی که مبدأ یک چهارچوب را به مبدأ چهارچوب دیگر وصل می‌کند، نمایش داده شده‌اند. جهت پیکان نشان می‌دهد که کدام چهارچوب نسبت به دیگری تعریف می‌شود: در شکل ۱۴-۲، چهارچوب  $\{D\}$  نسبت به



شکل ۱۵-۲ نمونه‌ای از یک معادله تبدیل.

$\{A\}$  تعریف شده است، در حالی که در شکل ۲-۱۵، چهارچوب  $\{A\}$  نسبت به  $\{D\}$  تعریف می شود. برای ترکیب چهارچوبها در هنگامی که پیکانها پشت سرهم قرار می گیرند، کافی است حاصل ضرب تبدیلهای پیاپی را به دست آوریم. چنانچه پیکانی دارای جهتی مخالف با جهت تبدیلهای پیاپی باشد، ابتدا وارون آن را محاسبه می کنیم. در شکل ۲-۱۵ دو توصیف ممکن از چهارچوب  $\{C\}$  عبارت اند از

$${}^U_C T = {}^U_A T {}^D_A T^{-1} {}^D_C T \quad (52-2)$$

و

$${}^U_C T = {}^U_B T {}^B_C T \quad (53-2)$$

در اینجا نیز با مساوی قراردادن رابطه های (۵۲-۲) و (۵۳-۲)، می توانیم مثلاً  ${}^U_A T$  را محاسبه کنیم

$${}^U_A T = {}^U_B T {}^B_C T {}^D_C T^{-1} {}^D_A T \quad (54-2)$$

#### ■ مثال ۲-۶

فرض کنید تبدیل  ${}^B_T T$  در شکل ۲-۱۶، که نمایانگر چهارچوب  $\{T\}$ ، واقع بر انگشتان بازوی مکانیکی نسبت به پایه بازو  $\{B\}$  است، معلوم باشد. همچنین، تبدیل  ${}^B_S T$ ، چهارچوب  $\{S\}$  را که به میز کار متصل است، نسبت به پایه  $\{B\}$  توصیف می کند. مکان پیچی که روی میز قرار دارد نیز به وسیله تبدیل  ${}^S_G T$  مشخص می شود. مکان و جهت گیری پیچ نسبت به دست بازوی مکانیکی ماهر، را محاسبه کنید.

با به کارگیری نمادگذاری اختیار شده در این کتاب (و نیز امید است با درک شخصی)، می توان چهارچوب پیچ را نسبت به چهارچوب دست به صورت زیر محاسبه کرد

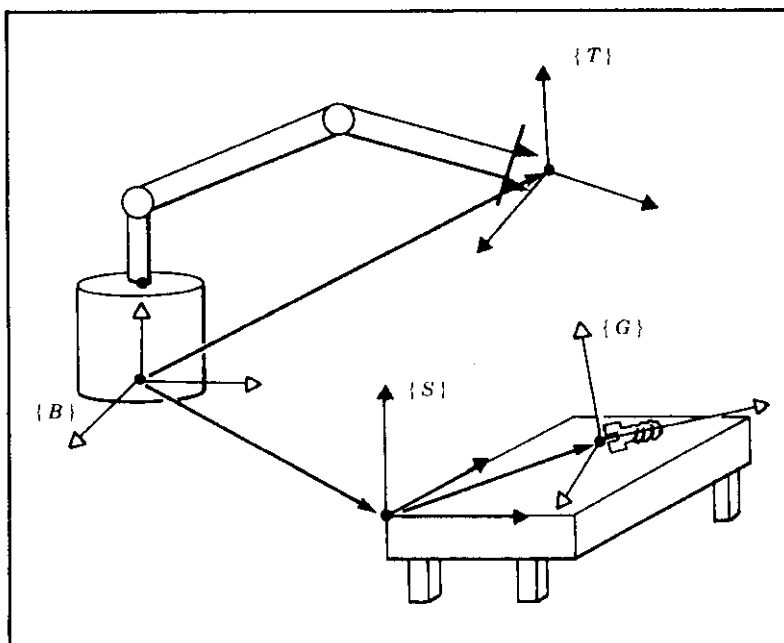
$${}^T_G T = {}^B_T T^{-1} {}^B_S T {}^S_G T \quad (55-2)$$

■

## ۲-۸ مطالبی دیگر درباره نمایش جهت گیری

ناکنون جهت گیری را تنها به وسیله ماتریس دوران  $3 \times 3$  نشان داده ایم. به طوری که دیده شد، ویژگی ماتریسهای دوران آن است که کلیه ستونهای آنها دوهو دو بر هم عمود، و اندازه آنها برابر واحد است. ماتریسهای دوران را ماتریسهای یکامتعامد سره نیز می نامند. منظور از «سره» آن است





شکل ۲-۱۶ بازوی مکانیکی ماهر در حال نزدیک شدن به یک پیچ در روی میز کار.

که درمیان ماتریس مقدار عددی برابر با ۱+ دارد (ماتریسهای یکامتعامد «ناسره» درمیانانی برابر با ۱- دارند).

خود به خود این سؤال مطرح می شود که آیا یک جهتگیری را می توان با کمتر از ۹ عدد توصیف کرد یا نه. برطبق فرمول کیلی<sup>۱</sup> برای ماتریسهای یکامتعامد در جبر خطی [۳]، برای هر ماتریس یکامتعامد سره، می توان یک ماتریس «پادمتقارن» تعریف کرد، به گونه ای که

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \quad (56-2)$$

که در آن  $I_3$  ماتریس یکه  $3 \times 3$  است. ماتریس پادمتقارن (یعنی  $S = -S^T$ )، که خود ماتریسی  $3 \times 3$  است، برحسب سه پارامتر  $(s_x, s_y, s_z)$  چنین به دست می آید

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (57-2)$$

از رابطه (۵۶-۲) مستقیماً نتیجه می‌شود که هر ماتریس دوران  $3 \times 3$  را می‌توان به وسیله تنها سه پارامتر مشخص کرد.

روشن است که عضوهای نه‌گانه ماتریس دوران، از یکدیگر مستقل نیستند. در واقع با داشتن ماتریس دوران  $R$ ، می‌توان بین اعضای آن شش معادله وابستگی نوشت. ماتریس  $R$  را، چنانکه در ابتدا نشان دادیم، می‌توان ماتریسی سطری، با سه ستون در نظر گرفت:

$$R = [\hat{X} \quad \hat{Y} \quad \hat{Z}] \quad (58-2)$$

چنانکه در بخش ۲-۲ دیدیم، این سه بردار در واقع محورهای یک چهارچوبی هستند که برحسب چهارچوب مرجع نوشته شده است. چون این بردارها اولاً یک هستند و ثانیاً دوه‌دو بر هم عمودند، شش قید زیر در مورد ۹ عضو ماتریس برقرار خواهد بود

$$|\hat{X}| = 1$$

$$|\hat{Y}| = 1$$

$$|\hat{Z}| = 1$$

(59-2)

$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = 0$$

$$\hat{X} \cdot \hat{Z} = 0$$

$$\hat{Y} \cdot \hat{Z} = 0$$

بنابراین طبیعی خواهد بود اگر بررسییم آیا یک جهتگیری را می‌توان به وسیله سه پارامتر نمایش داد یا نه. در این بخش، به معرفی چند نمونه از این نمایشها خواهیم پرداخت.

عمل انتقال در راستای سه محور عمود بر هم را می‌توان به سادگی تجسم کرد، اما این امر در مورد دوران درست نیست. متأسفانه انسان به سختی قادر به توصیف جهتگیریها در فضای سه بُعدی است. یکی از مشکلات در این مورد، آن است که دورانها معمولاً خاصیت جابه‌جایی ندارند، یعنی  ${}^B R {}^A R$  با  ${}^A R {}^B R$  یکسان نیست.

#### ■ مثال ۲-۷

دو دوران زیر را، یکی حول  $\hat{Z}$  به اندازه  $30^\circ$  درجه، و دیگری حول  $\hat{X}$  به اندازه  $30^\circ$  درجه، در نظر بگیرید

$$R_Z(30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (60-2)$$

$$R_X(30) = \begin{bmatrix} 1/000 & 0/000 & 0/000 \\ 0/000 & 0/866 & -0/500 \\ 0/000 & 0/500 & 0/866 \end{bmatrix} \quad (61-2)$$

مشاهده می‌شود که این دو دوران خاصیت جابه‌جایی ندارند، چون

$$R_Z(30) R_X(30) = \begin{bmatrix} 0/87 & -0/43 & 0/25 \\ 0/50 & 0/75 & -0/43 \\ 0/00 & 0/50 & 0/87 \end{bmatrix} \quad (62-2)$$

$$\neq R_X(30) R_Z(30) = \begin{bmatrix} 0/87 & -0/50 & 0/00 \\ 0/43 & 0/75 & -0/50 \\ 0/25 & 0/43 & 0/87 \end{bmatrix}$$

و این تعجبی ندارد، زیرا برای توصیف دورانها از ماتریس استفاده می‌شود، و ضرب ماتریسها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. ■

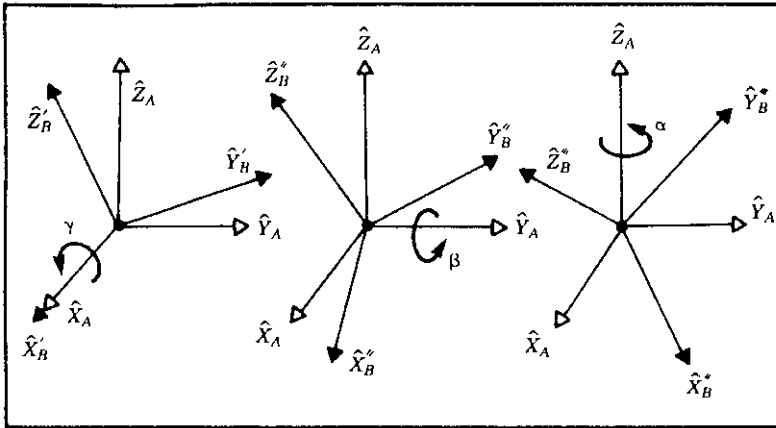
از آنجا که دورانها را می‌توان هم به صورت عملگر و هم به صورت توصیف کننده جهتگیری در نظر گرفت، طبیعی است که آنها را برحسب مورد، به صورتهای گوناگون نمایش دهیم. نمایش ماتریسهای دوران به صورت عملگر سودمند است، زیرا صورت ماتریسی آنها به گونه‌ای است که در هنگام ضرب شدن در یک بردار، عمل دوران را انجام می‌دهند. اما ماتریسهای دوران برای توصیف جهتگیری چندان مناسب نیستند. متصدی ترمینال کامپیوتر که می‌خواهد مختصات جهتگیری مورد نظر برای دست روبات را به کامپیوتر بدهد، در هنگام وارد کردن ماتریس نه عنصری با ستونهای یکامتعاد، به زحمت خواهد افتاد. به همین دلیل، طرز نمایشی که نیاز به تنها سه عدد دارد، در اینجا بسیار مناسبتر خواهد بود. در بخشهای آینده، چند نمونه از این گونه نمایش را معرفی خواهیم کرد.

### زوایای X-Y-Z ثابت

یکی از روشهای توصیف جهتگیری چهارچوب  $\{B\}$  چنین است:

از چهارچوبی که بر چهارچوب مرجع و معلوم  $\{A\}$  منطبق است، شروع کنید.  $\{B\}$  را ابتدا حول  $\hat{X}_A$  به اندازه  $\gamma$ ، سپس حول  $\hat{Y}_A$  به اندازه  $\beta$ ، و سرانجام حول  $\hat{Z}_A$  به اندازه  $\alpha$  دوران دهید.

هر یک از این سه دوران، حول محوری از چهارچوب ثابت و مرجع  $\{A\}$  صورت می‌گیرد. این قرارداد مشخص کردن جهتگیری را زوایای X-Y-Z ثابت می‌نامیم. کلمه «ثابت» به ثابت بودن چهارچوبی که دورانها حول محوره‌های آن انجام می‌گیرند، اشاره می‌کند (شکل ۲-۱۷). گاهی



شکل ۲-۱۷ «رول، پیچ، و یاو» حول محوره‌های ثابت.

از این قرارداد، با نام قرارداد «زوایای رول<sup>۱</sup>، پیچ<sup>۲</sup>، و یاو<sup>۳</sup>» یاد می‌شود، اما در به‌کار بردن این نام باید با احتیاط عمل کرد، زیرا در قراردادهای دیگر نیز کاربرد دارد.

به‌دست آوردن ماتریس دوران معادل  ${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha)$  به سادگی صورت می‌گیرد، زیرا دورانها همگی حول محوره‌های چهارچوب مرجع انجام می‌شوند

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \quad (۶۳-۲)$$

که در آن  $c\alpha$  مخفف  $\cos \alpha$ ،  $s\alpha$  مخفف  $\sin \alpha$ ، و ... است. رعایت ترتیب دورانهای به‌کار رفته در (۶۳-۲) بسیار اهمیت دارد. اگر دورانها را به‌صورت عملگر فرض کنیم، به این ترتیب عمل خواهند کرد: ابتدا  $R_X(\gamma)$ ، سپس  $R_Y(\beta)$ ، و سرانجام  $R_Z(\alpha)$ . با ضرب کردن ماتریسها در (۶۳-۲) نتیجه می‌شود

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (۶۴-۲)$$

۲. pitch دوران حول محور عرضی.

۱. roll دوران حول محور طولی.

۳. yaw دوران حول محور قائم.

توجه کنید که تعریف ارائه شده در اینجا، ترتیب دورانها را مشخص می‌سازد. معادله (۶۴-۲) تنها برای دورانهای انجام شده به ترتیب زیر اعتبار دارد: حول  $\hat{X}_A$  به اندازه  $\gamma$ ، حول  $\hat{Y}_A$  به اندازه  $\beta$ ، و حول  $\hat{Z}_A$  به اندازه  $\alpha$ .

غالباً مایلیم وارون این عمل را نیز انجام دهیم، یعنی زوایای  $X-Y-Z$  ثابت معادل را از ماتریس دوران به دست آوریم. بدین منظور، باید مجموعه‌ای از معادله‌های متعالی (غیر جبری) را حل کنیم: چنانچه (۶۴-۲) را مساوی با ماتریس دوران مورد نظر قرار دهیم، ۹ معادله به دست می‌آید که تنها سه مجهول دارند. چون در این ۹ معادله، شش رابطه وابستگی وجود دارد، در نتیجه سه معادله و سه مجهول حاصل خواهد شد. فرض کنید

$${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (۶۵-۲)$$

از رابطه (۶۴-۲) مشاهده می‌شود که با محاسبه جذر مجموع مربعات  $r_{11}$  و  $r_{21}$ ، می‌توان  $\cos \beta$  را به دست آورد. سپس زاویه  $\beta$  با گرفتن آرک تانژانت از نسبت  $-r_{31} / \cos \beta$ ، محاسبه می‌شود. تا زمانی که  $c\beta \neq 0$ ، می‌توان  $\alpha$  را با گرفتن آرک تانژانت از نسبت  $r_{21}/c\beta$  به  $r_{11}/c\beta$ ، و  $\gamma$  را با گرفتن آرک تانژانت از نسبت  $r_{22}/c\beta$  به  $r_{23}/c\beta$  به دست آورد. به طور خلاصه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Atan}2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\ \alpha &= \text{Atan}2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta) \\ \gamma &= \text{Atan}2(r_{22}/c\beta, r_{23}/c\beta) \end{aligned} \quad (۶۶-۲)$$

که در آن  $\text{Atan}2(y, x)$  آرک تانژانت دو شناسه‌ای است.<sup>۱</sup> اگر چه جواب دومی نیز وجود دارد، اما با در نظر گرفتن علامت مثبت برای رادیکال در رابطه  $\beta$ ، همواره جوابی یگانه در فاصله  $90^\circ \leq \beta \leq -90^\circ$  خواهیم داشت. این غالباً روشی مناسب است، زیرا با به کارگیری آن، می‌توان توابع نگاشت یک به یک بین نمایشهای گوناگون جهتگیری

۱. تابع  $\text{Atan}2(y, x)$  در حقیقت همان تابع  $\tan^{-1}(y/x)$  است، با این تفاوت که در آن از علامتهای  $x$  و  $y$  به منظور تعیین ربعی که زاویه در آن قرار می‌گیرد، استفاده می‌شود. بدین ترتیب،  $\text{Atan}2(-270^\circ, -270^\circ)$  برابر با  $-135^\circ$  است، در حالی که  $\text{Atan}2(270^\circ, 270^\circ)$  برابر با  $45^\circ$  خواهد بود. چنانکه دیده می‌شود، اگر از تابع آرک تانژانت معمولی استفاده می‌شد، این دو زاویه هر دو برابر  $45^\circ$  به دست می‌آمد. در اینجا چون دامنه زوایا را به تکرار بین  $0^\circ$  تا  $360^\circ$  در نظر خواهیم گرفت، از تابع  $\text{Atan}2$  استفاده بسیار خواهیم کرد. این تابع، در  $x = y = 0$  نامعین می‌شود. نام دیگر این تابع «آرک تانژانت چهارربعی» است و در برخی زبانهای برنامه نویسی تابعی از پیش تعریف شده است.

تعریف کرد. ولی در برخی موارد، محاسبه کلیه جوابها اهمیت دارد (در فصل ۴ درباره این موضوع بیشتر بحث خواهد شد). چنانچه  $\beta = \pm 90^\circ$ ، جواب معادله (۶۶-۲)، «بی معنی» خواهد شد. در چنین مواردی، تنها می توان مجموع یا تفاضل  $\alpha$  و  $\gamma$  را محاسبه کرد. راهی برای محاسبه جواب در این مورد، آن است که فرض کنیم:  $\alpha = 0^\circ$ .

در این صورت، اگر  $\beta = 90^\circ$ ، یک جواب چنین خواهد بود

$$\begin{aligned}\beta &= 90^\circ \\ \alpha &= 0^\circ\end{aligned}\quad (67-2)$$

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

و اگر  $\beta = -90^\circ$ ، یک جواب به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\beta &= -90^\circ \\ \alpha &= 0^\circ\end{aligned}\quad (68-2)$$

$$\gamma = -\text{Atan2}(r_{12}, r_{22})$$

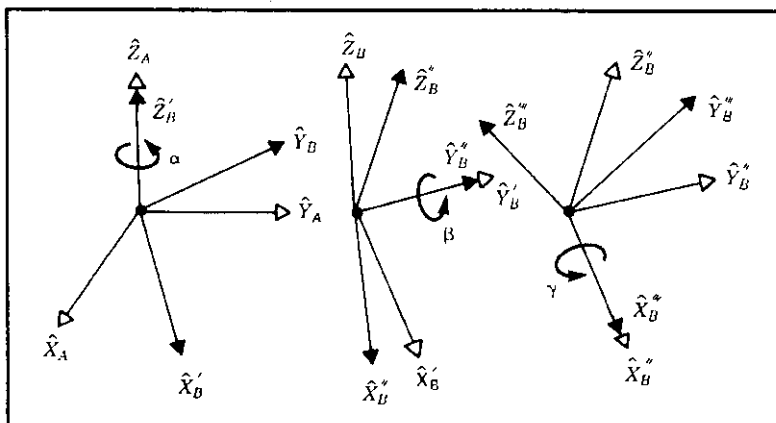
### زوایای اوایلر Z-Y-X

چهارچوب  $\{B\}$  را می توان به صورتی دیگر نیز توصیف کرد:

از چهارچوبی که بر چهارچوب معلوم  $\{A\}$  منطبق است، شروع کنید.  $\{B\}$  را ابتدا حول  $\hat{Z}_B$  به اندازه  $\alpha$ ، سپس حول  $\hat{Y}_B$  به اندازه  $\beta$ ، و سرانجام حول  $\hat{X}_B$  به اندازه  $\gamma$  دوران دهید.

در این روش، هر دوران حول محوری از دستگاه متحرک  $\{B\}$ ، و نه مرجع ثابت  $\{A\}$ ، انجام می گیرد. مجموعه این سه دوران را زوایای اوایلر می نامند. توجه کنید که هر دوران حول محوری صورت می گیرد که مکان آن به دورانهای قبلی بستگی دارد. با توجه به اینکه این سه دوران حول محورهای  $\hat{Z}$ ،  $\hat{Y}$ ، و  $\hat{X}$  انجام می شوند، این نمایش جهتگیری را زوایای اوایلر Z-Y-X می نامیم. شکل ۱۸-۲ محوره های  $\{B\}$  را پس از هر دوران زاویه اوایلر نمایش می دهد. دوران به اندازه  $\alpha$  حول  $\hat{Z}$  سبب می شود  $\hat{X}$  به جهتگیری جدید  $\hat{X}'$ ،  $\hat{Y}$  به  $\hat{Y}'$ ، و ... برسد. به ازای هر دوران، یک «پریم» اضافی برای هر محور در نظر گرفته خواهد شد. ماتریس دورانی را که بر حسب زوایای اوایلر Z-Y-X به صورت پارامتری بیان شده است، با نماد  ${}^A_B R_{Z,Y,X}(\alpha, \beta, \gamma)$  نمایش می دهیم. توجه کنید که برای نشان دادن اینکه این دوران با زوایای اوایلر توصیف شده است، یک علامت «پریم» به زیرنویسها اضافه کرده ایم.

با توجه به شکل ۱۸-۲، می توان برای به دست آوردن عبارتی برای  ${}^A_B R_{Z,Y,X}(\alpha, \beta, \gamma)$  از چهارچوبهای میانی  $\{B'\}$  و  $\{B''\}$  استفاده کرد. با در نظر گرفتن دورانها به صورت توصیف



شکل ۲-۱۸ زوایای اوایلر Z-Y-X.

این چهارچوبها، می‌توان نوشت

$${}^A R = {}^A R {}^{B'} R {}^{B''} R \quad (۶۹-۲)$$

که در آن هر یک از دورانه‌های سمت راست، به صورت زوایای اوایلر Z-Y-X بیان شده است. جهتگیری نهایی  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} {}^A R_{Z'Y'X'} &= R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \quad (۷۰-۲) \end{aligned}$$

که در آن  $s\alpha = \sin \alpha$ ,  $c\alpha = \cos \alpha$  و ... با ضرب ماتریسها در یکدیگر، جواب حاصل می‌شود

$${}^A R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (۷۱-۲)$$

توجه کنید که نتیجه فوق، دقیقاً برابر با نتیجه‌ای است که برای همین سه دوران حول محورهای ثابت با ترتیب معکوس حاصل می‌شود! این نتیجه تا حدی غیر منتظره در حالت کلی نیز برقرار است: جهتگیری نهایی به دست آمده پس از انجام سه دوران حول محورهای ثابت، منطبق است

بر جهتگیری نهایی به دست آمده پس از انجام همان سه دوران به ترتیب معکوس حول محوره‌ای چهارچوب متحرک.

چون رابطه (۷۱-۲) با (۶۴-۲) معادل است، به حل مجدد این معادله‌ها برای به دست آوردن زوایای اوایلر Z-Y-X از ماتریس دوران نیاز نیست. به عبارت دیگر، رابطه (۶۶-۲) را می‌توان برای به دست آوردن زوایای اوایلر Z-Y-X متناظر با ماتریس دوران مفروض نیز به کار برد.

### زوایای اوایلر Z-Y-Z

توصیف دیگری از چهارچوب  $\{B\}$  چنین است:

از چهارچوب منطبق بر چهارچوب معلوم  $\{A\}$  شروع کنید.  $\{B\}$  را ابتدا حول  $\hat{Z}_B$  به اندازه  $\alpha$ ، سپس حول  $\hat{Y}_B$  به اندازه  $\beta$ ، و سرانجام حول  $\hat{Z}_B$  به اندازه  $\gamma$  دوران دهید.

توجه کنید که چون این دورانه‌ها نسبت به چهارچوب متحرک  $\{B\}$  توصیف می‌شوند، این توصیفی به وسیله زاویه اوایلر خواهد بود. چون این سه دوران حول محوره‌های  $\hat{Z}$ ،  $\hat{Y}$ ، و  $\hat{Z}$  انجام شده است، روش نمایش فوق را زوایای اوایلر Z-Y-Z می‌نامیم.

با دنبال کردن همان مراحل بخش قبل، ماتریس دوران معادل چنین به دست خواهد آمد

$${}^A_B R_{Z,Y,Z}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} \quad (۷۲-۲)$$

راه محاسبه زوایای اوایلر Z-Y-Z با داشتن ماتریس دوران، در زیر آمده است:

ماتریس دوران چنین است

$${}^A_B R_{Z,Y,Z}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (۷۳-۲)$$

اگر  $\sin \beta \neq 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Atan}^2(\sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2}, r_{13}) \\ \alpha &= \text{Atan}^2(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta) \\ \gamma &= \text{Atan}^2(r_{33}/s\beta, -r_{31}/s\beta) \end{aligned} \quad (۷۴-۲)$$

اگر چه دو جواب به دست می‌آید، اما با در نظر گرفتن جذر مثبت در رابطه  $\beta$ ، همواره جواب را تنها به ازای  $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$  محاسبه می‌کنیم. در صورتی که  $\beta = 0^\circ$  یا  $\beta = 180^\circ$ ،



جواب (۲-۷۴) بی‌معنی خواهد بود. در این حالتها، تنها مجموع یا تفاضل  $\alpha$  و  $\gamma$  قابل محاسبه است. یک روش قراردادی برای به‌دست آوردن جواب در این حالتها، این است که فرض کنیم  $\alpha = 0^\circ$ . در این صورت، جوابها چنین خواهند بود:

اگر  $\beta = 0^\circ$ ، آنگاه یک جواب را می‌توان چنین محاسبه کرد

$$\beta = 0^\circ$$

$$\alpha = 0^\circ \quad (2-75)$$

$$\gamma = \text{Atan2}(-r_{12}, r_{11})$$

و اگر  $\beta = 180^\circ$ ، آنگاه یک جواب چنین به‌دست می‌آید

$$\beta = 180^\circ$$

$$\alpha = 0^\circ \quad (2-76)$$

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{12}, -r_{11})$$

### قراردادهای دیگر مجموعهٔ زوایا

در بخشهای گذشته، سه قرارداد برای تعیین جهتگیری شرح داده شد: زوایای  $X-Y-Z$  ثابت، زوایای  $Z-Y-X$  و زوایای  $Z-Y-Z$ . در هر یک از این قراردادها، باید سه دوران با ترتیبی خاص حول محورهای اصلی انجام گیرد. این قراردادها، مثالهایی از مجموعهٔ ۲۴ قراردادی هستند که قراردادهای مجموعهٔ زوایا نامیده می‌شوند. در این مجموعه، ۱۲ قرارداد مربوط به دوران حول محورهای ثابت، و ۱۲ قرارداد دیگر مربوط به زوایای اوپلرند. توجه کنید که چون روش زوایای ثابت و روش زوایای اوپلر، دو روش متفاوت برای رسیدن به یک نتیجه‌اند، در نتیجه تنها ۱۲ قرارداد یکتا برای بیان ماتریس دوران با استفاده از دورانهای متوالی حول محورهای اصلی وجود دارد. با اینکه اغلب هیچ یک از این قراردادها بر دیگری برتری ندارد، اما چون نویسندگان مختلف قراردادهای متفاوتی را برمی‌گزینند، دانستن ماتریسهای دوران معادل برای کلیهٔ ۲۴ قرارداد فوق، سودمند خواهد بود. این ماتریسها به‌صورت فهرست در پیوست «ب» در پایان کتاب آمده است.

### قرارداد محور و زاویهٔ معادل

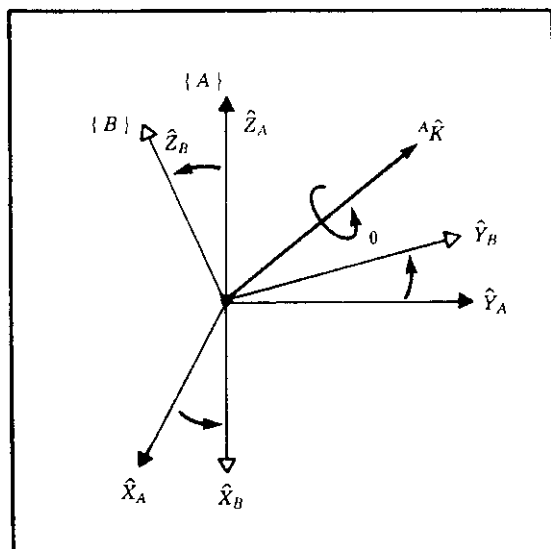
نمادگذاری  $R_X(30^\circ)$ ، در واقع جهتگیری را مشخص می‌کند که با محوری چون  $\hat{X}$  و زاویه‌ای معادل با  $30^\circ$  درجه توصیف می‌شود. این مثالی از نمایش جهتگیری به‌صورت محور و زاویهٔ معادل است. چنانچه محوری در جهتی دلخواه قرار گیرد (جهتی غیر از راستاهای یکه)، هر جهتگیری را می‌توان به‌وسیلهٔ محور و زاویهٔ مناسب، به‌دست آورد. توصیف زیر از چهارچوب  $\{B\}$  را در نظر بگیرید:

از چهارچوبی که بر چهارچوب معلوم  $\{A\}$  منطبق است، شروع کنید. سپس  $\{B\}$  را حول بردار  ${}^A\hat{K}$  به اندازه زاویه  $\theta$  طبق قانون دست راست دوران دهید.

بردار  $\hat{K}$  را گاهی محور معادل دوران متناهی می خوانند. جهت گیری کلی  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  را می توان با نماد  ${}^A_R(\hat{K}, \theta)$  یا  $R_K(\theta)$  نشان داد، و آن را نمایش محور و زاویه معادل خوانند.<sup>۱</sup> مشخصات بردار  ${}^A\hat{K}$  فقط با دو پارامتر بیان می شود، زیرا اندازه این بردار همواره برابر واحد در نظر گرفته می شود. زاویه نیز در واقع پارامتر سومی را تعیین می کند. غالباً راستای یکه  $\hat{K}$  را در اندازه دوران  $\theta$  ضرب می کنیم تا برداری  $1 \times 3$  برای توصیف جهت گیری به دست آوریم. این بردار را با  $K$  (بدون کلاه) نمایش می دهیم (شکل ۲-۱۹ را ببینید).

هنگامی که محور دوران، یکی از محورهای اصلی  $\{A\}$  انتخاب شود، ماتریس دوران معادل، به صورت آشنای دورانه‌های صفحه‌ای زیر در خواهد آمد

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-77)$$



شکل ۲-۱۹ نمایش محور و زاویه معادل.

۱. این مطلب که برای هر جهت گیری  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  بردار  $\hat{K}$  و زاویه  $\theta$  وجود دارند، توسط اویلر به اثبات رسیده است، و قضیه اویلر در دوران نامیده می شود [۳].

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (۷۸-۲)$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۷۹-۲)$$

چنانچه این محور دوران، محوری دلخواه باشد، می‌توان نشان داد (تمرین ۲-۶ را ببینید) که ماتریس دوران معادل برابر است با

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v \theta + c \theta & k_x k_y v \theta - k_z s \theta & k_x k_z v \theta + k_y s \theta \\ k_x k_y v \theta + k_z s \theta & k_y k_y v \theta + c \theta & k_y k_z v \theta - k_x s \theta \\ k_x k_z v \theta - k_y s \theta & k_y k_z v \theta + k_x s \theta & k_z k_z v \theta + c \theta \end{bmatrix} \quad (۸۰-۲)$$

که در آن  $\hat{K} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$  و  $v \theta = 1 - \cos \theta$ ،  $s \theta = \sin \theta$ ،  $c \theta = \cos \theta$  است. علامت  $\theta$  از قانون دست راست، در حالی که انگشت شست در راستای مثبت بردار  $\hat{K}$  قرار می‌گیرد، به دست می‌آید.

معادله (۸۰-۲) نمایش محور و زاویه را به نمایش ماتریس دوران تبدیل می‌کند. توجه کنید که با هر محور دوران و زاویه چرخش دلخواه، می‌توانیم به سادگی یک ماتریس دوران معادل به دست آوریم.

عکس این مسئله، یعنی محاسبه  $\hat{K}$  و  $\theta$  از روی ماتریس دوران نیز امکانپذیر است (تمرینهای ۲-۶ و ۲-۷). بخشی از نتایج این عمل، در زیر آمده است [۳]. اگر

$${}^A_B R_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (۸۱-۲)$$

آن‌گاه

$$\theta = A \cos \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (۸۲-۲)$$

این راه حل، همواره مقدار  $\theta$  را بین صفر و  $۱۸۰^\circ$  درجه محاسبه می‌کند. به ازای هر زوج محور و زاویه معادل  $({}^A\hat{K}, \theta)$ ، زوج دیگری به شکل  $(-{}^A\hat{K}, -\theta)$  وجود دارد که بیانگر همان جهتگیری در فضا، با همان ماتریس دوران است. بنابراین، در تبدیل از ماتریس دوران به نمایش محور و زاویه، باید یکی از این دو حل را انتخاب کنیم. مسئله جدیتر در اینجا آن است که در دورانه‌های زاویه‌ای کوچک، محور دوران به‌سادگی قابل توصیف نیست. روشن است که چنانچه مقدار دوران به سمت صفر میل کند، تعریف محور دوران امکانپذیر نخواهد بود. حل ارائه شده به‌وسیله رابطه (۲-۸۲)، در صورتی که  $\theta = 0^\circ$  و یا  $\theta = ۱۸۰^\circ$ ، جوابی به‌دست نخواهد داد (تمرین ۲-۷ را ببینید).

### ■ مثال ۲-۸

چهارچوب  $\{B\}$  به این صورت توصیف می‌شود:  $\{B\}$  ابتدا بر  $\{A\}$  منطبق است، و سپس حول بردار  ${}^A\hat{K} = [0.707 \ 0.707 \ 0.707]^T$  (که از مبدأ می‌گذرد) به‌اندازه  $\theta$  دوران داده می‌شود. ماتریس تبدیلی را که چهارچوب  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف می‌کند، به‌دست آورید. با جایگزین کردن در رابطه (۲-۸۰)، قسمت دورانی ماتریس توصیف‌کننده به‌دست می‌آید. چون در مبدأ چهارچوب، انتقالی صورت نگرفته است، بردار مکان برابر با  $[0 \ 0 \ 0]^T$  خواهد بود.

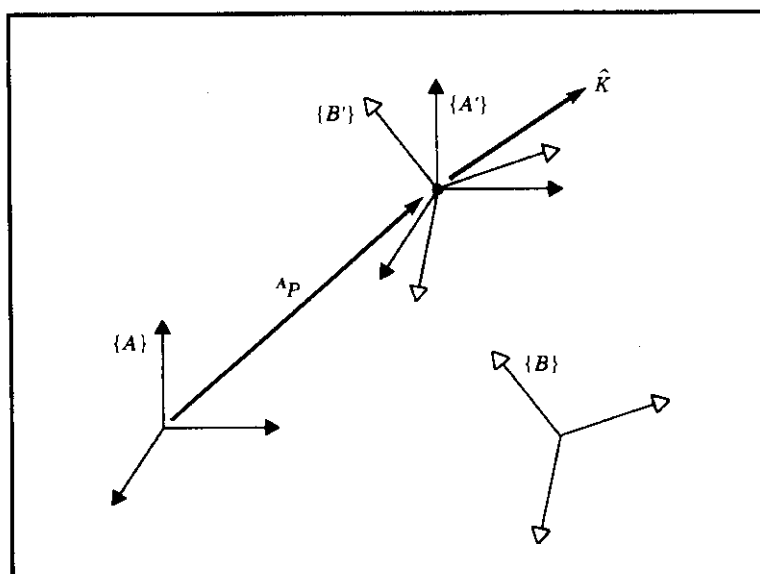
پس

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (۲-۸۳)$$

تا اینجا کلیه دورانه‌های مورد بحث، حول محوره‌های گذرنده از مبدأ دستگاه مختصات مرجع انجام گرفته‌اند. چنانچه در مسئله‌ای مبدأ انتقال پیدا کند، می‌توان با تعریف چهارچوبهای اضافی که مبدأ آنها روی محور قرار دارد، مسئله را به‌حالتی که محور از مبدأ می‌گذرد تبدیل و سپس معادله تبدیل را حل کرد.

### ■ مثال ۲-۹

چهارچوب  $\{B\}$  چنین توصیف می‌شود:  $\{B\}$  ابتدا بر  $\{A\}$  منطبق است، و سپس حول بردار  ${}^A\hat{K} = [0.707 \ 0.707 \ 0.707]^T$  که از نقطه  ${}^A P = [1.0 \ 2.0 \ 3.0]^T$  می‌گذرد، به‌اندازه  $\theta$  درجه دوران داده می‌شود. ماتریس تبدیلی را که چهارچوب  $\{B\}$  را توصیف می‌کند، به‌دست آورید. چهارچوبهای  $\{A\}$  و  $\{B\}$  پیش از انجام دوران بر یکدیگر منطبق‌اند. همان‌طور که در شکل ۲-۲۰ دیده می‌شود، با تعریف دو چهارچوب جدید  $\{A'\}$  و  $\{B'\}$ ، که بر یکدیگر منطبق‌اند



شکل ۲-۲۰ دوران حول محوری که از مبدأ دستگاه  $\{A\}$  نمی‌گذرد. در ابتدا  $\{B\}$  بر  $\{A\}$  منطبق است.

و دارای جهتگیرهای یکسان، به ترتیب با  $\{A\}$  و  $\{B\}$  هستند، اما مبدأ آنها نسبت به  $\{A\}$  انتقال یافته و روی محور دوران واقع شده است، می‌توان نوشت

$${}_{A'}^A T = \begin{bmatrix} 1/0^\circ & 0/0^\circ & 0/0^\circ & 1/0^\circ \\ 0/0^\circ & 1/0^\circ & 0/0^\circ & 2/0^\circ \\ 0/0^\circ & 0/0^\circ & 1/0^\circ & 3/0^\circ \\ 0/0^\circ & 0/0^\circ & 0/0^\circ & 1/0^\circ \end{bmatrix} \quad (A4-2)$$

به همین ترتیب، چهارچوب  $\{B\}$  نسبت به  $\{B'\}$  چنین توصیف می‌شود

$${}_{B'}^B T = \begin{bmatrix} 1/0^\circ & 0/0^\circ & 0/0^\circ & -1/0^\circ \\ 0/0^\circ & 1/0^\circ & 0/0^\circ & -2/0^\circ \\ 0/0^\circ & 0/0^\circ & 1/0^\circ & -3/0^\circ \\ 0/0^\circ & 0/0^\circ & 0/0^\circ & 1/0^\circ \end{bmatrix} \quad (A5-2)$$

حال با ثابت نگه داشتن دیگر چهارچوبها، می‌توان چهارچوب  $\{B'\}$  را نسبت به  $\{A'\}$  دوران داد. این دوران حول محوری که از مبدأ می‌گذرد صورت می‌گیرد، و در نتیجه می‌توانیم با استفاده از

رابطه (۲-۸۰)، دوران  $\{B'\}$  را نسبت به  $\{A'\}$  محاسبه کنیم. قسمت دورانی ماتریس توصیف چهارچوب را می توان با جایگزین کردن در رابطه (۲-۸۰) به دست آورد. با توجه به اینکه مبدأ انتقال نمی یابد، بردار مکان آن  ${}^0T [0 \ 0 \ 0]$  است و نتیجه می شود

$${}_{B'}^{A'}T = \begin{bmatrix} 0,933 & 0,067 & 0,354 & 0,0 \\ 0,067 & 0,933 & -0,354 & 0,0 \\ -0,354 & 0,354 & 0,866 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (۲-۸۶)$$

سرانجام، با نوشتن معادله تبدیل، می توانیم چهارچوب مورد نظر را محاسبه کنیم

$${}^A_BT = {}^A_{A'}T {}^{A'}_{B'}T {}^{B'}_BT \quad (۲-۸۷)$$

که مقدار عددی آن چنین است

$${}^A_BT = \begin{bmatrix} 0,933 & 0,067 & 0,354 & -1,13 \\ 0,067 & 0,933 & -0,354 & 1,13 \\ -0,354 & 0,354 & 0,866 & 0,05 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,00 \end{bmatrix} \quad (۲-۸۸)$$

هر دوران حول محوری که از مبدأ نمی گذرد، یک تغییر مکان را به همراه جهتگیری به دست آمده برای حالت دوران حول محور گذرنده از مبدأ، ایجاد خواهد کرد. توجه کنید که  $\{A'\}$  و  $\{B'\}$  دلخواه اند، و کافی است مبدأ آنها بر روی محور دوران قرار گیرد. انتخاب جهتگیری این دو چهارچوب، و نیز انتخاب مکان مبدأ آنها بر روی محور دوران نیز به دلخواه انجام می شود. تمرین ۲-۱۴ را نیز ببینید.

### پارامترهای اوایلر

برای نمایش جهتگیری، قرارداد دیگری نیز وجود دارد که در آن از چهار عدد به نام پارامترهای اوایلر استفاده می شود. اگر چه بحث کامل در این باره خارج از محدوده این کتاب است، اما برای تکمیل مطالب، این قرارداد را ذکر خواهیم کرد.

پارامترهای اوایلر، برحسب محور معادل  $\hat{K} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$  و زاویه معادل  $\theta$ ، چنین تعیین می شوند

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= k_x \sin \frac{\theta}{\gamma} ; & \epsilon_2 &= k_y \sin \frac{\theta}{\gamma} \\ \epsilon_3 &= k_z \sin \frac{\theta}{\gamma} ; & \epsilon_4 &= \cos \frac{\theta}{\gamma} \end{aligned} \quad (۲-۸۹)$$

روشن است که این چهار کمیت از یکدیگر مستقل نیستند و بین آنها رابطه زیر برقرار است

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1 \quad (90-2)$$

بنابراین هر جهتگیری را می‌توان به صورت نقطه‌ای بر روی کره‌ای به شعاع واحد در فضای چهار بعدی تجسم کرد. گاهی اوقات پارامترهای اوپلر به صورت یک بردار  $1 \times 3$  به علاوه یک اسکالر در نظر گرفته می‌شوند. اگر این پارامترها به شکل بردار  $1 \times 4$  به کار روند، آنها را چهارگان یکپه می‌نامند.

ماتریس دوران  $R_e$ ، که معادل با مجموعه‌ای از پارامترهای اوپلر است، چنین نوشته می‌شود

$$R_e = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_4) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_4) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \end{bmatrix} \quad (91-2)$$

اگر ماتریس دوران معلوم باشد، پارامترهای اوپلر معادل چنین به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{r_{22} - r_{33}}{4\epsilon_4} \\ \epsilon_2 &= \frac{r_{12} - r_{31}}{4\epsilon_4} \\ \epsilon_3 &= \frac{r_{21} - r_{12}}{4\epsilon_4} \\ \epsilon_4 &= \frac{1}{4} \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \end{aligned} \quad (92-2)$$

توجه کنید که رابطه (۹۲-۲) در صورتی که ماتریس دوران شامل یک دوران  $180^\circ$  حول محوری باشد، کاربرد محاسباتی نخواهد داشت، زیرا در این صورت،  $\epsilon_4$  به سمت صفر خواهد رفت. اما می‌توان نشان داد که رابطه‌های (۹۲-۲) برای این حالت نیز متناهی باقی می‌مانند. در واقع با توجه به تعریفهای (۸۹-۲)، روشن است که  $\epsilon_i$ ها همواره در بازه  $[-1, 1]$  باقی خواهند ماند.

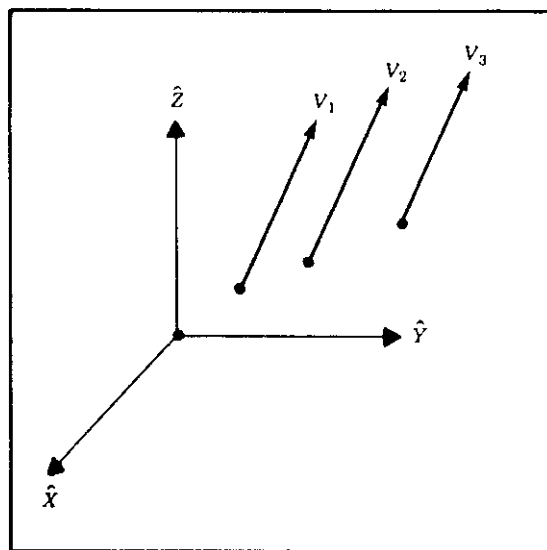
### جهتگیری‌هایی که از قبل تعریف و آموخته شده‌اند

در بیشتر سیستمهای روباتی، «آموزش» مکانها و جهتگیریها را می‌توان با استفاده از خود روبات انجام داد. بدین منظور، بازوی مکانیکی روبات به مکان مطلوب حرکت داده می‌شود و آن مکان در حافظه ضبط می‌گردد. چهارچوبی که بدین ترتیب آموخته می‌شود، الزاماً همان چهارچوبی نیست که دستور بازگشت به آن به روبات داده شده است، بلکه ممکن است محل یک قطعه یا قید راهنما را نشان دهد. در این حالت، از روبات به صورت یک ابزار اندازه‌گیری با شش درجه آزادی استفاده شده است. این گونه آموزش جهتگیری، نیاز شخص برنامه‌ریز به تعریف جهتگیری

را کاملاً مرتفع می‌سازد. در کامپیوتر روبات، جهتگیری نقطهٔ آموخته شده، به صورت ماتریس دوران یا صورتی دیگر ضبط می‌شود، به طوری که شخص استفاده کننده اصولاً نیازی به دیدن یا فهمیدن آنها ندارد. بنابراین، سیستمهای روباتی که توانایی آموزش چهارچوبها به وسیلهٔ خود روبات را دارند، بسیار مطلوب اند. ممکن است برخی سیستمها، علاوه بر چهارچوبهایی که روبات می‌آموزد، تعدادی جهتگیری از پیش تعریف شده مانند «به سمت پایین» یا «به سمت چپ» نیز داشته باشند. کار کردن با این مشخصات، برای انسان ساده است. در هر حال، اگر این مشخصات به تنهایی برای توصیف جهتگیری به کار روند، سیستم بسیار محدود خواهد شد.

## ۹-۲ تبدیل بردارهای آزاد

در این فصل، بیشتر با بردارهای مکان سروکار داشتیم. در فصلهای آینده بردارهای سرعت و نیرو را نیز بررسی خواهیم کرد. تبدیل این بردارها متفاوت است، زیرا آنها بردارهایی از نوع متفاوت اند. در مکانیک بین برابری و همسنگی (هم‌ارزی) بردارها تفاوت قائل می‌شویم. دو بردار زمانی با یکدیگر برابرند که دیمانسیون، اندازه، و جهت آنها یکسان باشد. دو بردار برابر ممکن است خطوط اثر متفاوتی داشته باشند. مثلاً سه بردار سرعت نشان داده شده در شکل ۲-۲۱ را در نظر بگیرید. این سه بردار دیمانسیون برابر، اندازه برابر، و جهت یکسان دارند، پس بنابر تعریف ما با یکدیگر برابرند.



شکل ۲-۲۱ بردارهای سرعت برابر.



دو بردار زمانی همسنگ‌اند که در معیاری مشخص، اثر یکسانی بر جای گذارند. بنابراین، چنانچه در شکل ۲-۲۱، معیار مسافت پیموده شده باشد، هر سه بردار نتیجه یکسانی به دست می‌دهند و در این مورد همسنگ‌اند. اما اگر معیار را ارتفاع از صفحه  $xy$  در نظر بگیریم، این بردارها، با وجود برابر بودن، همسنگ نیستند. بنابراین، رابطه بین بردارها و همسنگ بودن آنها، بستگی کامل به معیار انتخاب شده دارد. بردارهایی که برابر نیستند نیز ممکن است در موارد خاص، اثرات یکسان بر جای گذارند.

در زیر به تعریف دو نوع اساسی از کمیتهای برداری، که ممکن است سودمند واقع شوند، خواهیم پرداخت:

برداری خطی برداری است که اثر آن در معیار مورد نظر، علاوه بر اندازه و جهت، به خط اثر بردار نیز بستگی داشته باشد. غالباً اثرهای هر بردار نیرو به خط اثر (یا نقطه اثر) آن بستگی دارد، و به همین دلیل بردار نیرو برداری خطی است.

برداری آزاد برداری است که می‌تواند با حفظ اندازه و جهت، در هر مکانی از فضا قرار گیرد، بدون آنکه در مفهوم آن تغییری پدید آید.

مثلاً بردار گشتاور خالص همواره برداری آزاد است. چنانچه بردار گشتاور  $^B N$  نسبت به چهارچوب  $\{B\}$  معلوم باشد، می‌توانیم همان گشتاور را در چهارچوب  $\{A\}$  نیز به صورت زیر محاسبه کنیم

$$^A N = {}^A_B R \ ^B N \quad (۹۳-۲)$$

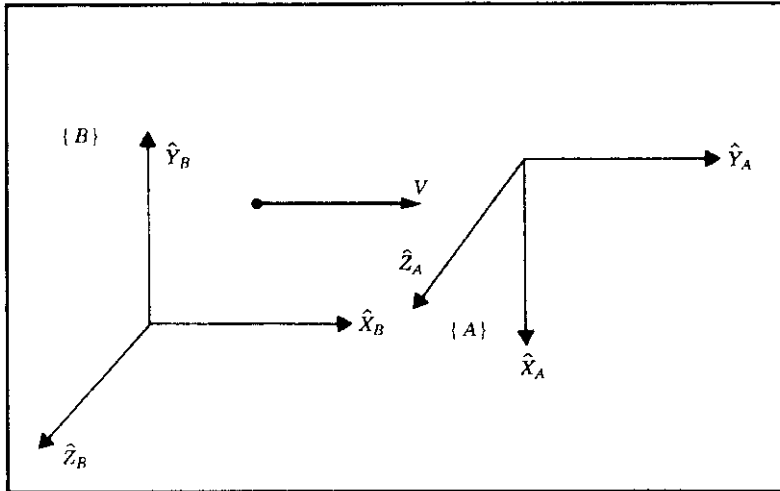
چون در بردار آزاد، تنها اندازه و جهت اهمیت دارد، در تبدیل بین دو چهارچوب فوق، تنها ماتریس دوران به کار می‌رود، و مکان نسبی مبدأ چهارچوبها در محاسبات وارد نمی‌شود.

به همین ترتیب، بردار سرعت  $^B V$  نوشته شده در چهارچوب  $\{B\}$ ، در چهارچوب  $\{A\}$  چنین بیان می‌شود

$$^A V = {}^A_B R \ ^B V \quad (۹۴-۲)$$

سرعت یک نقطه، برداری آزاد است، بنابراین تنها اندازه و جهت آن در محاسبات اهمیت دارد. عمل دوران (در رابطه (۹۴-۲)) بر اندازه بردار اثر نخواهد داشت، اما در عین حال، دوران لازم برای توصیف بردار به هنگام تبدیل چهارچوب  $\{B\}$  به  $\{A\}$  را انجام می‌دهد. توجه کنید که  $^A P_{BORG}$  در تبدیل بردار مکان دیده می‌شود، اما در تبدیل بردار سرعت ظاهر نمی‌گردد. مثلاً در شکل ۲-۲۲، اگر  $^B V = 5\hat{X}$ ، آنگاه  $^A V = 5\hat{Y}$ .

در فصل ۵ بردارهای سرعت، نیرو، و گشتاور به طور کاملتر معرفی می‌شوند.



شکل ۲-۲۲ تبدیل سرعتها.

## ۱۰-۲ ملاحظات محاسباتی

در دسترس بودن قدرت محاسباتی ارزان، در رشد صنعت روباتیک نقش بزرگی داشته است، اما هنوز هم در طراحی دستگاههای روباتی، باید محاسبات بازده مناسبی داشته باشند.

اگر چه تبدیل همگن برای درک مطالب سودمند است، اما در اغلب نرم افزارهای تبدیلی مستقیماً از تبدیلهای استفاده نمی شود، زیرا در این صورت زمان زیادی برای ضرب کردن صفرها و یکها به هدر می رود. محاسبات معمولاً به شکل نشان داده شده در رابطه های (۲-۴۱) و (۲-۴۵) انجام می گیرد، و از ضرب مستقیم یا وارون کردن ماتریسهای  $4 \times 4$  خودداری می شود.

ترتیب ضرب ماتریسهای تبدیل، بر حجم محاسبات تأثیر فراوان می گذارد. مثلاً، دورانهای متوالی (پی در پی) یک بردار را به صورت زیر در نظر بگیرید

$${}^A P = {}^A_B R {}^B_C R {}^C_D R {}^D P \quad (۲-۹۵)$$

یک روش آن است که ابتدا ماتریسهای دوران را در یکدیگر ضرب کنیم تا ماتریس  ${}^A_D R$  در عبارت زیر به دست آید

$${}^A P = {}^A_D R {}^D P \quad (۲-۹۶)$$

به دست آوردن  ${}^A_D R$  از روی سه تشکیل دهنده آن، نیاز به ۵۴ عمل ضرب و ۳۶ عمل جمع خواهد داشت. انجام ضرب ماتریس در بردار در عبارت (۲-۹۶) نیز مستلزم انجام ۹ عمل ضرب و ۶

عمل جمع است. بدین ترتیب، تعداد کل محاسبات مورد نیاز، ۶۳ عمل ضرب و ۴۲ عمل جمع است.

اما اگر به جای روش فوق، از روش تبدیل مرحله به مرحله برداری استفاده، و ماتریسها را یکی یکی در محاسبات وارد کنیم، یعنی

$$\begin{aligned} {}^A P &= {}^A_B R \quad {}^B_C R \quad {}^C_D R \quad {}^D P \\ {}^A P &= {}^A_B R \quad {}^B_C R \quad {}^C P \\ {}^A P &= {}^A_B R \quad {}^B P \\ {}^A P &= {}^A P \end{aligned} \quad (۹۷-۲)$$

کل تعداد محاسبات، تنها ۲۷ عمل ضرب و ۱۸ عمل جمع، یعنی کمتر از نصف تعداد محاسبات در روش اول است.

در برخی حالتها ممکن است  ${}^A_B R$ ،  ${}^B_C R$  و  ${}^C_D R$  ثابت باشند، و بخواهیم تعداد زیادی از  ${}^D P_i$  ها را به  ${}^A P_i$  تبدیل کنیم. در این مورد، بهتر است  ${}^A_B R$  را یکبار محاسبه کرده، آن را به دفعات برای کلیه نگاشتهای بعدی به کار ببریم. تمرین ۲-۱۶ را نیز ببینید.

#### ■ مثال ۲-۱۰

روشی را برای ضرب دو ماتریس دوران،  ${}^A_B R$  و  ${}^B_C R$ ، ارائه دهید که در آن تعداد عملهای ضرب کمتر از ۲۷ و تعداد عملهای جمع کمتر از ۱۸ باشد.

چنانچه  $\hat{L}_i$  ستونهای  ${}^B_C R$ ، و  $\hat{C}_i$  سه ستون ماتریس حاصل ضرب باشند، می توان نوشت

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= {}^A_B R \quad \hat{L}_1 \\ \hat{C}_2 &= {}^A_B R \quad \hat{L}_2 \\ \hat{C}_3 &= \hat{C}_1 \times \hat{C}_2 \end{aligned} \quad (۹۸-۲)$$

■ تعداد عملهای ضرب برای انجام محاسبات فوق ۲۴، و تعداد عملهای جمع ۱۵ است.

#### مراجع

- [1] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1969.
- [2] D. Ballard, and C. Brown, *Computer Vision*, Prentice-Hall, 1982.
- [3] O. Bottema, and B. Roth, *Theoretical Kinematics*, North Holland, Amsterdam, 1979.

- [4] R.P. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, 1981.
- [5] I. Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1967.
- [6] Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, 1971.
- [7] B. Gorla, and M. Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.

### تمرینها

- ۱-۲ [۱۵] بردار  ${}^A P$  ابتدا حول  $\hat{Z}_A$  به اندازه  $\theta$  درجه، و سپس حول  $\hat{X}_A$  به اندازه  $\phi$  درجه دوران داده می شود. ماتریس دورانی پیدا کنید که این دورانها را با ترتیب ذکر شده انجام دهد.
- ۲-۲ [۱۵] بردار  ${}^A P$  ابتدا حول  $\hat{Y}_A$  به اندازه  $30^\circ$  درجه، و سپس حول  $\hat{X}_A$  به اندازه  $45^\circ$  درجه دوران داده می شود. ماتریس دورانی پیدا کنید که این دورانها را با ترتیب ذکر شده انجام دهد.
- ۳-۲ [۱۶] چهارچوب  $\{B\}$  به صورت زیر قرار گرفته است:  $\{B\}$  ابتدا بر  $\{A\}$  منطبق است. سپس چهارچوب  $\{B\}$  را حول  $\hat{Z}_B$  به اندازه  $\theta$  درجه دوران می دهیم و چهارچوب حاصل را حول  $\hat{X}_B$  به اندازه  $\phi$  درجه می چرخانیم. مطلوب است ماتریس دورانی که توصیف بردارها را از  ${}^B P$  به  ${}^A P$  تغییر می دهد.
- ۴-۲ [۱۶] چهارچوب  $\{B\}$  به صورت زیر قرار گرفته است:  $\{B\}$  ابتدا بر  $\{A\}$  منطبق است. سپس آن را حول  $\hat{Z}_B$  به اندازه  $30^\circ$  درجه دوران می دهیم و چهارچوب حاصل را حول  $\hat{X}_B$  به اندازه  $45^\circ$  درجه می چرخانیم. مطلوب است ماتریس دورانی که توصیف بردارها را از  ${}^B P$  به  ${}^A P$  تغییر می دهد.
- ۵-۲ [۱۳]  ${}^A_B R$  ماتریسی  $3 \times 3$  با مقادیر ویژه  $1$ ،  $e^{+ai}$  و  $e^{-ai}$  است (داریم:  $i = \sqrt{-1}$ ). مفهوم فیزیکی بردار ویژه  ${}^A_B R$  متناظر با مقدار ویژه  $1$  چیست؟
- ۶-۲ [۲۱] معادله  $(2-8^\circ)$  را به دست آورید.
- ۷-۲ [۲۴] الگوریتمی را توصیف یا برنامه ریزی کنید که محور و زاویه معادل یک ماتریس دوران را به دست دهد. برای این منظور، از معادله  $(2-8^\circ)$  شروع کنید، اما مطمئن شوید که الگوریتم شما حالت های خاص  $\theta = 0^\circ$  و  $\theta = 180^\circ$  را نیز در بر می گیرد.
- ۸-۲ [۲۹] «زیر برنامه ای» بنویسید که نمایش جهت گیری را از صورت ماتریس دوران به صورت محور و زاویه معادل تغییر دهد. برنامه را به زبان پاسکال چنین آغاز کنید:

Procedure RMTOAA (VAR R: mat33; VAR K: vec3; VAR theta: real);

زیر برنامه دیگری بنویسید که نمایش جهتگیری را از صورت محور و زاویه معادل به صورت ماتریس دوران تغییر دهد

Procedure AATORM (VAR K: vec3; VAR theta: real; VAR R: mat33);

دو زیر برنامه بالا را پشت سرهم قرار دهید و آنها را در چند مورد، اجرا کنید. تحقیق کنید که آیا مقادیر ورودی و خروجی یکسان‌اند یا نه. چند حالت پیچیده‌تر را نیز امتحان کنید!

۹-۲ [۲۷] تمرین ۸-۲ را برای زوایای «رول، پیچ، و یاو» حول محورهای ثابت، تکرار کنید.

۱۰-۲ [۲۷] تمرین ۸-۲ را برای زوایای اویلر Z-Y-Z تکرار کنید.

۱۱-۲ [۱۰] در چه شرایطی ضرب دو ماتریس دوران متناهی خاصیت جابه‌جایی دارد (اثبات لازم نیست)!

۱۲-۲ [۱۴] بردار سرعتی به صورت زیر مفروض است

$${}^B V = \begin{bmatrix} 10/^\circ \\ 20/^\circ \\ 30/^\circ \end{bmatrix}$$

اگر داشته باشیم

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11/^\circ \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -3/^\circ \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 9/^\circ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^A V$  را محاسبه کنید.

۱۳-۲ [۲۱] چهارچوبهای زیر را که با نمایش ماتریسی داده شده‌اند، مانند آنچه در شکل ۱۵-۲

دیدید، ترسیم کنید و به‌طور کیفی ترتیب قرار گرفتن آنها را نشان دهید. سپس  ${}^B T_C$  را محاسبه کنید.

$${}^U T_A = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11/^\circ \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -1/^\circ \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 8/^\circ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^B T_A = \begin{bmatrix} 1/000 & 0/000 & 0/000 & 0/0 \\ 0/000 & 0/866 & -0/500 & 10/0 \\ 0/000 & 0/500 & 0/866 & -20/0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^C T_U = \begin{bmatrix} 0/866 & -0/500 & 0/000 & -3/0 \\ 0/433 & 0/750 & -0/500 & -3/0 \\ 0/250 & 0/433 & 0/866 & 3/0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۴-۲ [۳۱] فرمولی کلی برای محاسبه  ${}^A T_B$  در حالت زیر به دست آورید: در ابتدا  $\{A\}$  و  $\{B\}$  برهم منطبق اند. سپس  $\{B\}$  حول  $\hat{K}$  به اندازه  $\theta$  دوران می کند.  $\hat{K}$  از نقطه  ${}^A P$  می گذرد (در حالت کلی  $\hat{K}$  از مبدأ چهارچوب  $\{A\}$  نمی گذرد).  
 [۳۴] دو چهارچوب  $\{A\}$  و  $\{B\}$  تنها در جهت گیری با یکدیگر متفاوت اند.  $\{B\}$  چنین به دست می آید: ابتدا منطبق بر  $\{A\}$  است، و سپس به اندازه  $\theta$  رادیان حول بردار یکه  $\hat{K}$  دوران می کند. به عبارت دیگر

$${}^A R_B = {}^A R_K(\theta)$$

نشان دهید رابطه زیر برقرار است

$${}^A R_B = e^{K\theta}$$

که در آن

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$$

۱۶-۲ [۲۲] برداری باید به وسیله سه ماتریس دوران به صورت زیر نگاشته شود

$${}^A P = {}^A R_B {}^B R_C {}^C R_D {}^D P$$

یک روش برای انجام این کار، آن است که ابتدا سه ماتریس دوران را در هم ضرب کنیم تا  ${}^A R_D$  در عبارت زیر به دست آید

$${}^A P = {}^A R_D {}^D P$$

راه دیگر آن است که بردار را به نوبت در ماتریسهای دوران ضرب کنیم، یعنی

$${}^A P = {}^A_B R {}^B_C R {}^C_D R {}^D P$$

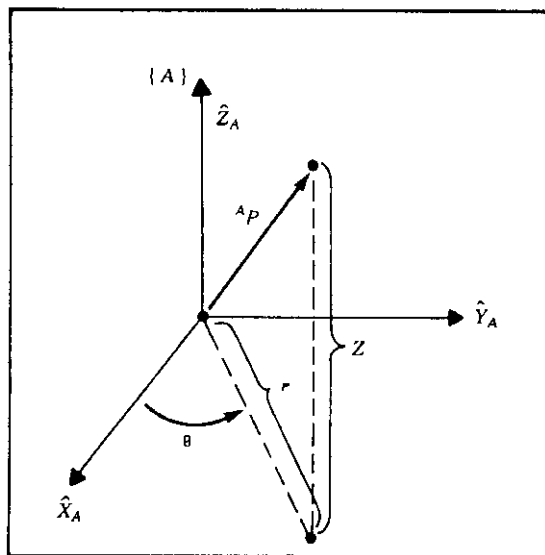
$${}^A P = {}^A_B R {}^B_C R {}^C P$$

$${}^A P = {}^A_B R {}^B P$$

$${}^A P = {}^A P$$

چون  ${}^D P$  با  ${}^B P$  ۱۰۰ هرتز تغییر می‌کند، باید  ${}^A P$  را نیز با همین آهنگ محاسبه کنیم. از سوی دیگر، سه ماتریس دوران نیز در حال تغییرند، و سیستم بینایی ماشین، مقادیر جدید  ${}^A_B R$ ،  ${}^B_C R$  و  ${}^C_D R$  را با بسامد ۳۰ هرتز ایجاد می‌کند. بهترین روش برای انجام محاسبات را که تعداد عملهای ضرب و جمع را مینیمم می‌کند، ارائه دهید.

۱۷-۲ [۱۶] شکل آشنای دیگری برای نشان دادن یک نقطه در فضا، دستگاه مختصات استوانه‌ای است. در شکل ۲-۲۳ سه مختص این دستگاه نشان داده شده است. مختص  $\theta$  جهتی را در صفحه  $xy$  نشان می‌دهد که مختص شعاعی به اندازه  $r$  در راستای آن انتقال می‌یابد. مختص  $z$  نیز ارتفاع از صفحه  $xy$  را مشخص می‌کند. مختصات دکارتی نقطه  ${}^A P$  را برحسب مختصات استوانه‌ای  $r, \theta, z$  و  $z$  به دست آورید.



شکل ۲-۲۳ مختصات استوانه‌ای.

۱۸-۲

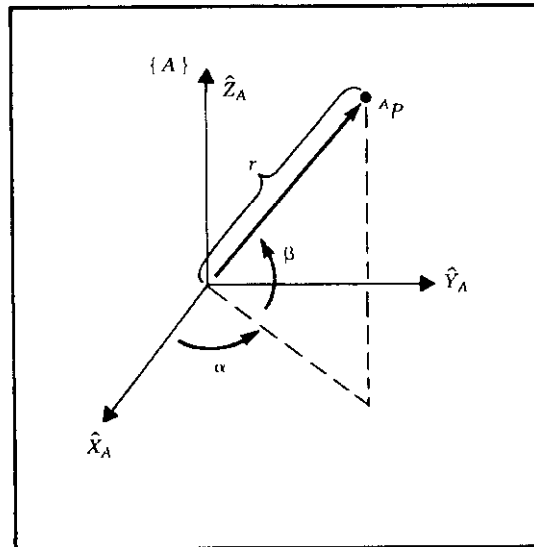
[۱۸] دستگاه مختصات سه بعدی دیگری که برای توصیف یک نقطه در فضا به کار می رود، دستگاه مختصات کروی است. سه مختص  $\alpha$ ،  $\beta$ ، و  $r$  این دستگاه در شکل ۲-۲۴ نشان داده شده است. زاویه های  $\alpha$  و  $\beta$  را می توان توصیف کننده سمت و ارتفاع شعاعی که در فضا تصویر می شود تلقی کرد. مختص سوم، یعنی  $r$  فاصله شعاعی در امتداد شعاعی است که به نقطه مورد نظر ختم می شود. مختصات دکارتی نقطه  $AP$  را بر حسب مختصات کروی  $\alpha$ ،  $\beta$ ، و  $r$  به دست آورید.

۱۹-۲

[۲۴] جسمی ابتدا حول محور  $\hat{X}$  خود به اندازه  $\phi$  و سپس حول محور  $\hat{Y}$  خود در وضعیت جدید، به اندازه  $\psi$  دوران داده می شود. با توجه به مطالعاتی که درباره زوایای اوایلر شد، دیدیم که جهت گیری نهایی جسم با عبارت  $R_X(\phi)R_Y(\psi)$  توصیف می شود. چنانچه این دورانها حول محورهای چهارچوب مرجع ثابت انجام می گرفتند، نتیجه به صورت  $R_Y(\psi)R_X(\phi)$  می بود. بنابراین، به نظر می رسد ترتیب ضرب ماتریسها به ثابت و یا متحرک بودن محورهای بستگی دارد. اما بهتر است در نظر داشته باشیم که در هنگام دوران جسم حول محوری از چهارچوب متحرک، جسم نسبت به چهارچوب ثابت دوران زیر را انجام می دهد

$$R_X(\phi)R_Y(\psi)R_X^{-1}(\phi)$$

این تبدیل تشابهی [۱]، با ضرب  $R_X(\phi)$  اولیه در سمت چپ رابطه فوق، به صورت



شکل ۲-۲۴ مختصات کروی.



عبارت نهایی خلاصه می‌شود، که در آن به نظر می‌رسد ترتیب ضرب ماتریسها عکس شده است. با توجه به این دیدگاه، شکل ماتریس دوران معادل با مجموعه زوایای اوپلر  $Z-Y-Z$   $(\alpha, \beta, \gamma)$  را به دست آورید (نتیجه در رابطه (۲-۷۲) داده شده است).

[۲۰] دوران بردار  $Q$  حول بردار  $\hat{K}$  به اندازه  $\theta$  را که بر اثر آن بردار جدید  $Q'$  حاصل می‌شود، در نظر بگیرید:

$$Q' = R_K(\theta)Q$$

با استفاده از رابطه (۲-۸۰)، فرمول رودریکز<sup>۱</sup> را که به صورت زیر نوشته می‌شود، به دست آورید

$$Q' = Q \cos \theta + \sin \theta (\hat{K} \times Q) + (1 - \cos \theta) (\hat{K} \cdot Q) \hat{K}$$

۲۱-۲ [۱۵] برای زوایای دوران کوچک  $\theta$  (به طوری که بتوان فرض کرد  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 1$ ، و  $\theta^2 = 0$ )، ماتریس دوران معادل با دوران  $\theta$  حول محور دلخواه  $\hat{K}$  را به دست آورید. از رابطه (۲-۸۰) استفاده کنید.

۲۲-۲ [۲۰] با استفاده از نتیجه تمرین ۲-۲۱، نشان دهید که دو دوران بسیار کوچک خاصیت جابه جایی دارند (یعنی ترتیب انجام دورانه‌ها اهمیت ندارد).

۲۳-۲ [۲۵] الگوریتمی بنویسید که چهارچوب  ${}^U_A T$  را برحسب مشخصات سه نقطه  ${}^U P_1$ ،  ${}^U P_2$  و  ${}^U P_3$  تعریف کند. نکات زیر در مورد این نقاط صادق‌اند:

۱.  ${}^U P_1$  بر مبدأ چهارچوب  $\{A\}$  قرار دارد.
۲.  ${}^U P_2$  در طرف مثبت محور  $\hat{X}$  از  $\{A\}$  است.
۳.  ${}^U P_3$  نزدیک به طرف مثبت محور  $\hat{Y}$  در صفحه  $XY$  از  $\{A\}$  قرار دارد.

۲۴-۲ [۴۵] فرمول کیلی را برای ماتریسهای یکامتعامد سره اثبات کنید.

۲۵-۲ [۳۰] نشان دهید که مقادیر ویژه هر ماتریس دوران عبارت‌اند از ۱،  $e^{+i}$  و  $e^{-i}$ ، که در آن  $i = \sqrt{-1}$ .

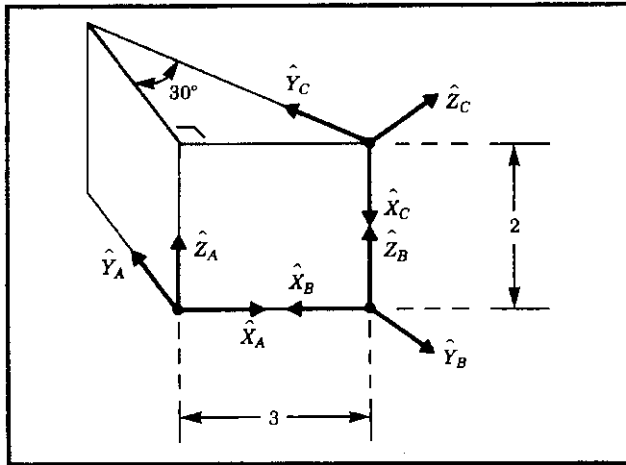
۲۶-۲ [۳۳] ثابت کنید هر مجموعه از زوایای اوپلر را می‌توان برای بیان کلیه ماتریسهای دوران ممکن به کار برد.

۲۷-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۵، مقدار  ${}^A_B T$  را به دست آورید.

۲۸-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۵، مقدار  ${}^A_G T$  را به دست آورید.

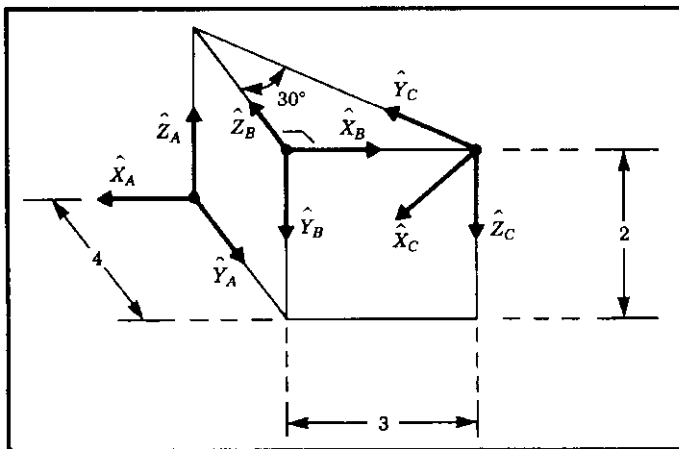
۲۹-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۵، مقدار  ${}^B_G T$  را به دست آورید.

۳۰-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۵، مقدار  ${}^C_A T$  را به دست آورید.



شکل ۲-۲۵ چهارچوبهای وصل شده به گوشه‌های یک گوه.

- ۳۱-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۶، مقدار  ${}^A_B T$  را به دست آورید.  
 ۳۲-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۶، مقدار  ${}^A_C T$  را به دست آورید.  
 ۳۳-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۶، مقدار  ${}^B_C T$  را به دست آورید.  
 ۳۴-۲ [۱۵] با توجه به شکل ۲-۲۶، مقدار  ${}^C_A T$  را به دست آورید.  
 ۳۵-۲ [۲۰] ثابت کنید درمیان هر ماتریس دوران، همواره برابر با واحد است.



شکل ۲-۲۶ چهارچوبهای متصل به گوشه‌های یک گوه.

- ۳۶-۲ [۳۶] جسمی صلب که در صفحه (فضای ۲ بعدی) حرکت می‌کند، سه درجه آزادی، و جسم صلب متحرک در فضای سه بعدی، شش درجه آزادی دارد. نشان دهید جسم متحرک در فضای  $N$  بعدی، دارای  $\frac{1}{2}(N^2 + N)$  درجه آزادی است.
- ۳۷-۲ [۱۵] تبدیل زیر داده شده است

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,43 & 0,86 & 5,0 \\ 0,87 & -0,50 & 0,00 & -4,0 \\ 0,43 & 0,75 & -0,50 & 3,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- عنصر  $(2, 4)$  را در  ${}^B_A T$  به دست آورید.
- ۳۸-۲ [۲۵] دو بردار یکه  $v_1$  و  $v_2$  را تصور کنید که به جسم صلبی متصل شده‌اند. به خاطر داشته باشید که این جسم صلب به هر ترتیبی دوران کند، زاویه هندسی بین دو بردار فوق ثابت خواهد ماند (به عبارت دیگر، دوران جسم صلب یک عمل «ثابت نگهدارنده زاویه» است). با استفاده از این خاصیت، به طور خلاصه (در چهار یا پنج خط) ثابت کنید که وارون هر ماتریس دوران، باید با ترانزپوز آن برابر باشد، و همچنین، ماتریس دوران ماتریسی یکمعامد است.
- ۳۹-۲ [۳۷] الگوریتمی بنویسید (مثلاً به صورت برنامه‌ای به زبان پاسکال) که چهارگان یکه متناظر با هر ماتریس دوران مفروض را محاسبه کند. از رابطه (۲-۹۱) آغاز کنید.
- ۴۰-۲ [۳۳] الگوریتمی بنویسید (مثلاً به صورت برنامه‌ای به زبان پاسکال) که زوایای اولیه  $Z-X-Z$  متناظر با هر ماتریس دوران مفروض را محاسبه کند. به پیوست «ب» مراجعه کنید.
- ۴۱-۲ [۳۳] الگوریتمی بنویسید (مثلاً به صورت برنامه‌ای به زبان پاسکال) که زوایای ثابت  $X-Y-X$  متناظر با هر ماتریس دوران مفروض را محاسبه کند. به پیوست «ب» مراجعه کنید.

### تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۲)

- اگر در حافظه کامپیوتر شما تابع  $\text{Atan2}$  تعریف نشده است، زیر برنامه‌ای بنویسید که این تابع را تعریف کند.
- به منظور ساده کردن برقراری ارتباط با کامپیوتر، می‌خواهیم جهت‌گیرها را در صفحه با یک زاویه  $\theta$  (به جای ماتریس دوران  $2 \times 2$ ) و بردار مکان چهارچوبها را نیز با دو مؤلفه  $x$  و  $y$  (به جای یک ماتریس  $2 \times 1$ ) نشان دهیم. به عبارت دیگر، در نظر داریم یک چهارچوب را با سه تایی مرتب  $(x, y, \theta)$  به طور کامل مشخص کنیم. زیر برنامه‌ای به زبان پاسکال بنویسید

که تبدیلهای لازم برای این کار را انجام دهد. برای تبدیل  $(x, y, \theta)$  به شکل ماتریسی، زیربرنامه را چنین آغاز کنید

Procedure UTOI (VAR uform: vec3; VAR iform: frame);

که در آن UTOI مخفف "User form TO Internal form" (تبدیل از صورت استفاده کننده به صورت چهارچوب ماتریسی) است. در پرانتز فوق، متغیر اول از نوع سه تایی مرتب  $(x, y, \theta)$ ، و متغیر دوم از نوع چهارچوب به صورت ماتریسی است. چهارچوب شامل یک بردار مکان  $2 \times 1$  و یک ماتریس دوران  $2 \times 2$  است. می توانید چهارچوب را با یک تبدیل همگن  $3 \times 3$  نشان دهید که در آن سطر سوم  $[0 \ 0 \ 1]$  است. زیربرنامه دیگری نیز بنویسید که عکس عمل زیربرنامه اول را انجام دهد، و آن را چنین آغاز کنید:

Procedure ITOU (VAR iform: frame; VAR uform: vec3);

۳. زیربرنامه ای بنویسید که دو تبدیل را در یکدیگر ضرب کند. از دستورالعمل زیر استفاده کنید

Procedure TMULT (VAR brela, crelb, crela: frame);

در پرانتز فوق، دو متغیر اول ورودی، و متغیر سوم خروجی است. توجه کنید که اسامی این متغیرها، کاری را که برنامه انجام می دهد، مشخص می سازد (مثلاً  $brela = {}^A T_B$ ).

۴. زیربرنامه ای بنویسید که یک تبدیل را وارون نماید، و آن را به صورت زیر آغاز کنید

Procedure TINVERT (VAR brela, arelb: frame);

در پرانتز فوق، متغیر اول ورودی و متغیر دوم خروجی است. توجه کنید که اسامی این متغیرها، کاری را که برنامه انجام می دهد، مشخص می نماید (مثلاً  $brela = {}^A T_B$ ).

۵. چهارچوبهای زیر داده شده اند. این چهارچوبها به صورت ورودی به وسیله استفاده کننده (در تمرین ۲) با سه تایی مرتب  $[x \ y \ \theta]$  (که در آن  $\theta$  برحسب درجه است)، به کامپیوتر داده می شود. نموداری مانند شکل (۲-۱۵)، اما در دو بعد، رسم کنید که به طور کیفی ترتیب این چهارچوبها را نشان دهد. برنامه ای بنویسید که بتواند زیربرنامه های TMULT و TINVERT (در تمرینهای ۳ و ۴) را هر چند بار که برای به دست آوردن  ${}^B T_C$  لازم است،

۱. rel در brela به معنای relative (نسبی) است. بنابراین، تبدیل brela، چهارچوب  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف می کند.

احضار کند.

$${}^U_A T = [x \ y \ \theta] = [11,^\circ \quad -1,^\circ \quad 30,^\circ]$$

$${}^B_A T = [x \ y \ \theta] = [0,^\circ \quad 7,^\circ \quad 45,^\circ]$$

$${}^C_U T = [x \ y \ \theta] = [-3,^\circ \quad -3,^\circ \quad -30,^\circ]$$

تبدیل  ${}^B_C T$  را به شکل دستگاه مختصات یا ماتریسی، و به شکل به کار رفته توسط استفاده کننده (سه تایی مرتب)، به وسیله چاپگر در خروجی چاپ نمایید.



## سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر

### ۱-۳ مقدمه

سینماتیک علم حرکت است که حرکت را بدون در نظر گرفتن نیروهای ایجاد کننده آن مطالعه می‌کند. در محدوده علم سینماتیک، مکان، سرعت، شتاب، و همه مشتقهای مرتبه بالاتر از متغیرهای مکان (نسبت به زمان یا هر متغیر یا متغیرهای دیگر) بررسی می‌شود. بدین ترتیب، سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر همه ویژگیهای هندسی و وابسته به زمان حرکت را در بر می‌گیرد. رابطه بین این حرکتها و نیروها و گشتاورهای ایجادکننده آنها به علم دینامیک مربوط می‌شود که موضوع فصل ۶ است.

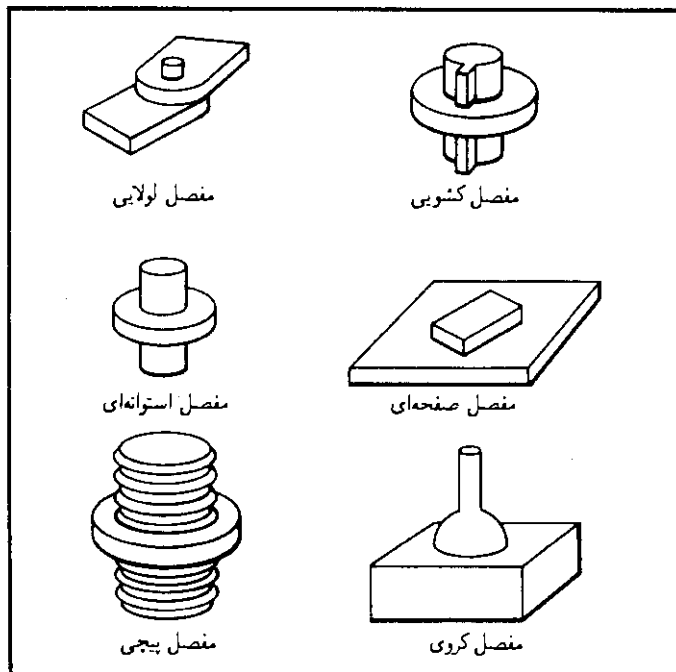
در این فصل، مکان و جهتگیری میله‌بندیهای بازوی مکانیکی ماهر را در وضعیتهای استاتیکی بررسی می‌کنیم. سینماتیک، در فصلهای ۵ و ۶ هنگامی که سرعت و شتاب نیز مطرح می‌شوند، مجدداً بررسی خواهد شد.

به منظور ساده‌تر کردن مطالعه بازوهای مکانیکی ماهر که هندسه پیچیده‌ای دارند، به قسمتهای مختلف آنها چهارچوبهایی را متصل می‌کنیم و سپس رابطه بین این چهارچوبها را به دست می‌آوریم. یکی از مسائلی که در مطالعه سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر مطرح است، چگونگی تغییر این چهارچوبها به هنگام حرکت بازوست. موضوع اصلی در این فصل، معرفی روشی برای محاسبه مکان و جهتگیری مجری نهایی نسبت به پایه آن به صورت تابعی از متغیرهای مفصل است.

### ۲-۳ توصیف رابط

هر بازوی مکانیکی ماهر را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از اجسام صلب در نظر گرفت که به وسیله مفصل به یکدیگر اتصال یافته‌اند. این اجسام را رابط می‌نامند. مفصل دو رابط مجاور را به هم

متصل می‌سازد. اصطلاح اتصال لغزشی برای توصیف اتصال بین دو جسم که حرکت نسبی آنها به صورت لغزش در دو سطح بر روی یکدیگر است، به کار می‌رود. در شکل ۱-۳ انواع اتصالهای لغزشی نشان داده شده‌اند. بنابر ملاحظات طراحی، بازوهای مکانیکی ماهر در حالت کلی از مفصلهایی با تنها یک درجه آزادی تشکیل می‌شوند. بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر دارای مفصلهای لولایی (دورانی) یا مفصلهای لغزشی (کشویی) اند. در موارد نادر که ممکن است مکانیزمی مفصلی با  $n$  درجه آزادی داشته باشد، می‌توان آن را به صورت  $n$  مفصل با یک درجه آزادی که به وسیله  $1 - n$  رابط با طول صفر به یکدیگر پیوند یافته‌اند، مدل‌سازی کرد. بدین ترتیب، بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، تنها بازوهایی را که مفصلهایی با یک درجه آزادی دارند، در نظر خواهیم گرفت. شماره‌گذاری رابطها را از پایه ساکن بازو آغاز می‌کنیم و آن را اتصال شماره ۰ (صفر) می‌نامیم. نخستین عضو متحرک، رابط شماره ۱ است، و عمل شماره‌گذاری به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا به انتهای آزاد بازو، رابط شماره  $n$ ، برسیم. برای تعیین وضعیت کلی مجری نهایی در فضای سه بعدی، به حداقل شش مفصل نیاز است.<sup>۱</sup> بازوهای مکانیکی ماهر، معمولاً پنج یا شش مفصل



شکل ۱-۳ شش حالت ممکن مفصل اتصال لغزشی.

۱. این امر معقول به نظر می‌رسد، زیرا برای توصیف هر جسم در فضا نیز به شش پارامتر، سه پارامتر برای مکان و سه پارامتر برای جهت‌گیری، نیاز داریم.



دارند. برخی روباتها ممکن است به شکل یک زنجیر سینماتیکی ساده نباشند و میله‌بندیهای متوازی‌الاضلاع و سایر سازه‌های سینماتیکی بسته را نیز شامل شوند. نمونه‌ای از چنین بازویی را در بخشهای آینده این فصل، بررسی می‌کنیم.

در یک رابط تنها از روباتی معمولی، مسائلی وجود دارد که طراح باید به آنها توجه کند. برخی از این مسائل عبارت‌اند از نوع ماده به‌کار رفته، استحکام و سختی رابط، مکان و نوع یاتاقانهای مفصل، شکل خارجی، وزن و لختی، و ... اما به هنگام به‌دست آوردن معادله‌های سینماتیکی مکانیزم روبات، هر رابط تنها به‌صورت جسمی صلب که رابطه بین دو محور مفصلی همسایه را در یک بازوی مکانیکی ماهر توصیف می‌کند، در نظر گرفته خواهد شد. محورهای مفصلی در فضا به‌وسیله خطوط تعریف می‌شوند. محور مفصلی  $i$  به‌وسیله خطی در فضا، یا یک بردار تعریف می‌شود که رابط  $i$  حول آن، نسبت به رابط  $i-1$ ، دوران می‌کند. در مطالعه سینماتیکی، هر رابط را می‌توان با دو عدد که مکان نسبی دو محور مفصلی را در فضا تعریف می‌کنند، مشخص کرد. در فضای سه‌بعدی، همواره می‌توان فاصله بین هر دو محور را به‌روشنی تعریف کرد. این فاصله در راستای خطی که بر هر دو محور عمود است (عمود مشترک)، اندازه‌گیری می‌شود. این عمود مشترک همواره وجود دارد و بجز در حالتی که دو محور موازی‌اند، یکتاست. در شکل ۲-۳ رابط  $i-1$  و خط عمود مشترک که طول رابط  $a_{i-1}$ ، در راستای آن اندازه‌گیری می‌شود، نشان داده شده است. راه دیگری برای تجسم پارامتر رابط  $a_{i-1}$ ، در نظر گرفتن استوانه‌ای انبساط یافته است که محور مفصلی  $i-1$  بر محور تقارن آن قرار دارد. هنگامی که استوانه به حدی انبساط یابد که بر محور مفصلی  $i$  مماس شود، شعاع استوانه با  $a_{i-1}$  برابر خواهد شد.

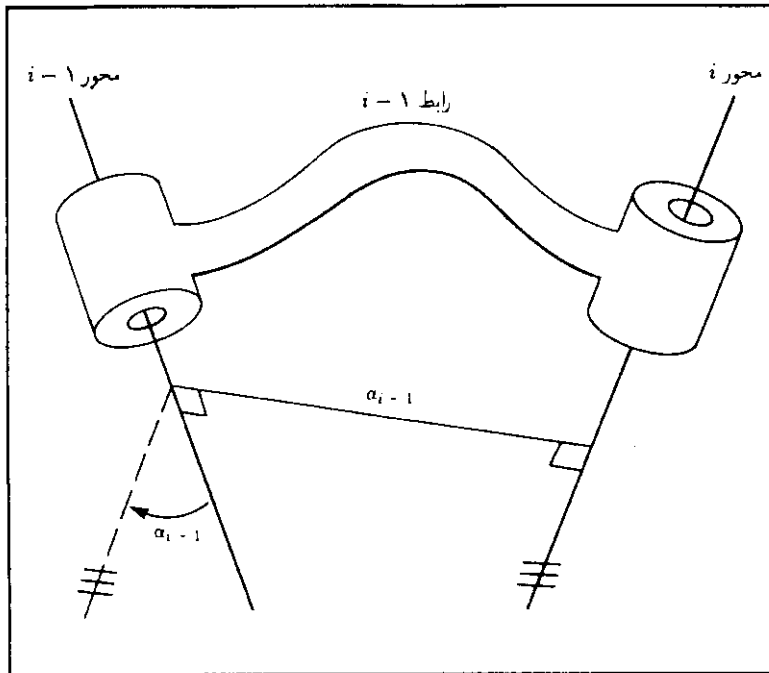
دومین پارامتر لازم برای تعریف مکان نسبی دو محور مفصلی، زاویهٔ پیچش رابط است. در صورتی که صفحه‌ای را بر عمود مشترک دو محور، عمود کنیم، و دو محور  $i-1$  و  $i$  را بر روی این صفحه تصویر کنیم، آنگاه زاویه بین دو محور از محور  $i-1$  به طرف محور  $i$ ، حول  $a_{i-1}$ ، را زاویهٔ پیچش رابط می‌نامیم. زاویهٔ پیچش رابط  $i-1$  را  $\alpha_{i-1}$  خواهیم خواند. در شکل ۲-۳،  $\alpha_{i-1}$  زاویه بین محور  $i-1$  و محور  $i$  است (خطوطی که با سه خط کوتاه علامتگذاری شده‌اند، موازی‌اند). در حالتی که دو محور مفصلی یکدیگر را قطع کنند، زاویهٔ پیچش در صفحهٔ گذرنده از دو محور اندازه‌گیری می‌شود، اما جهت  $\alpha_{i-1}$  نامعین است. در این مورد خاص، علامت  $\alpha_{i-1}$  را می‌توان به اختیار مثبت یا منفی انتخاب کرد.

در این مرحله، باید بتوانید خود را قانع کنید که دو پارامتر گفته شده، طول و زاویهٔ پیچش رابط، را می‌توان برای به‌دست آوردن رابطه میان هر دو خط (در اینجا دو محور) دلخواه در فضا به‌کار برد.

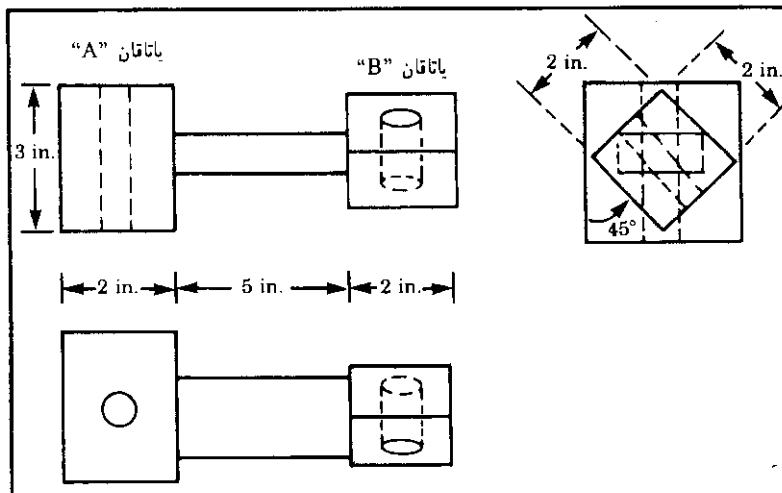
### ■ مثال ۱-۳

در شکل ۳-۳ نقشهٔ یک رابط روبات (در سه تصویر) نشان داده شده است. اگر این رابط در

۱. در این صورت، جهت  $a_{i-1}$  از محور  $i-1$  به سوی  $i$  اختیار خواهد شد.



شکل ۳-۲ عملکرد سینماتیکی هر رابط، ایجاد رابطهای ثابت بین محورهای مفصلی دو سر آن است. این رابطه را می‌توان با دو پارامتر نوشت: طول رابط  $a$ ، و زاویه پیچش رابط،  $\alpha$ .



شکل ۳-۳ یک رابط ساده که دو محور لولایی را به هم مربوط می‌کند.

روبات به صورتی به کار رود که یاتاقان A به مفصل با شماره کوچکتر متصل شود، طول و زاویه پیچش رابط را به دست آورید. مرکز سوراخها را منطبق بر محور یاتاقانها در نظر بگیرید. با توجه به موقعیت سوراخهای دو یاتاقان، دیده می شود که عمود مشترک دو محور مفصلی در راستای میله ارتباط دهنده آنها قرار دارد، پس طول رابط  $Y_{in}$  است. در نیمرخ راست، دو یاتاقان روی صفحه عمود بر عمود مشترک دو محور، تصویر شده اند و بدین ترتیب، زاویه پیچش نیز در همین صفحه اندازه گیری خواهد شد. این زاویه حول عمود مشترک، مطابق با قانون دست راست از محور ۱ -  $z$  به سوی محور  $z$ ، برابر  $45^\circ$  است. ■

### ۳-۳ توصیف اتصال رابط

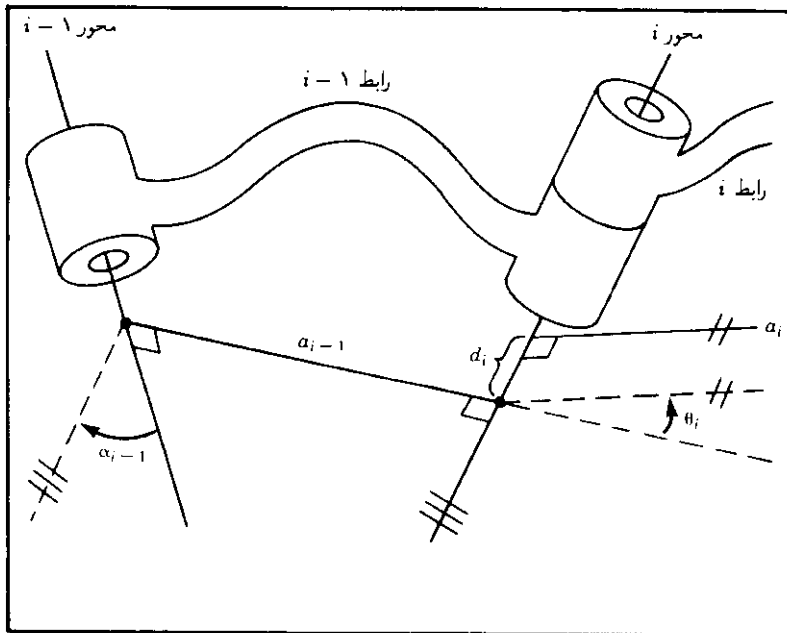
مسئله اتصال رابطها به یکدیگر نیز برای طراح روبات پرسشهای بسیاری به همراه دارد، از جمله چگونگی استحکام مفصل، روغنکاری، نصب یاتاقانها و چرخنده ها، و غیره، اما در بررسی سینماتیکی، ما تنها با دو کمیت که به طور کامل چگونگی اتصال دو رابط را مشخص می کنند، سروکار خواهیم داشت.

#### رابطهای میانی در زنجیر سینماتیکی

رابطهای مجاور محور مفصلی مشترکی دارند. یکی از پارامترهای اتصال رابطها، فاصله بین دو رابط در راستای این محور مشترک است که انحراف رابط نامیده می شود. انحراف محور مفصلی  $z$  را با  $d_z$  نشان می دهند. پارامتر دوم، مقدار زاویه دوران حول این محور مشترک را بین یک رابط و رابط همسایه آن، توصیف می کند. این پارامتر را زاویه مفصلی می نامند و آن را با  $\theta_z$  نشان می دهند. ارتباط متقابل دو رابط ۱ -  $z$  و  $z$  در شکل ۳-۴ دیده می شود. به خاطر بیاورید که  $\alpha_{i-1}$  عمود مشترک بین دو محور رابط ۱ -  $z$  است. به همین ترتیب،  $\alpha_i$  عمود مشترک تعریف شده برای محورهای رابط  $z$  است. نخستین پارامتر در ارتباط متقابل رابطها، انحراف رابط،  $d_i$ ، است که با فاصله جبری (مثبت یا منفی) اندازه گیری شده در راستای محور مفصل  $z$ ، از نقطه برخورد محور با  $\alpha_{i-1}$  تا نقطه برخورد محور با  $\alpha_i$ ، برابر است. انحراف  $d_i$  در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. اگر مفصل کشویی باشد،  $d_i$  متغیر خواهد بود. پارامتر دوم در ارتباط متقابل رابطها، زاویه بین امتداد  $\alpha_{i-1}$  و  $\alpha_i$  است که حول محور مفصل  $z$  اندازه گیری می شود. این زاویه نیز در شکل ۳-۴ نشان داده شده است که در آن خطوط علامتگذاری شده با دو خط کوتاه، با یکدیگر موازی اند. این زاویه که آن را با  $\theta_i$  نمایش می دهند، برای مفصلهای لولایی متغیر است.

#### اولین و آخرین رابطها در زنجیر سینماتیکی

طول رابط،  $a_i$  و زاویه پیچش آن  $\alpha_i$ ، به محورهای مفصلی  $z$  و  $1 + z$  بستگی دارند. بدین ترتیب،  $a_1$  تا  $a_{n-1}$  و  $\alpha_1$  تا  $\alpha_{n-1}$ ، به ترتیبی که در بالا گفته شد، تعریف می شوند. در دو انتهای



شکل ۳-۴ انحراف رابط  $d_i$ ، و زاویه مفصلی  $\theta_i$ ، دو پارامتر به کار رفته برای توصیف ماهیت ارتباط بین دو رابط همسایه‌اند.

زنجر سینماتیکی، مطابق قرارداد همه این کمیتها را برابر صفر اختیار خواهیم کرد. به عبارت دیگر،  $a_n = a_1 = 0$  و  $\alpha_n = \alpha_1 = 0$ . انحراف رابط  $d_i$  و زاویه مفصلی  $\theta_i$  برای مفصلهای ۲ تا  $n-1$  بر طبق قراردادهای شرح داده شده در بالا، قابل تعریف‌اند. اگر مفصل ۱ لولایی باشد، می‌توان برای  $\theta_1$  مکان صفر را در نظر گرفت و  $d_1$  را نیز برابر صفر اختیار کرد. به همین ترتیب اگر مفصل ۱ کشویی باشد، برای  $d_1$  مکان صفر را به دلخواه اختیار می‌کنیم و بر طبق قرارداد،  $\theta_1 = 0$ . این پارامترها برای مفصل  $n$ م نیز عیناً به کار می‌روند.

قراردادهای فوق طوری در نظر گرفته شده‌اند که در حالتی که برای یک کمیت مقداری اختیاری فرض می‌شود، این مقدار برابر صفر باشد تا محاسبات بعدی تا حد امکان ساده شوند.

### پارامترهای رابط

به طوری که دیده شد، هر رابط رویات را می‌توان به طور سینماتیکی با چهار کمیت تعریف کرد. در صورتی که مفصل لولایی باشد، (که معمولاً این طور است)،  $\theta_i$  را متغیر مفصلی و سه پارامتر دیگر را پارامترهای ثابت رابط می‌نامند. در حالتی که مفصل کشویی باشد،  $d_i$  را متغیر مفصلی و سه

۱. در این حالت اصولاً به تعریف  $a_n$  و  $\alpha_n$  نیازی نیست.

کمیت دیگر را پارامترهای ثابت رابط می خوانند. تعریف مکانیزمها به وسیله کمیتهای فوق، قراردادی است که نمادگذاری دناویت-هارتنبگ<sup>۱</sup> نامیده می شود [۱].<sup>۲</sup> روشهای دیگری نیز برای تعریف مکانیزمها ارائه شده اند که در این کتاب به کار نخواهند رفت.

در این مرحله، می توانیم هر مکانیزم دلخواه را بررسی، و پارامترهای توصیف کننده دناویت-هارتنبگ را برای آن تعیین کنیم. برای توصیف کامل سینماتیک ثابت هر روبات دارای شش مفصل، به ۱۸ پارامتر نیاز داریم. در صورتی که روبات شش مفصل لولایی داشته باشد، این ۱۸ پارامتر به صورت شش مجموعه سه تایی مرتب به شکل  $(a_i, \alpha_i, d_i)$  در می آیند.

### ■ مثال ۲-۳

دو رابط از نوع نشان داده در شکل ۳-۳ به منزله رابطهای شماره ۱ و ۲ روباتی به یکدیگر وصل شده اند. مفصل ۲ از باتاقان B رابط شماره ۱ و باتاقان A رابط شماره ۲ تشکیل می شود و ترتیب آن طوری است که سطوح تخت باتاقانهای A و B روی هم قرار می گیرند.  $d_2$  را به دست آورید.

انحراف رابط  $d_2$  برابر با انحراف مفصل ۲، یعنی برابر با فاصله اندازه گیری شده (در راستای محور مفصل ۲)، بین عمود مشترک رابطهای ۱ و ۲ است. با توجه به تصاویر سه گانه نقشه شکل ۳-۳، مقدار  $d_2$  برابر با  $2/\sin$  است. ■

قبل از آوردن مثالهای بیشتر، قراردادی را برای اتصال یک چهارچوب به هر رابط بازوی مکانیکی، تعریف خواهیم کرد.

### ۳-۴ قرارداد برای اتصال چهارچوبها به رابطها

به منظور تعریف مکان هر رابط نسبت به رابطهای مجاور آن، به هر رابط، چهارچوبی متصل خواهیم کرد. چهارچوبهای رابطها، همانند خود آنها شماره گذاری می شوند، یعنی چهارچوب  $\{i\}$  به طور صلب به رابط  $i$  متصل شده است.

#### رابطهای میانی در زنجیر سینماتیکی

قراردادی که برای تعیین مکان چهارچوبها بر روی رابطها به کار می بریم، چنین است: محور  $\hat{Z}$  از چهارچوب  $\{i\}$ ، که  $\hat{Z}_i$  نامیده می شود، منطبق بر محور مفصلی  $i$  اختیار می شود. مبدأ چهارچوب

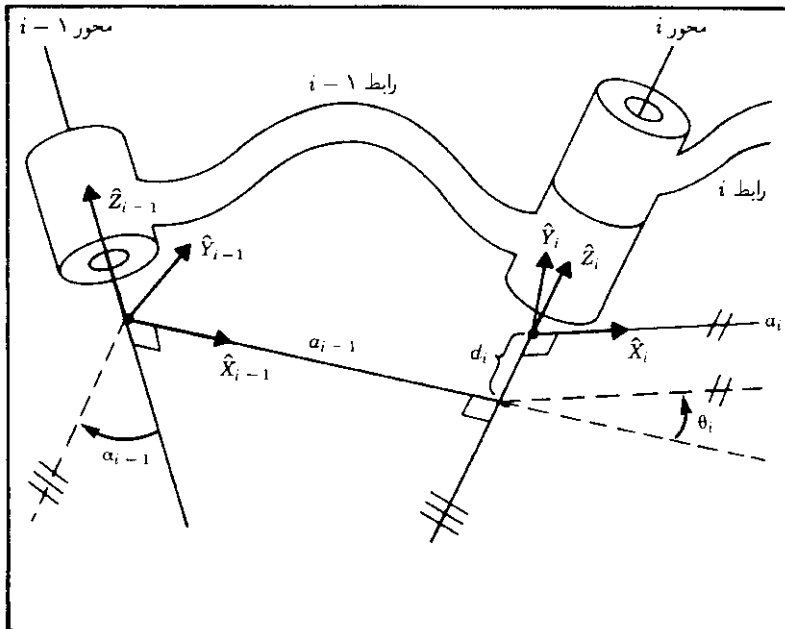
#### 1. Denavit-Hartenberg

۲. قراردادهای دیگری نیز به این نام وضع شده اند که در برخی جزئیات با یکدیگر تفاوت دارند. مثلاً، شماره گذاری دستگاه مختصات در روش ارائه شده در این کتاب، با منابع دیگر نوشته شده درباره روباتیک، متفاوت است. در این کتاب (بر خلاف برخی منابع دیگر روباتیک)، دستگاه  $\{i\}$  به رابط  $i$  متصل است و مبدأ آن بر محور مفصلی  $i$  قرار دارد.

{i} در نقطه تقاطع محور مفصلی i با عمود  $a_i$  قرار می‌گیرد. محور  $\hat{X}_i$  از چهارچوب {i} در راستای  $a_i$  قرار می‌گیرد و جهت آن از رابط i به سوی رابط i + 1 است. در حالتی که  $a_i = 0$ ،  $\hat{X}_i$  عمود بر صفحه گذرنده از  $\hat{Z}_{i+1}$  و  $\hat{Z}_i$  در نظر گرفته می‌شود.  $\alpha_i$  مطابق با قاعده دست راست، حول  $\hat{X}_i$  اندازه‌گیری می‌شود و مشاهده می‌کنیم که انتخاب علامت  $\alpha_i$  در این حالت، به جهت در نظر گرفته شده برای  $\hat{X}_i$  بستگی دارد. محور  $\hat{Y}_i$  نیز با قاعده دست راست تعریف می‌شود و بدین ترتیب چهارچوب i ام را کامل می‌سازد. در شکل ۵-۳ طرز قرارگیری چهارچوبهای {i-1} و {i} برای یک بازوی مکانیکی ماهر در حالت کلی نشان داده شده است.

### اولین و آخرین رابطها در زنجیر سینماتیکی

چهارچوب متصل به پایه روبات، یا رابط ۰ (صفر)، را چهارچوب {۰} خواهیم خواند. این چهارچوب ثابت است و در سینماتیک بازوی مکانیکی می‌توان آن را چهارچوب مرجع در نظر گرفت. مکان همه چهارچوبهای دیگر، نسبت به این چهارچوب توصیف می‌شود.



شکل ۵-۳ چهارچوبها به طور صلب به رابطها متصل می‌شوند به گونه‌ای که چهارچوب {i} به رابط i متصل می‌شود.

چون چهارچوب  $\{0\}$  دلخواه است، ساده‌تر خواهد بود اگر محور  $\hat{Z}_i$  را در امتداد محور ۱ در نظر بگیریم و چهارچوب  $\{0\}$  را نیز طوری اختیار کنیم که وقتی متغیر مفصلی صفر است، بر چهارچوب  $\{1\}$  منطبق شود. با استفاده از این قرارداد، همواره  $a_i = 0^\circ$  و  $\alpha_i = 0^\circ$  خواهد بود. همچنین، اگر مفصل ۱ لولایی باشد،  $d_i = 0^\circ$ ، و اگر کشویی باشد،  $\theta_i = 0^\circ$ . برای مفصل لولایی  $n$ ، جهت  $\hat{X}_N$  را طوری انتخاب می‌کنیم که اگر  $\theta_n = 0^\circ$ ، با  $\hat{X}_{N-1}$  همراستا شود، و مبدأ چهارچوب  $\{N\}$  را نیز طوری در نظر می‌گیریم که  $d_n = 0^\circ$ . برای مفصل کشویی  $n$ ، جهت  $\hat{X}_N$  طوری انتخاب می‌شود که  $\theta_n = 0^\circ$ ، و مبدأ چهارچوب  $\{N\}$  نیز به‌ازای  $d_n = 0^\circ$  بر نقطه تقاطع  $\hat{X}_{N-1}$  و محور مفصلی  $n$  منطبق شود.

بیان خلاصه پارامترهای رابط بر حسب مشخصات چهارچوب هر رابط در صورتی که چهارچوبها مطابق قرارداد فوق به رابطها متصل شوند، تعریفهای زیر برای پارامترهای رابط معتبر خواهد بود:

$$\begin{aligned} a_i &= \text{فاصله بین } \hat{Z}_i \text{ و } \hat{Z}_{i+1} \text{ اندازه‌گیری شده در راستای } \hat{X}_i; \\ \alpha_i &= \text{زاویه بین } \hat{Z}_i \text{ و } \hat{Z}_{i+1} \text{ اندازه‌گیری شده حول } \hat{X}_i; \\ d_i &= \text{فاصله بین } \hat{X}_{i-1} \text{ و } \hat{X}_i \text{ اندازه‌گیری شده در راستای } \hat{Z}_i; \text{ و} \\ \theta_i &= \text{زاویه بین } \hat{X}_{i-1} \text{ و } \hat{X}_i \text{ اندازه‌گیری شده حول } \hat{Z}_i. \end{aligned}$$

معمولاً  $a_i > 0$  انتخاب می‌شود (زیرا معرف فاصله است)، اما  $\alpha_i$ ،  $d_i$  و  $\theta_i$  کمیت‌هایی علامت‌دار هستند.

در اینجا لازم است نکته‌ای دربارهٔ یکتایی چهارچوبها ذکر شود. قرارداد بیان شده در فوق، جواب یکتایی برای اتصال چهارچوبها به رابطها به‌دست نمی‌دهد. علت آن است که در درجهٔ اول هنگامی که  $\hat{Z}_i$  را با محور مفصلی  $i$  همراستا می‌کنیم، برای جهت  $\hat{Z}_i$  دو انتخاب وجود دارد؛ و در درجهٔ دوم، در حالت متقاطع بودن محورهای مفصلی (یعنی  $a_i = 0$ )، برای جهت  $\hat{X}_i$  نیز دو انتخاب وجود دارد (بر حسب چگونگی انتخاب علامت برای عمود بر صفحهٔ گذرنده از  $\hat{Z}_i$  و  $\hat{Z}_{i+1}$ ). هنگامی که محورهای  $i$  و  $i+1$  موازی باشند، انتخاب محل مبدأ چهارچوب  $\{i\}$  اختیاری است (اگر چه معمولاً طوری انتخاب می‌شود که  $d_i$  صفر شود). همچنین، در حالت مفصل کشویی، آزادی بیشتری در تخصیص چهارچوبها وجود دارد (مثال ۳-۵ را ببینید).

### خلاصه روش اتصال چهارچوب به رابط

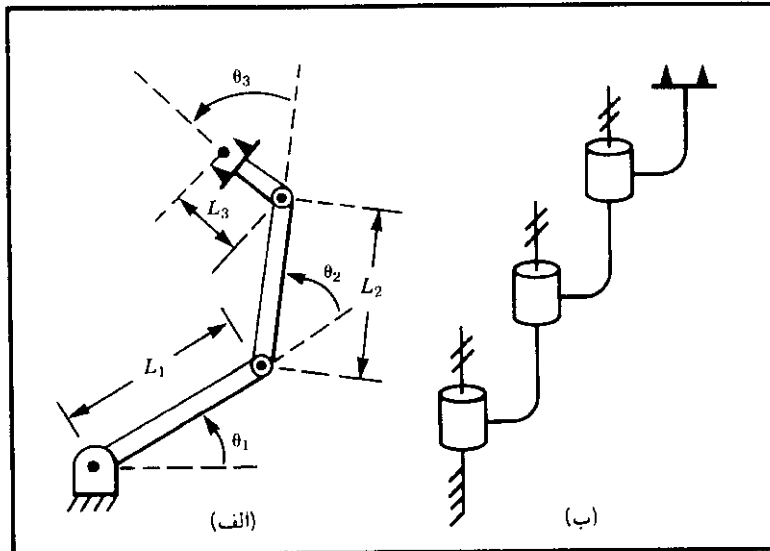
در زیر، خلاصه‌ای از دستورالعمل اتصال چهارچوب به رابط، در حالت کلی ذکر می‌شود:

- محورهای مفصلی را شناسایی کنید و آنها را به‌صورت خطوط نامتناهی امتداد دهید (در ذهن یا روی کاغذ). برای مراحل ۲ تا ۵ دو تا از این خطوط همسایه (واقع بر محورهای  $i$  و  $i+1$ ) را در نظر بگیرید.

۲. عمود مشترک، یا نقطه تقاطع دو محور فوق را تعیین کنید. مبدأ چهارچوب متصل به رابط را در نقطه تقاطع دو محور، یا در نقطه تقاطع عمود مشترک و محور  $\hat{Z}_M$  در نظر بگیرید.
۳. محور  $\hat{Z}_i$  را در راستای محور مفصلی  $\hat{Z}_M$  قرار دهید.
۴. محور  $\hat{X}_i$  را در راستای عمود مشترک در نظر بگیرید، یا اگر محورهای مفصلی یکدیگر را قطع می‌کنند،  $\hat{X}_i$  را عمود بر صفحه گذرنده از دو محور فرض کنید.
۵. محور  $\hat{Y}_i$  را طوری اختیار کنید که دستگاه مختصات راستگردی تشکیل شود.
۶. چهارچوب  $\{0\}$  را طوری اختیار کنید که به ازای صفر شدن اولین متغیر مفصلی، بر چهارچوب  $\{1\}$  منطبق شود. مبدأ  $\{N\}$  و جهت  $\hat{X}_N$  را به اختیار در نظر بگیرید، اما در حالت کلی سعی کنید این دو را طوری انتخاب کنید که تعداد هر چه بیشتری از پارامترهای میله‌بندی صفر شود.

### ■ مثال ۳-۳

در شکل ۳-۶ (الف) یک بازوی صفحه‌ای با سه رابط نشان داده شده است. چون هر سه مفصل این بازو لولایی‌اند، گاه آن را «مکانیزم  ${}^1RRR$  یا  ${}^3R$ » می‌نامند. شکل ۳-۶ (ب) نیز نمایش



شکل ۳-۶ یک بازوی صفحه‌ای با سه رابط. در سمت راست، همین بازو به صورت ساده‌شده شمایک نشان داده شده است. خطوط دوگانه کوتاه بر روی محورها، موازی بودن آنها را نشان می‌دهند.

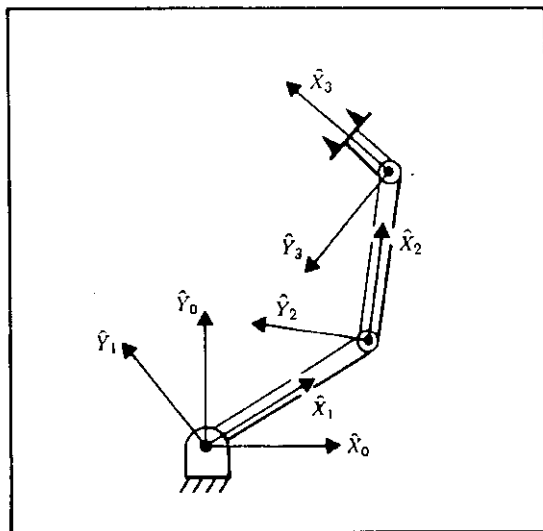


شماتیک همین بازوست. وجود دو خط کوتاه بر روی هر یک از سه محور، موازی بودن آنها را نشان می‌دهد. چهارچوبهای لازم را برای این مکانیزم تعریف کنید و پارامترهای دناویست-هارتنبرگ را برای آن به دست آورید.

ابتدا چهارچوب مرجع  $\{0\}$  را تعریف می‌کنیم. این چهارچوب به پایه مکانیزم متصل است و به ازای صفر شدن اولین متغیر مفصل  $(\theta_1)$ ، بر چهارچوب  $\{1\}$  منطبق می‌شود. بدین ترتیب، چهارچوب  $\{0\}$  مطابق با شکل ۳-۷ به دست می‌آید که در آن  $\hat{Z}_0$  با محور مفصلی ۱ همراستاست. برای این بازو، همه محوره‌های مفصلی عمود بر صفحه آن قرار گرفته‌اند. چون مکانیزم بازو صفحه‌ای است و همه محوره‌های  $\hat{Z}_i$  آن موازی‌اند، انحراف مفصلی وجود نخواهد داشت ( $d_i$ ها همه صفرند). چون همه مفصلها لولایی‌اند، در حالتی که زاویه دوران آنها صفر است، کلیه محوره‌های  $\hat{X}_i$  با یکدیگر همراستا خواهند شد.

با توجه به مطالب گفته شده در بالا، می‌توان به راحتی چهارچوبهای نشان داده شده در شکل ۳-۷ را مشخص کرد. پارامترهای رابط مربوط به هر چهارچوب در شکل ۳-۸ دیده می‌شوند.

توجه کنید که چون همه محوره‌های مفصلی با یکدیگر موازی‌اند و همه محوره‌های  $\hat{Z}_i$  به سمت خارج از صفحه کاغذ (صفحه مکانیزم) اختیار شده‌اند، همه زوایای  $\alpha_i$  صفر خواهند بود. این مکانیزم، آشکارا بسیار ساده است. توجه کنید که تحلیل سینماتیکی ما همواره به چهارچوبی ختم می‌شود که مبدأ آن روی آخرین محور مفصلی قرار دارد؛ بنابراین،  $l_r$  در پارامترهای رابط ظاهر



شکل ۳-۷ شیوه تخصیص چهارچوبها به رابط.

$i$	$\alpha_i - 1$	$\alpha_i - 1$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	$L_1$	0	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$

شکل ۳-۸ پارامترهای رابط مربوط به بازوی مکانیکی صفحه‌ای با سه رابط.

نی‌شود. این قبیل انحرافهای نهایی بازوی مکانیکی، در بخشهای آینده مورد توجه قرار خواهد گرفت.

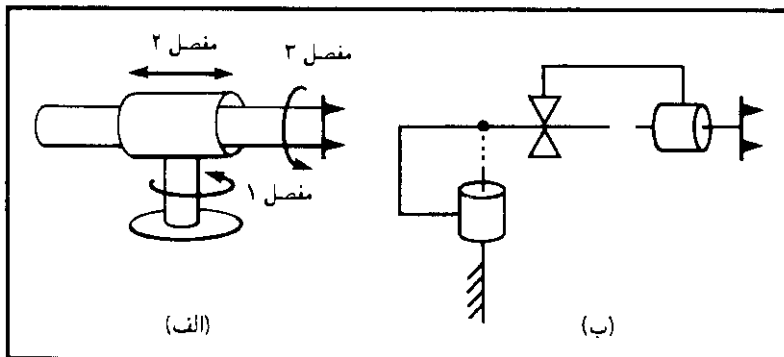
#### ■ مثال ۳-۴

در شکل ۳-۹ (الف) یک روبات با سه درجه آزادی و یک رابط کشویی نشان داده شده است. این بازوی مکانیکی ماهر را می‌توان یک «مکانیزم RPR<sup>۱</sup>» نامید. این نامگذاری، نوع و ترتیب مفصلها را مشخص می‌کند. این روباتی «استوانه‌ای» است که دو مفصل اول آن در تصویر از بالا، متناظر با مختصات قطبی‌اند. مفصل سوم این روبات، امکان حرکت دورانی (غلتش یا رول<sup>۲</sup>) را برای دست مکانیکی فراهم می‌آورد. شکل ۳-۹ (ب) تصویر شماتیک همین روبات را نشان می‌دهد که در آن از علامت خاصی برای مشخص کردن مفصل کشویی استفاده شده است؛ محل برخورد دو محور مجاور نیز به وسیله یک نقطه مشخص شده است. تعامد محوره‌های ۱ و ۲ نیز نشان داده شده است.

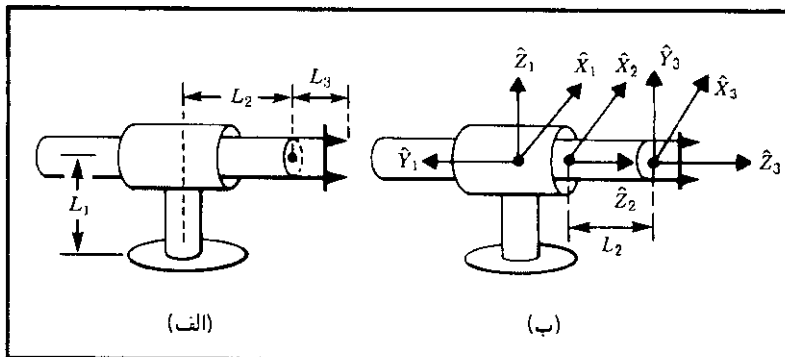
شکل ۳-۱۰ (الف) این بازوی مکانیکی را در حالتی که مفصل کشویی آن به طول مینیمم خود رسیده است، نشان می‌دهد. در شکل ۳-۱۰ (ب) نیز چهارچوبهای متصل به رابط مشخص شده‌اند.

توجه کنید که در این شکل چهارچوب  $\{0\}$  و چهارچوب  $\{1\}$  کاملاً منطبق بر هم نشان داده شده‌اند، زیرا روبات در حالت  $\theta_1 = 0^\circ$  رسم شده است. همچنین، چهارچوب  $\{0\}$ ، اگر چه

1. RPR=Revolute, Prismatic, Revolute      2. Roll



شکل ۹-۳ بازوی مکانیکی ماهر با سه درجه آزادی و یک مفصل کشویی.



شکل ۱۰-۳ چهارچوبهای متصل به بازوی مکانیکی.

در کف پایه روبات نیست، اما به طور صلب به رابط  $^0$ ، قسمت ثابت روبات، متصل شده است. همان طوری که چهارچوبهای رابط برای توصیف سینماتیک روبات تا انتهای دست آن به کار نمی روند، به متصل کردن آنها به پایین ترین قسمت پایه روبات نیز نیازی نیست. تنها کافی است چهارچوب  $\{0\}$  به قسمت غیر متحرکی از رابط  $^0$  متصل شود و چهارچوب  $\{N\}$  (آخرین چهارچوب) نیز متصل به یک قسمت دلخواه از آخرین رابط بازوی مکانیکی، در نظر گرفته شود. انحرافهای بعدی را می توان بعداً در حالت کلی مورد بحث قرار داد.

توجه کنید که مفصلهای دورانی (لولایی)، حول محور  $\hat{Z}$  از چهارچوب متصل به آنها دوران می کنند، در صورتی که مفصلهای کشویی در راستای محور  $\hat{Z}$  می لغزند. در حالتی که مفصل  $i$  کشویی است،  $\theta_i$  ثابت و  $d_i$  متغیر است. اگر  $d_i$  در طول مینیمم مفصل، صفر شود، آن گاه چهارچوب  $\{2\}$  باید مطابق با شکل ۱۰-۳ به جایی متصل شود که  $d_i$  مقدار واقعی انحراف را

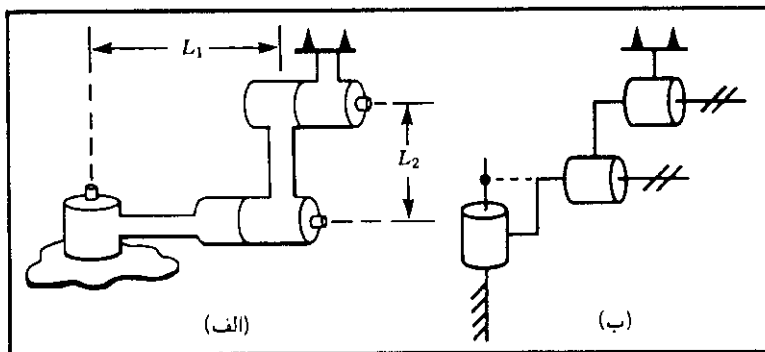
به دست دهد. پارامترهای رابط در شکل ۱۱-۳ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که  $\theta_2$  برای این روبات صفر و  $d_2$  مقداری متغیر است. محورهای ۱ و ۲ یکدیگر را قطع می‌کنند، پس  $\alpha_1$  صفر است. زاویه  $\alpha_1$  نیز باید  $90^\circ$  باشد تا  $\hat{Z}_1$  پس از دوران حول  $\hat{X}_1$  با  $\hat{Z}_2$  همراستا شود. ■

■ مثال ۳-۵

شکل ۱۲-۳ (الف) یک بازوی مکانیکی ۳R (دارای سه مفصل لولایی) را نشان می‌دهد که در آن

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$90^\circ$	0	$d_2$	0
3	0	0	$L_2$	$\theta_3$

شکل ۱۱-۳ پارامترهای رابط برای روبات RPR در مثال ۳-۴.



شکل ۱۲-۳ بازوی مکانیکی ماهر غیر صفحه‌ای با سه رابط.

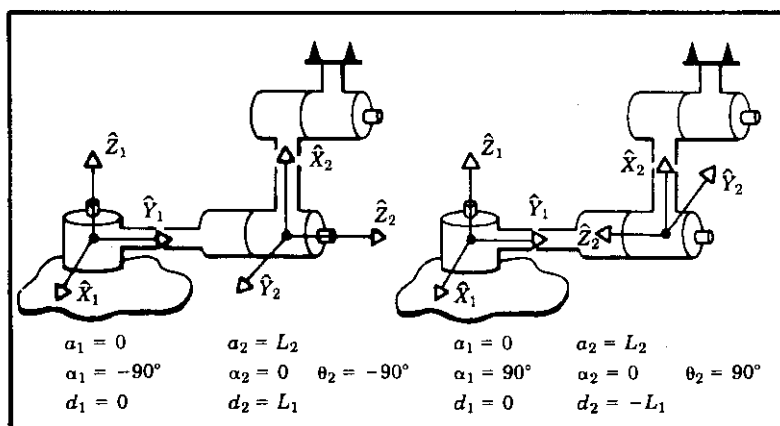
محورهای ۱ و ۲ یکدیگر را قطع می‌کنند، و محورهای ۲ و ۳ با یکدیگر موازی‌اند. تصویر شماتیک سینماتیکی این بازو نیز در شکل ۳-۱۲ (ب) دیده می‌شود. توجه کنید که در این تصویر شماتیک، نشانه‌هایی برای عمود بودن دو محور اول، و موازی بودن دو محور دیگر، به‌کار رفته است. نشان دهید که چهارچوبهای رابط و پارامترهای دناویست‌دهارتنبرگ برای این مکانیزم یکتا نیستند. بدین منظور چند حالت مختلف از دستگاههای {۱} و {۲} را به‌دست آورید. در شکل ۳-۱۳ دو روش تخصیص چهارچوب و پارامترهای متناظر آنها، برای دو جهت ممکن  $\hat{Z}_2$ ، دیده می‌شود.

در حالت کلی، هنگامی که  $\hat{Z}_{i+1}$  و یکدیگر را قطع می‌کنند، برای  $\hat{X}_i$  دو انتخاب وجود دارد. در این مثال، محورهای مفصلی ۱ و ۲ متقاطع‌اند؛ در نتیجه برای جهت  $\hat{X}_1$  دو انتخاب ممکن است. شکل ۳-۱۴ دو حالت دیگر را برای انتخاب چهارچوبها نشان می‌دهد، که با انتخاب دوم جهت  $\hat{X}_1$  متناظرند.

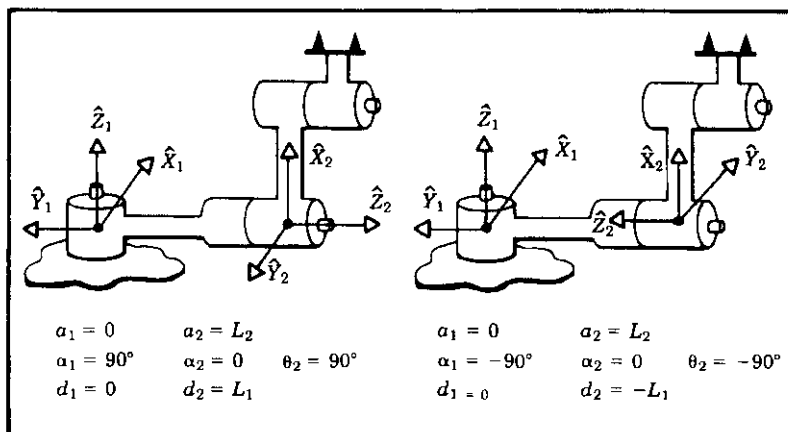
چهار حالت دیگر را نیز می‌توان عیناً مانند فوق، اما در حالتی که جهت  $\hat{Z}_1$  به‌سوی پایین است، در نظر گرفت.

### ۳-۵ سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر

در این بخش، صورت تبدیلی کلی را که چهارچوبهای متصل به رابطهای مجاور را به یکدیگر مربوط می‌سازد، به‌دست خواهیم آورد. سپس این تبدیلیهای کلی منفرد را با یکدیگر ادغام می‌کنیم و مکان و جهتگیری رابط  $n$  را نسبت به رابط ۰ به‌دست می‌آوریم.



شکل ۳-۱۳ دو روش تخصیص چهارچوبهای رابط.



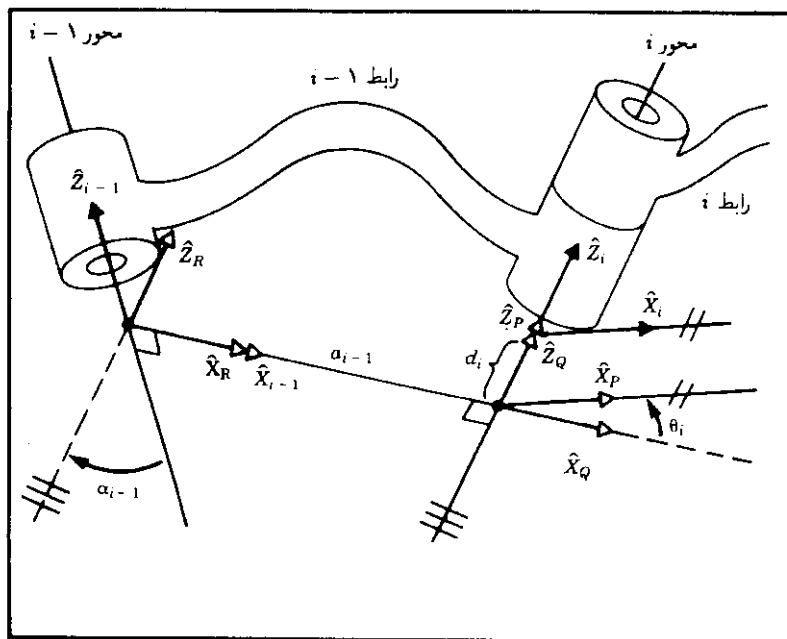
شکل ۳-۱۴ دو روش دیگر برای تخصیص چهارچوبهای رابط.

### محاسبه تبدیلهای هر رابط

در اینجا می‌خواهیم تبدیلی را که چهارچوب  $\{i\}$  را نسبت به چهارچوب  $\{i-1\}$  تعریف می‌کند، تعیین کنیم. در حالت کلی، این تبدیل تابعی از چهار پارامتر رابط خواهد بود. این تبدیل کلی برای روباتی مفروض، تابعی از تنها یک متغیر است، زیرا سه پارامتر دیگر، در هنگام طراحی روبات، تعیین شده‌اند. ما با تعریف یک چهارچوب برای هر رابط، در واقع مسئله سینماتیک روبات را به  $n$  مسئله فرعی تقسیم کرده‌ایم. به منظور حل این مسئله‌های فرعی (به دست آوردن  ${}^{i-1}T_i$ )، هر یک از آنها را دوباره به چهار مسئله فرعیتر بخش خواهیم کرد. هر یک از این چهار تبدیل کلی، تابعی از تنها یک پارامتر رابط خواهد بود و به قدری ساده است که شکل آن را می‌توان به روش «جستجو» پیدا کرد. کار را با تعریف سه چهارچوب میانی (واسطه) برای هر رابط (چهارچوبهای  $\{P\}$ ،  $\{Q\}$ ، و  $\{R\}$ ) آغاز می‌کنیم.

در شکل ۳-۱۵، چهارچوبهای میانی  $\{P\}$ ،  $\{Q\}$ ، و  $\{R\}$  برای دو مفصل همسایه نشان داده شده است. توجه کنید که به منظور جلوگیری از پیچیده شدن شکل، برای هر چهارچوب تنها محوره‌های  $\hat{X}$  و  $\hat{Z}$  رسم شده‌اند. تفاوت چهارچوب  $\{R\}$  با چهارچوب  $\{i-1\}$  تنها در یک دوران به اندازه  $\alpha_{i-1}$  است و تفاوت دستگاه  $\{Q\}$  با  $\{R\}$  در یک انتقال به مقدار  $a_{i-1}$  است. تفاوت چهارچوب  $\{P\}$  با  $\{Q\}$  نیز در یک دوران به اندازه  $\theta_i$ ، و سرانجام تفاوت  $\{i\}$  با  $\{P\}$  در یک انتقال به اندازه  $d_i$  است. در صورتی که بخواهیم تبدیلی کلی را به دست آوریم که بردارهای تعریف شده در چهارچوب  $\{i\}$  را در چهارچوب  $\{i-1\}$  توصیف کند، باید بنویسیم

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}T_R \quad {}^RQ \quad {}^QP \quad {}^PT_i \quad {}^iP \quad (۱-۳)$$


 شکل ۱۵-۳ محل قرارگیری چهارجوبهای میانی  $\{P\}$ ،  $\{Q\}$ ، و  $\{R\}$ .

یا

$${}^{i-1}P = {}_i^{i-1}T \quad {}^iP \quad (2-3)$$

که در آن

$${}_i^{i-1}T = {}_R^{i-1}T \quad {}_Q^RT \quad {}_P^QT \quad {}_i^PT \quad (3-3)$$

با توجه به هریک از این تبدیلهای، می‌توان (۳-۳) را چنین نوشت:

$${}_i^{i-1}T = R_X(\alpha_{i-1}) \quad D_X(a_{i-1}) \quad R_Z(\theta_i) \quad D_Z(d_i) \quad (4-3)$$

یا

$${}_i^{i-1}T = \text{Screw}_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Screw}_Z(d_i, \theta_i) \quad (5-3)$$

که در آن نمادگذاری  ${}^i\text{Screw}_Q(r, \phi)$  به معنای یک انتقال در راستای محور  $\hat{Q}$  به اندازه  $r$ ، و یک Screw در انگلیسی به معنای «پیچ» است.

دوران حول همان محور به اندازه زاویه  $\phi$  است. با انجام عمل ضرب در رابطه (۴-۳)، تبدیل کلی  ${}^{i-1}_i T$  چنین به دست می‌آید

$${}^{i-1}_i T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

### ■ مثال ۶-۳

با استفاده از پارامترهای رابط نشان داده شده در شکل ۳-۱۱ برای روبات شکل ۳-۹، تبدیلهای کلی مربوط به هر رابط را به دست آورید. با جایگزین کردن پارامترها در رابطه (۶-۳) داریم

$$\begin{aligned} {}^0_1 T &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^1_2 T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2_3 T &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-3)$$

پس از به دست آوردن این تبدیلهای کلی رابطها، بهتر است صحت آنها را با عقل سلیم امتحان کنیم. مثلاً، عنصرهای ستون چهارم هر تبدیل، باید مختصات مبدأ چهارچوب بعدی (با شماره بزرگتر) را به دست دهد. ■

### ادغام تبدیلهای کلی در زنجیر سینماتیکی

پس از تعریف چهارچوبهای رابطها و به دست آوردن پارامترهای رابط متناظر با آنها، می‌توان به آسانی معادله‌های سینماتیکی را پی‌ریزی کرد. با استفاده از مقادیر پارامترهای رابط، می‌توان ماتریسهای



تبدیل کلی را برای هر رابط محاسبه کرد. سپس به وسیله ضرب ماتریسهای تبدیل رابطها در یکدیگر، می توان ماتریس تبدیل کلی منفردی را که چهارچوب  $\{N\}$  را به چهارچوب  $\{0\}$  مربوط می سازد، به دست آورد:

$${}^N_N T = {}^N_N T \cdot {}^N_N T \cdot {}^N_N T \cdots {}^N_N T \quad (۸-۳)$$

تبدیل کلی  ${}^N_N T$  در فوق، تابعی از همه متغیرهای مفصلی ( $n$  متغیر) است. چنانچه مکان مفصلهای روبات توسط حساسه های مکانی معین شده باشد، می توان مکان و جهتگیری آخرین رابط را با محاسبه  ${}^N_N T$  در مختصات دکارتی به دست آورد.

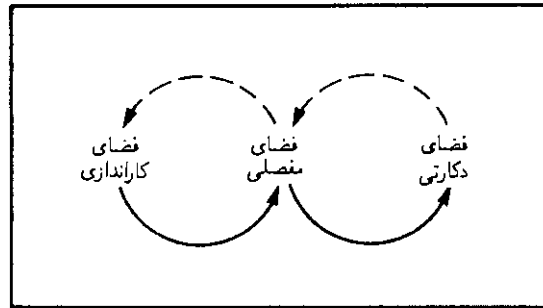
### ۳-۶ فضای کاراندازی، فضای مفصلی، و فضای دکارتی

مکان کلیه رابطهای هر بازوی مکانیکی ماهر با  $n$  درجه آزادی را می توان با مجموعه ای از  $n$  متغیر مفصلی توصیف کرد. این مجموعه متغیرها را غالباً با یک بردار  $n \times 1$  به نام بردار مفصل نشان می دهند. فضای کلیه این بردارهای مفصل را نیز فضای مفصلی می نامند. در این فصل، تابه حال در پی محاسبه فضای دکارتی برحسب فضای مفصلی بوده ایم. اصطلاح فضای دکارتی را در حالتی به کار خواهیم برد که مکان در راستای محوره های عمود برهم، و جهتگیری بر حسب هر یک از قراردادهای ذکر شده در فصل ۲ اندازه گیری شود. گاهی به جای اصطلاح فضای دکارتی، از عبارات فضای نشانگر وظایف یا فضای عملیاتی نیز استفاده خواهیم کرد.

پیش از این، به طور ضمنی فرض کردیم که هر مفصل سینماتیکی مستقیماً به وسیله نوعی کارانداز، فعال می شود. اما در بسیاری از روباتهای صنعتی، این گفته صادق نیست. مثلاً گاهی دو کارانداز در کنار یکدیگر، به صورت یک مجموعه تفاضلی (دیفرانسیلی) برای حرکت دادن یک مفصل تنها به کار می روند، یا گاهی از یک کارانداز خطی برای دوران دادن یک مفصل لولایی به وسیله اهرم بندی چهارمیله ای استفاده می شود. در چنین مواردی، توجه به مکان کاراندازها مفید خواهد بود. از آنجا که حساسه های به کار رفته برای اندازه گیری مکان بازوی مکانیکی ماهر، اغلب در محل کاراندازها قرار دارند، برای به دست آوردن بردار مفصل به صورت تابعی از مجموعه مقادیر کارانداز، یا بردار کارانداز، باید محاسباتی را انجام داد.

به طوری که در شکل ۳-۱۶ دیده می شود، مکان و جهتگیری هر بازوی مکانیکی ماهر را به سه شیوه می توان نمایش داد: توصیف بازو در فضای کاراندازی، توصیف بازو در فضای مفصلی، و توصیف بازو در فضای دکارتی. در این فصل، نگاهی را که در شکل ۳-۱۶ با خطوط پر نمایش داده شده اند، مورد توجه قرار خواهیم داد. سپس در فصل ۴، نگاهی واریون نشان داده شده با خط چین را بررسی خواهیم کرد.

اتصال کاراندازها برای حرکت دادن یک مفصل، به روشهای گوناگون صورت می گیرد و اگر چه می توان فهرستی از آنها تهیه کرد، اما در اینجا این کار را نخواهیم کرد. برای هر روباتی که طراحی یا



شکل ۱۶-۳ نگرشهای بین فضاهای سینماتیکی.

تحلیل می‌کنیم، باید ارتباط بین مکان کاراندازها و مکان مفصلها را پیدا کنیم. در بخش زیر مسئله نمونه‌ای را برای یک روبات صنعتی حل خواهیم کرد.

### ۷-۳ مثالها: سینماتیک دو روبات صنعتی

روباتهای صنعتی هم اکنون در پیکربندیهای سینماتیکی گوناگون، در دسترس اند [۲]، [۳]. در این بخش، سینماتیک دو روبات صنعتی را تحلیل خواهیم کرد. ابتدا روبات یونیمیشن پیوما ۵۶۰ را در نظر می‌گیریم. همه مفصلهای این روبات لولایی، و تعداد درجات آزادی آن شش است. حال معادله‌های سینماتیکی را به صورت تابعهایی از زوایای مفصلی به دست خواهیم آورد. در این مثال، رابطه بین فضای کاراندازی و فضای مفصلی را محاسبه می‌کنیم. در مثال دوم، روبات یازوکاوا موتومان ۳-L را بررسی خواهیم کرد. این روبات، پنج درجه آزادی دارد و مفصلهای آن لولایی هستند. این مثال به طور کامل حل می‌شود و در آن تبدیلهای کلی مختصات کاراندازی به مفصلی، محاسبه خواهد شد. در بار اول مطالعه این کتاب، می‌توان این مثال را ندیده گرفت.

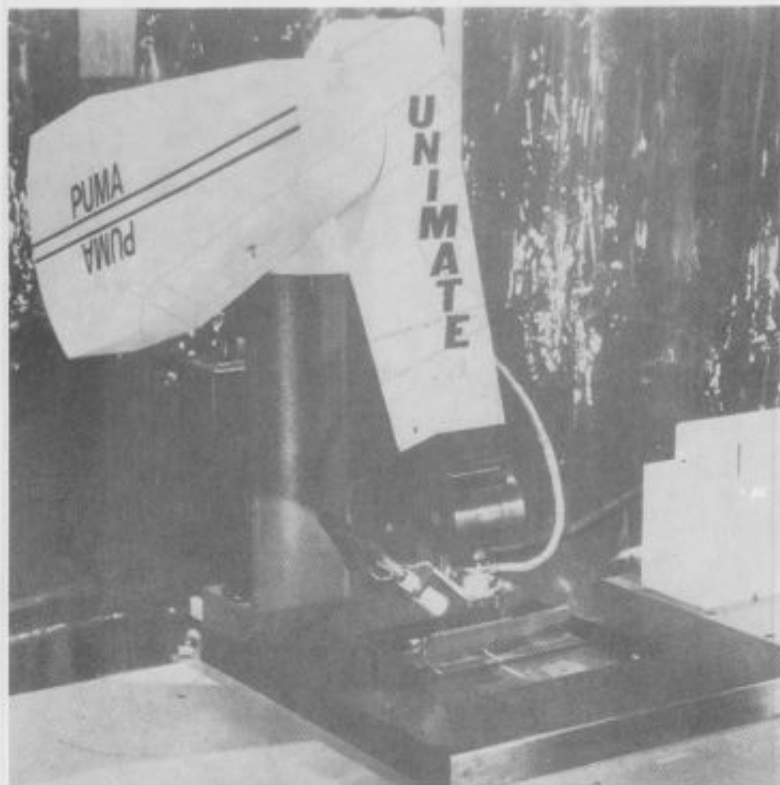
#### روبات پیوما ۵۶۰

این روبات (شکل ۳-۱۷) مفصلهای لولایی و شش درجه آزادی دارد (پس یک مکانیزم  $6R$  است). در شکل ۳-۱۸، همین روبات با چهارچوبهای رابط آن، در حالتی که کلیه زوایای مفصلی برابر صفرند<sup>۲</sup>، نشان داده شده است. در شکل ۳-۱۹ نیز جزئیات اتصالات ساعد روبات مشخص شده است.

توجه کنید که چهارچوب  $\{0\}$  (در شکل نشان داده نشده است) هنگامی که  $\theta_1$  صفر است، بر چهارچوب  $\{1\}$  منطبق می‌شود. همچنین، در این روبات نیز مانند بسیاری روباتهای صنعتی

1. Unimation PUMA 560      2. Yasukawa Motoman L-3

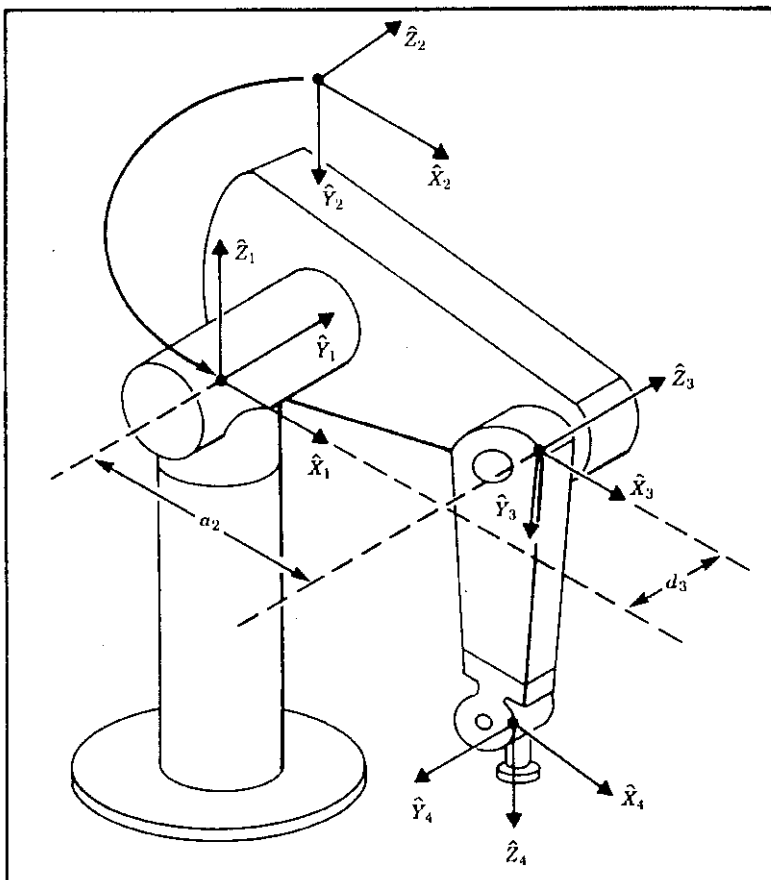
۳. یونیشن، قراردادی کمی مغایرت با قرارداد ما برای موقعیت صفر مفصلها دارد، و رابطه  $\theta_2^* = \theta_2 - 180^\circ$  را به کار می‌برد که در آن  $\theta_2^*$  مکان مفصل ۳ است.



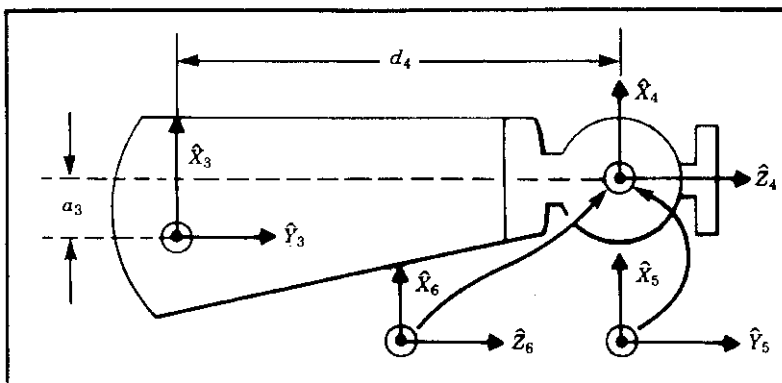
شکل ۳-۱۷ روبات یونیمین پیوما ۵۶۰.

دیگر، محورهای مفصلی ۴، ۵، و ۶ در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، و این نقطه برخورد بر مبدأ چهارچوبهای {۴}، {۵}، و {۶} منطبق است. به علاوه، محورهای مفصلی ۴، ۵، و ۶ دو پدو بر هم عمودند. این سه محور که مکانیزم میج دست روبات را تشکیل می‌دهند، در شکل ۳-۲۰ نشان داده شده‌اند.

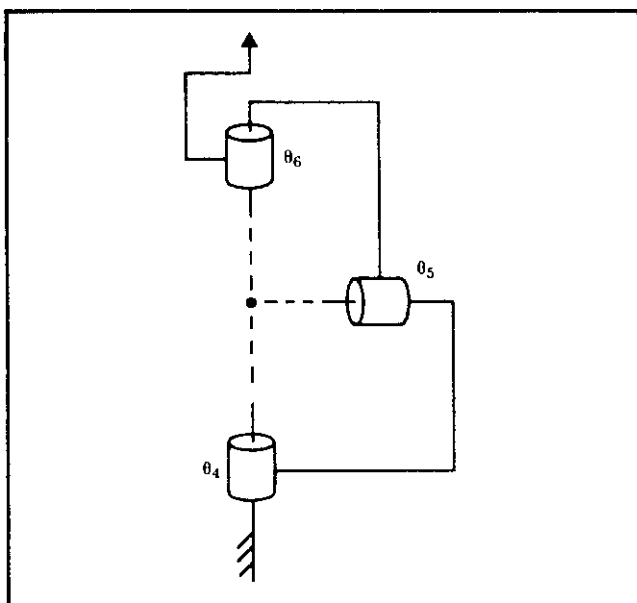
پارامترهای رابط متناظر با این چهارچوبها، در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده است. در روبات پیوما ۵۶۰، یک سیستم چرخنده که در داخل میج دست روبات قرار دارد، حرکات مفصلهای ۴، ۵، و ۶ را با یکدیگر توأم می‌کند. این بدان معناست که در مورد این سه مفصل، باید بین فضای مفصلی و فضای کاراندازی تفاوت قائل شویم و معادله‌های کامل سینماتیکی را در دو مرحله حل کنیم. اما در این مثال، تنها تبدیل از فضای مفصلی به فضای دکارتی را در نظر خواهیم گرفت.



شکل ۳-۱۸ چهارچوبهای رابط و برخی پارامترهای سینماتیکی روبات پیوما ۵۶°.



شکل ۳-۱۹ پارامترهای سینماتیکی و چهارچوبهای اختصاص یافته به ساعد روبات پیوما ۵۶°.



شکل ۳-۲۰ تصویر شماتیک میج دست از نوع  $3R$  که در آن هر سه محور در نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند و دوبه‌دو بر هم عمودند. این مکانیزم علاوه بر پیوما  $56^\circ$ ، در بسیاری از روبانهای صنعتی دیگر نیز به‌کار رفته است.

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\theta_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$\theta_3$
4	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	$-90^\circ$	0	0	$\theta_6$

شکل ۳-۲۱ پارامترهای رابط برای روبات پیوما  $56^\circ$ .

با توجه به رابطه (۳-۶) هر یک از تبدیلهای کلی رابطها چنین نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned}
 {}^0_1T &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^1_2T &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2_3T &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3_4T &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4_5T &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^5_6T &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

حال می‌توان با ضرب ماتریسی هر یک از ماتریسهای رابطها، تبدیل کلی  ${}^0_6T$  را محاسبه کرد. در حین انجام این ضرب، نتایجی را بیان خواهیم کرد که به هنگام به‌دست آوردن تبدیلهای وارون در فصل ۴ مفید خواهند بود. ابتدا  ${}^0_5T$  و  ${}^5_6T$  را در هم ضرب می‌کنیم

$${}^0_6T = {}^0_5T \cdot {}^5_6T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱۰-۳}$$

مثالها: سینماتیک دو روبات صنعتی ۱۰۱

که در آن  $s_\theta = \sin \theta$ ,  $c_\theta = \cos \theta$ , ... . سپس حاصل ضرب  ${}^2T$  و  ${}^1T$  را به دست می آوریم

$${}^2T = {}^1T \quad {}^2T = \begin{bmatrix} c_\tau c_\delta c_\phi - s_\tau s_\phi & -c_\tau c_\delta s_\phi - s_\tau c_\phi & -c_\tau s_\delta & a_\tau \\ s_\delta c_\phi & -s_\delta s_\phi & c_\delta & d_\tau \\ -s_\tau c_\delta c_\phi - c_\tau s_\phi & s_\tau c_\delta s_\phi - c_\tau c_\phi & s_\tau s_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11-3)$$

چون مفصلهای ۲ و ۳ همواره موازی اند، برای اینکه آسانتر به نتیجه نهایی برسیم، ابتدا  ${}^1T$  و  ${}^2T$  را در هم ضرب می کنیم، و فرمولهای مجموع زوایا را به کار می بریم. این کار را می توان هر جا که دو مفصل لولایی با محورهای موازی وجود دارند، انجام داد

$${}^1T = {}^1T \quad {}^1T = \begin{bmatrix} c_{\tau\tau} & -s_{\tau\tau} & 0 & a_\tau c_\tau \\ 0 & 0 & 1 & d_\tau \\ -s_{\tau\tau} & -c_{\tau\tau} & 0 & -a_\tau s_\tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12-3)$$

که در آن، از فرمولهای مجموع زوایا (یوست الف) استفاده کرده ایم

$$c_{\tau\tau} = c_\tau c_\tau - s_\tau s_\tau$$

$$s_{\tau\tau} = c_\tau s_\tau + s_\tau c_\tau$$

پس نتیجه می شود

$${}^1T = {}^1T \quad {}^2T = \begin{bmatrix} {}^1T_{11} & {}^1T_{12} & {}^1T_{13} & {}^1p_x \\ {}^1T_{21} & {}^1T_{22} & {}^1T_{23} & {}^1p_y \\ {}^1T_{31} & {}^1T_{32} & {}^1T_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن

$${}^1T_{11} = c_{\tau\tau}[c_\tau c_\delta c_\phi - s_\tau s_\phi] - s_{\tau\tau}s_\delta s_\phi$$

$${}^1T_{21} = -s_\tau c_\delta c_\phi - c_\tau s_\phi$$

$${}^1T_{31} = -s_{\tau\tau}[c_\tau c_\delta c_\phi - s_\tau s_\phi] - c_{\tau\tau}s_\delta c_\phi$$

۱. برحسب آنکه برای نوشتن عبارتها چه مقدار جا در اختیار داریم، هر یک از نمادهای  $c_\theta$ ,  $s_\theta$ , و یا  $\cos \theta$  را به کار می بریم.

$$\begin{aligned}
 {}^1r_{12} &= -c_{22}[c_2c_\delta s_\phi + s_2c_\phi] + s_{22}s_\delta s_\phi \\
 {}^1r_{22} &= s_2c_\delta s_\phi - c_2c_\phi \\
 {}^1r_{32} &= s_{22}[c_2c_\delta s_\phi + s_2c_\phi] + c_{22}s_\delta s_\phi \\
 {}^1r_{13} &= -c_{22}c_2s_\delta - s_{22}c_\delta \\
 {}^1r_{23} &= s_2s_\delta \\
 {}^1r_{33} &= s_{22}c_2s_\delta - c_{22}c_\delta \\
 {}^1p_x &= a_2c_2 + a_2c_{22} - d_2s_{22} \\
 {}^1p_y &= d_2 \\
 {}^1p_z &= -a_2s_{22} - a_2s_2 - d_2c_{22}
 \end{aligned} \tag{۱۳-۳}$$

سرانجام، حاصل ضرب هر شش ماتریس تبدیل رابطها به دست می آید

$${}^0T = {}^1T {}^2T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= c_1[c_{22}(c_2c_\delta c_\phi - s_2s_\phi) - s_{22}s_\delta c_\phi] + s_1(s_2c_\delta c_\phi + c_2s_\phi) \\
 r_{21} &= s_1[c_{22}(c_2c_\delta c_\phi - s_2s_\phi) - s_{22}s_\delta c_\phi] - c_1(s_2c_\delta c_\phi + c_2s_\phi) \\
 r_{31} &= -s_{22}(c_2c_\delta c_\phi - s_2s_\phi) - c_{22}s_\delta c_\phi \\
 r_{12} &= c_1[c_{22}(-c_2c_\delta s_\phi - s_2c_\phi) + s_{22}s_\delta s_\phi] + s_1(c_2c_\phi - s_2c_\delta s_\phi) \\
 r_{22} &= s_1[c_{22}(-c_2c_\delta s_\phi - s_2c_\phi) + s_{22}s_\delta s_\phi] - c_1(c_2c_\phi - s_2c_\delta s_\phi) \\
 r_{32} &= -s_{22}(-c_2c_\delta s_\phi - s_2c_\phi) + c_{22}s_\delta s_\phi \\
 r_{13} &= -c_1(c_{22}c_2s_\delta + s_{22}c_\delta) - s_1s_2s_\delta \\
 r_{23} &= -s_1(c_{22}c_2s_\delta + s_{22}c_\delta) + c_1s_2s_\delta \\
 r_{33} &= s_{22}c_2s_\delta - c_{22}c_\delta \\
 p_x &= c_1[a_2c_2 + a_2c_{22} - d_2s_{22}] - d_2s_1 \\
 p_y &= s_1[a_2c_2 + a_2c_{22} - d_2s_{22}] + d_2c_1 \\
 p_z &= -a_2s_{22} - a_2s_2 - d_2c_{22}
 \end{aligned} \tag{۱۴-۳}$$

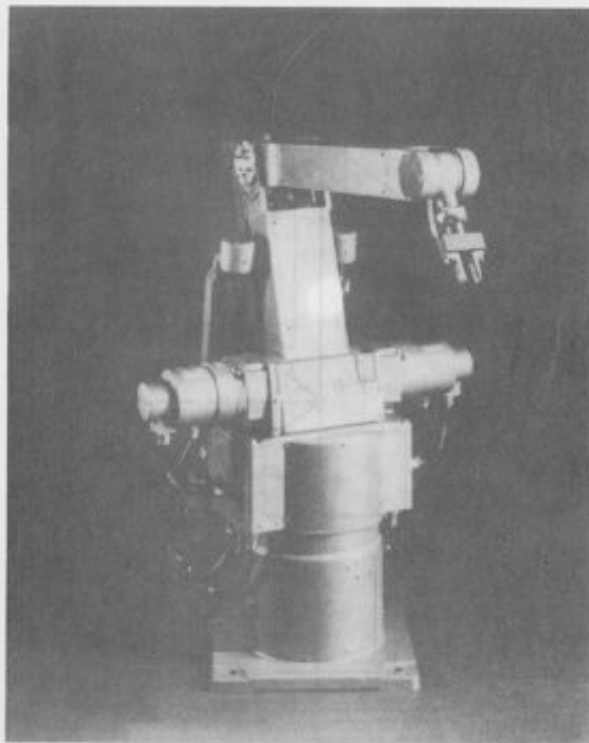


معادله‌های (۳-۱۴)، معادله‌های سینماتیکی روبات پیوما ۵۶۰ هستند و چگونگی محاسبه مکان و جهتگیری چهارچوب {۶} را برحسب چهارچوب {۰} نشان می‌دهند. این معادله‌ها برای هر گونه تحلیل سینماتیکی این روبات، به‌کار می‌روند.

### روبات یازوکاوا موتومان L-۳

این روبات، یکی از بازوهای مکانیکی ماهر بسیار رایج در صنعت است و ۵ درجه آزادی دارد (شکل ۳-۲۲). برخلاف روباتهایی که تاکنون در این کتاب دیده‌ایم، این روبات یک زنجیر سینماتیکی ساده و باز نیست، بلکه دو کارانداز خطی دارد که با اهرم‌بندیهای چهارمیله‌ای به رابطهای ۲ و ۳ متصل شده‌اند. مفصلهای ۴ و ۵ نیز به‌وسیله دو کارانداز و یک رانش زنجیری، به‌طور دیفرانسیلی، به حرکت در می‌آیند.

در این مثال، معادله‌های سینماتیکی را در دو مرحله حل می‌کنیم. ابتدا با استفاده از مکان کاراندازها، زوایای مفصلی را به‌دست می‌آوریم. سپس مکان و جهتگیری آخرین رابط را در فضای



شکل ۳-۲۲ روبات یازوکاوا موتومان L-۳.

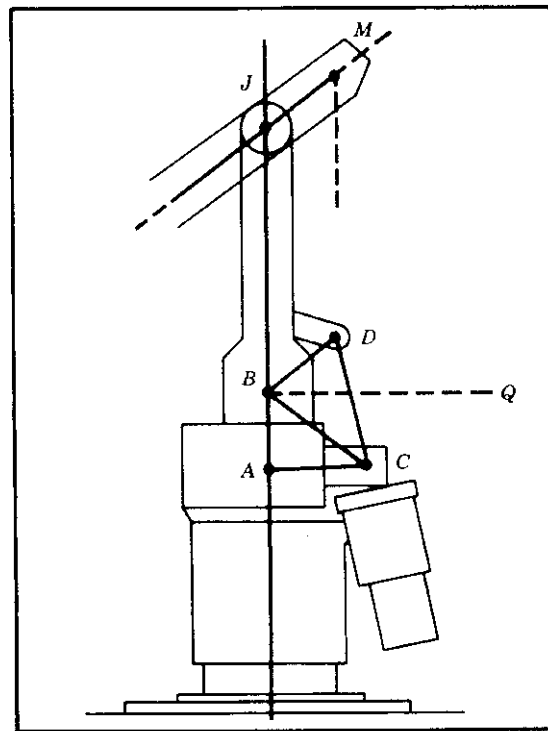
دکارتی برحسب زوایای مفصلی محاسبه می‌کنیم. در مرحله دوم، می‌توان این سیستم را به صورت یک زنجیر سینماتیکی باز  $5R$  در نظر گرفت.

در شکل ۳-۲۳، مکانیزمی که کارانداز شماره ۲ را به رابطهای ۲ و ۳ از روبات متصل می‌کند، نشان داده شده است. این کارانداز از نوع خطی است و مستقیماً طول میله  $DC$  را کنترل می‌کند. مثلث  $ABC$  و طول  $BD$  ثابت است. مفصل ۲ می‌تواند حول نقطه  $B$  دوران کند، و هنگامی که مکانیزم حرکت می‌کند، کارانداز کمی حول نقطه  $C$  می‌گردد. برای مقادیر ثابت (طولها و زاویه‌ها) مربوط به کارانداز ۲، از نمادهای زیر استفاده شده است

$$\gamma_r = AB, \quad \phi_r = AC, \quad \alpha_r = BC$$

$$\beta_r = BD, \quad \Omega_r = \angle JBD, \quad l_r = BJ$$

و برای متغیرها، نمادهای زیر به کار رفته‌اند



شکل ۳-۲۳ جزئیات سینماتیکی مکانیزم کارانداز شماره ۲ میله‌بندی یازوکاوا.

$$\theta_2 = -\angle JBQ, \quad \psi_2 = \angle CBD, \quad g_2 = DC$$

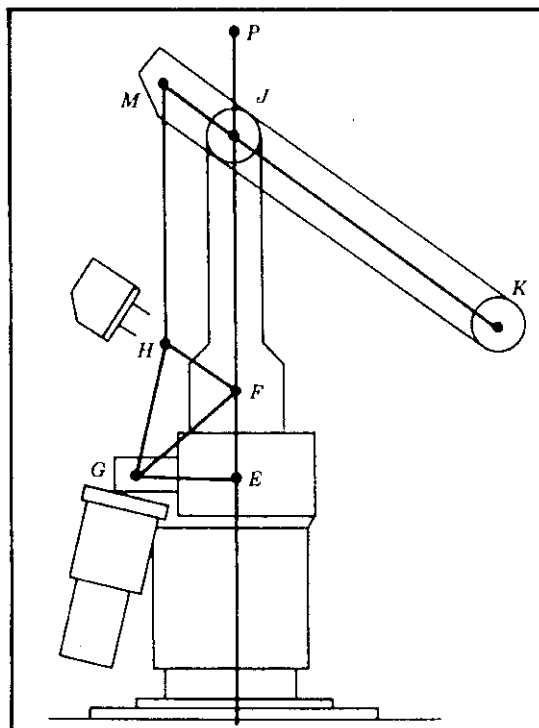
در شکل ۲۴-۳ مکانیزم میله‌بندی که کارانداز ۳ را به رابطهای ۲ و ۳ روبات متصل می‌کند، نشان داده شده است. کارانداز خطی است و طول میله  $HG$  را مستقیماً کنترل می‌کند. مثلث  $EFG$  و طول  $FH$  ثابت است. مفصل ۳ حول نقطه  $J$  لولا شده است و کارانداز در هنگام حرکت مکانیزم، کمی حول نقطه  $G$  دوران می‌کند. مقادیر ثابت کارانداز ۳ با نمادهای زیر مشخص شده‌اند

$$\gamma_2 = EF, \quad \phi_2 = EG, \quad \alpha_2 = GF$$

$$\beta_2 = HF, \quad l_2 = JK$$

و به متغیرها اسامی زیر داده شده است

$$\theta_2 = \angle PJK, \quad \psi_2 = \angle GFH, \quad g_2 = GH$$



شکل ۲۴-۳ جزئیات مکانیزم کارانداز ۳ در میله‌بندی یازوکاوا.

در ترتیب فوق از کاراندازها و میله‌بندی کارانداز ۲، برای استقرار مفصل ۲ استفاده می‌شود، و در حین این عمل، کارانداز ۳ جهتگیری خود نسبت به پایهٔ روبات را حفظ می‌کند. کارانداز ۳ برای تنظیم جهتگیری رابط ۳ نسبت به پایهٔ روبات (و نه نسبت به رابط قبل از خود، به‌طوری که در روباتهای زنجیر سینماتیکی معمول است) به‌کار می‌رود. یکی از دلایل انتخاب چنین آرایشی از میله‌بندیها، افزایش صلابت سازه‌ای میله‌بندیهای اصلی روبات است. این افزایش صلابت غالباً باعث افزایش دقت روبات می‌شود.

کاراندازهای مفصلهای ۴ و ۵ به رابط ۱ متصل می‌شوند و محورهای آنها با محور مفصلی ۲ (نقطه‌های  $B$  و  $F$  در شکل‌های ۳-۲۳ و ۳-۲۴) همراستایند. این کاراندازها، مفصلهای میج دست روبات را از طریق دو رشته زنجیر، یکی در قسمت داخلی رابط ۲ و دیگری در قسمت داخلی رابط ۳، حرکت می‌دهند. تأثیر این سیستم انتقال قدرت (زنجیرها) و برهم‌کنش آن با کاراندازی رابطهای ۲ و ۳، چنین است: کارانداز ۴ برای استقرار مفصل ۴ نسبت به پایهٔ روبات (و نه نسبت به رابط ۳ قبل از آن) به‌کار می‌رود. این بدان معناست که با ثابت نگه‌داشتن کارانداز ۴، جهتگیری رابط ۴ نیز نسبت به پایهٔ روبات (صرف‌نظر از مکان مفصلهای ۲ و ۳) ثابت می‌ماند. سرانجام، کارانداز ۵ چنان عمل می‌کند که گویی مستقیماً به مفصل ۵ متصل است.

حال معادله‌هایی را که مجموعه‌ای از مقادیر کارانداز ( $A_i$ ) را بر روی مجموعهٔ معادل مقادیر مفصلی ( $\theta_i$ ) نگاشت می‌کنند، تعریف می‌کنیم. در اینجا این معادله‌ها از هندسهٔ مسطحه، و در بیشتر موارد با به‌کار بردن «قانون کسینوسها»<sup>۱</sup>، به دست می‌آید. در این معادله‌ها ثابتهای مقیاس ( $k_i$ ) و انحراف ( $\lambda_i$ ) ظاهر می‌شوند. مثلاً کارانداز ۱ مستقیماً به محور مفصلی ۱ متصل است و تبدیل آن به کمیت مفصلی، با ضرب آن در ضریب مقیاس و جمع کردن حاصل با انحراف انجام می‌شود. بدین ترتیب

$$\theta_1 = k_1 A_1 + \lambda_1$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left( \frac{(k_2 A_2 + \lambda_2)^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}{-2\alpha_2 \beta_2} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{\phi_2}{\gamma_2} \right) + \Omega_2 - 270^\circ$$

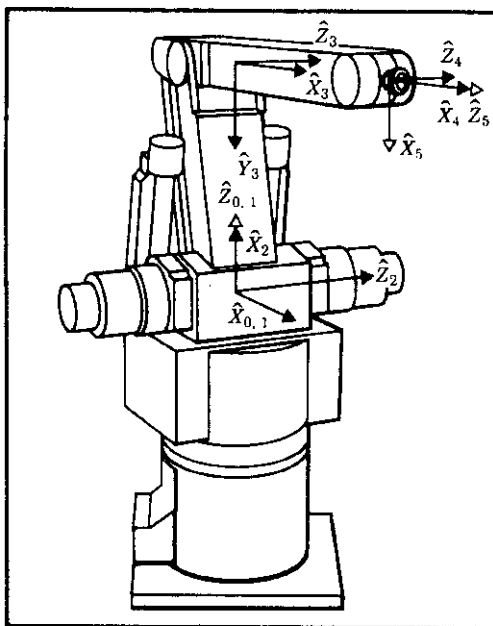
$$\theta_3 = \cos^{-1} \left( \frac{(k_3 A_3 + \lambda_3)^2 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}{-2\alpha_3 \beta_3} \right) - \theta_2 + \tan^{-1} \left( \frac{\phi_3}{\gamma_3} \right) - 90^\circ$$

$$\theta_4 = -k_4 A_4 - \theta_2 - \theta_3 + \lambda_4 + 180^\circ$$

$$\theta_5 = -k_5 A_5 + \lambda_5 \quad (15-3)$$

در شکل ۳-۲۵ نحوهٔ اتصال چهارچوبها به رابطها نشان داده شده است. در این شکل، بازوی مکانیکی ماهر در وضعیت متناظر با بردار مفصل  $\Theta = (0^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$  است. در

۱. قانون کسینوسها: اگر زوایای یک مثلث را با  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  نمایش دهیم ( $a$  مقابل ضلع  $A$  قرار دارد)، رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود:  $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos a$ .



شکل ۳-۲۵ چهارجوبه‌ای رابط اختصاص یافته به رابط‌های روبات یازوکاوا L-۳.

شکل ۳-۲۶ نیز پارامترهای رابط این بازوی مکانیکی نشان داده شده است. ماتریسهای تبدیل رابط کلی این مکانیزم به صورت زیر است

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(۳-۱۶)

$i$	$\alpha_i - 1$	$a_i - 1$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$
4	0	$L_3$	0	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$

شکل ۳-۲۶ پارامترهای رابط روبات بازوکارا L-۳.

$${}^r_r T = \begin{bmatrix} c\theta_r & -s\theta_r & 0 & l_r \\ s\theta_r & c\theta_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^r_\delta T = \begin{bmatrix} c\theta_\delta & -s\theta_\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_\delta & c\theta_\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس از انجام عمل ضرب، ماتریس تبدیل کلی  ${}^r_\delta T$  حاصل می‌شود

$${}^r_\delta T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$r_{11} = c_1 c_{222} c_0 - s_1 s_0$$

$$r_{21} = s_1 c_{222} c_0 + c_1 s_0$$

$$r_{31} = -s_{222} c_0$$

$$r_{12} = -c_1 c_{222} s_0 - s_1 c_0$$

$$r_{22} = -s_1 c_{222} s_0 + c_1 c_0$$

$$r_{32} = s_{222} s_0$$

$$r_{13} = c_1 s_{222} \quad (17-3)$$

$$r_{23} = s_1 s_{222}$$

$$r_{33} = c_{222}$$

$$p_x = c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{22})$$

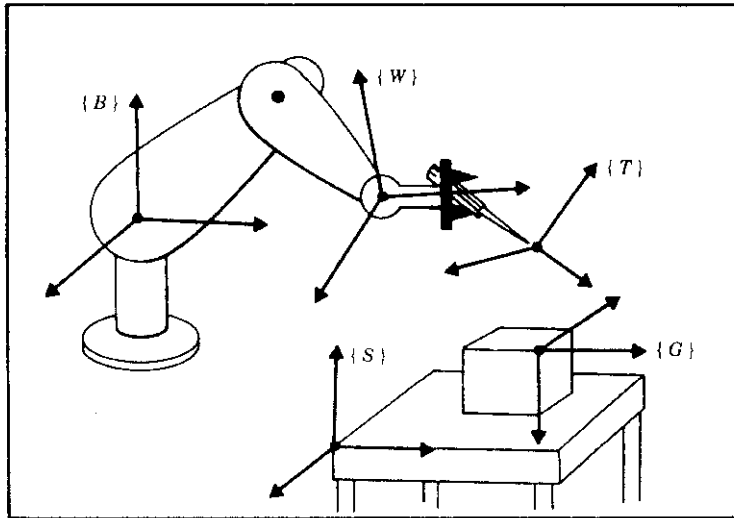
$$p_y = s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{22})$$

$$p_z = -l_2 s_2 - l_3 s_{22}$$

بدین ترتیب، معادله‌های سینماتیکی برای روبات یازوکاوا موتومان را در دو مرحله پی‌ریزی کردیم. در مرحله اول، بردار مفصل را از بردار مقادیر کارانداز به دست آوردیم، و در مرحله دوم، با استفاده از بردار مفصل، مکان و جهتگیری چهارچوب مج دست روبات را محاسبه کردیم. اگر بخواهیم به جای زوایای مفصلی، تنها مکان دکارتی را پیدا کنیم، باید معادله‌هایی را به دست آوریم که مستقیماً فضای کاراندازی را به فضای دکارتی مربوط می‌کنند. این معادله‌ها، از لحاظ محاسباتی ساده‌تر از معادله‌های حاصل از رهیافت دو مرحله‌ای‌اند (تمرین ۳-۱۰ را ببینید).

### ۸-۳ چهارچوبهای با نامهای استاندارد

به منظور قراردادی کردن توصیف مکانیزم روباتها، مناسب خواهد بود که نامهای مشخصی برای چهارچوبهای «استاندارد» هر روبات و فضای کاری آن در نظر گرفته شود. در شکل ۳-۲۷ حالتی نمونه‌وار نشان داده شده است که در آن روبات نوعی ابزار را در دست گرفته است و می‌خواهد نوک آن را در محل تعریف شده‌ای (تعریف شده توسط متصدی) قرار دهد. پنج چهارچوبی که



شکل ۲۷-۳ چهارچوبهای استاندارد.

در شکل ۲۷-۳ نشان داده شده است، در اکثر موارد به کار می‌روند و بجاست برای آنها نامهای مشخصی انتخاب کنیم. نامگذاری و استفاده از این پنج چهارچوب در سیستم برنامه‌ریزی و کنترل روبات، ایجاد قابلیت‌های کلی به صورتی قابل فهم را آسان می‌سازد. کلیه حرکتهای روبات، نسبت به این پنج چهارچوب توصیف خواهد شد.

چهارچوبهای شکل ۲۷-۳ در زیر تعریف شده‌اند.

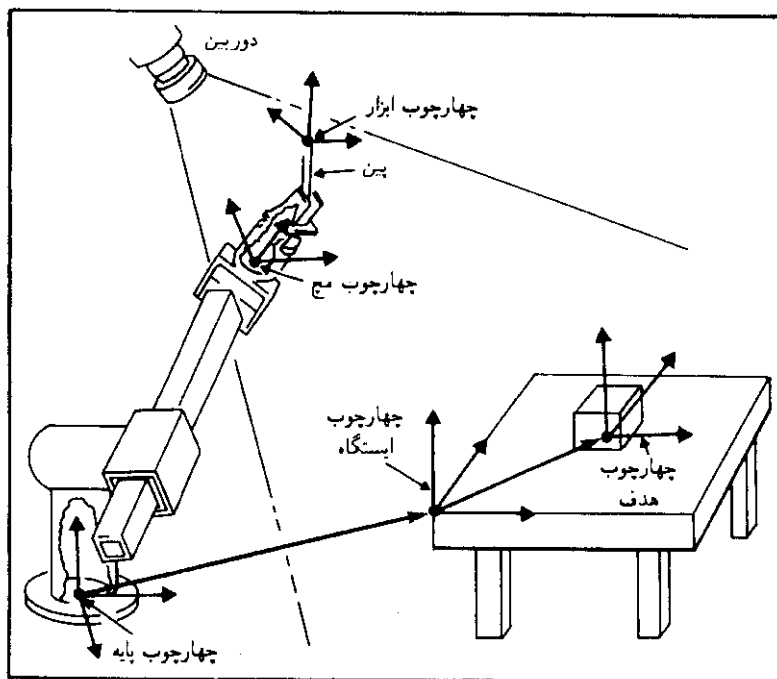
#### چهارچوب پایه، $\{B\}$

$\{B\}$  در پایه بازوی مکانیکی ماهر قرار می‌گیرد و در واقع همان چهارچوب  $\{0\}$  است. این چهارچوب به قسمت غیر متحرک روبات، که گاهی آن را رابط  $0$  می‌نامند، متصل می‌شود.

#### چهارچوب ایستگاه، $\{S\}$

$\{S\}$  در محل انجام کار قرار می‌گیرد و در شکل ۲۸-۳ به گوشه میز کار روبات، متصل شده است. تا جایی که به استفاده‌کننده از این روبات مربوط می‌شود،  $\{S\}$  یک چهارچوب مرجع است و کلیه اعمال روبات نسبت به آن انجام می‌شوند. این چهارچوب را گاهی چهارچوب میز کار یا چهارچوب مرجع نیز می‌نامند. همواره چهارچوب ایستگاه را نسبت به چهارچوب پایه بیان می‌کنند (تبدیل  ${}^B_S T$ ).





شکل ۲۸-۳ مثالی از تخصیص چهارچوبهای استاندارد.

### چهارچوب میج دست، $\{W\}$

$\{W\}$  به آخرین رابط بازوی مکانیکی ماهر متصل می‌شود. نماد دیگر این چهارچوب،  $\{N\}$  (چهارچوب متصل شده به آخرین رابط) است. اغلب مبدأ  $\{W\}$  را در نقطه‌ای که میج بازوی ماهر نامیده می‌شود، قرار می‌دهند.  $\{W\}$  با آخرین رابط بازو حرکت می‌کند و حرکت آن نسبت به چهارچوب پایه سنجیده می‌شود. به عبارت دیگر،  $\{W\} = {}^B_W T = {}^N_T T$ .

### چهارچوب ابزار، $\{T\}$

$\{T\}$  را به انتهای ابزاری که روبات در دست دارد، متصل می‌کنند. هنگامی که دست روبات خالی باشد، معمولاً مبدأ  $\{T\}$  بین نوک انگشتهای روبات قرار داده می‌شود. چهارچوب ابزار همواره نسبت به چهارچوب میج دست تعریف می‌شود. در شکل ۲۸-۳، مبدأ چهارچوب ابزار در نوک پینی که روبات در دست دارد، قرار داده شده است.

### چهارچوب هدف، $\{G\}$

$\{G\}$  مکانی را که باید ابزار توسط روبات به آن انتقال یابد، توصیف می‌کند. این به‌ویژه بدان معناست که در انتهای حرکت، باید چهارچوب ابزار بر چهارچوب هدف منطبق شود.  $\{G\}$  را همواره نسبت

به چهارچوب ایستگاه مشخص می‌کنند. در شکل ۳-۲۸، چهارچوب  $\{G\}$  در سوراخی که بین باید به درون آن رانده شود، قرار داده شده است.

همه حرکت‌های روبات را می‌توان، بدون آنکه از عمومیت مسئله کاسته شود بر حسب چهارچوب‌های استاندارد فوق بیان کرد. استفاده از این چهارچوب‌ها، در واقع به منزله «زبانی استاندارد» برای صحبت کردن درباره اعمال روبات‌هاست.

### ۳-۹ ابزار کجاست؟

یکی از نخستین قابلیت‌هایی که هر روبات باید داشته باشد، توانایی محاسبه مکان و جهت‌گیری ابزاری که در دست دارد (یا مکان و جهت‌گیری دست در صورتی که خالی باشد) نسبت به یک دستگاه مختصات مناسب است. به عبارت دیگر، می‌خواهیم مشخصات چهارچوب ابزار  $\{T\}$  را نسبت به چهارچوب ایستگاه  $\{S\}$  محاسبه کنیم. اگر  ${}^B_T T$  را از معادله‌های سینماتیکی به دست آوریم، می‌توانیم با استفاده از تبدیلهای دکارتی (چنانکه در فصل ۲ دیدیم)،  $\{T\}$  را برحسب  $\{S\}$  بیان کنیم. حل معادله ساده تبدیل، به رابطه زیر می‌انجامد

$${}^S_T T = {}^B_T T^{-1} {}^B_W T {}^W_T T \quad (۱۸-۳)$$

معادله (۱۸-۳) در واقع همان تابع WHERE (به معنی کجا) در برخی سیستم‌های روباتی است و به عبارت دیگر محل بازو را معین می‌کند. در شکل ۳-۲۸ خروجی تابع WHERE مکان و جهت‌گیری بین نسبت به سطح میز کار خواهد بود.

معادله (۱۸-۳) در واقع تعمیم معادله‌های سینماتیکی است. تبدیل  ${}^S_T T$  سینماتیک هندسی میله‌بندها را به همراه یک تبدیل کلی (که می‌توان آن را رابطی ثابت در نظر گرفت) در انتهای پایه (تبدیل  ${}^B_T T$ )، و تبدیل دیگری در مجری نهایی (تبدیل  ${}^W_T T$ ) محاسبه می‌کند. این تبدیلهای اضافی، به ما امکان می‌دهد ابزارهایی با انحراف و پیچش را هم مشمول این معادله بدانیم، و نیز نسبت به هر چهارچوب ایستگاه دلخواه کار کنیم.

### ۳-۱۰ ملاحظات محاسباتی

در بسیاری از بازوهای مکانیکی ماهر مورد استفاده در صنعت، زمان لازم برای انجام محاسبات سینماتیکی اهمیت دارد. در این بخش، به اختصار درباره مطالب گوناگونی که در محاسبات سینماتیکی پیوما ۵۶۰ با معادله (۳-۱۴) در نظر گرفته می‌شوند، بحث می‌کنیم.

یکی از روش‌هایی که می‌توان به کار برد، استفاده از نمایش نقطه ثابت یا نقطه شناور برای نشان دادن کمیت‌های مورد استفاده است. در بسیاری موارد، به منظور ساده تر کردن برنامه کامپیوتری از نمایش نقطه شناور استفاده می‌شود، زیرا در این صورت، برنامه نویسی نیازی ندارد خود را درگیر محاسبات مقیاسی ناشی از مقادیر نسبی متغیرها کند. اما زمانی که سرعت عامل مهمی به شمار

آید، نمایش نقطه ثابت مناسبتر است، زیرا متغیرهای به کار رفته گستره دینامیکی بزرگی ندارند و این گستره‌ها به خوبی شناخته شده‌اند. تعداد بیت‌های حافظه مورد نیاز برای نمایش به صورت نقطه ثابت، بر اساس برآوردهای اولیه، ۲۴ است [۴].

با فاکتورگیری در معادله‌هایی چون (۳-۱۴) می‌توان تعداد عملهای ضرب و جمع را با تعریف متغیرهای موضعی، کاهش داد. این عمل معمولاً نتیجه خوبی در پی دارد، زیرا از تکرار محاسبه عبارتها در هنگام محاسبات اصلی، جلوگیری می‌کند. برای انجام عمل فاکتورگیری اتوماتیک، از کامپیوتر نیز کمک گرفته شده است [۵].

بیشترین هزینه محاسبات، مربوط به توابع متعالی (غیرجبری)، یعنی سینوس و کسینوس است. این توابع، در صورتی که در حافظه کامپیوتر از قبل تعریف شده باشند، از طریق محاسبه بسط سریهای توانی به دست می‌آیند و در این بسط، عمل ضرب به دفعات تکرار می‌شود. به همین دلیل، برای کاهش حافظه مورد نیاز، در بسیاری از سیستمهای رباتی، جدولهای سینوس و کسینوس در حافظه ذخیره می‌شوند. برحسب مورد کاربرد، پیدا کردن مقادیر این توابع در جدول توسط کامپیوتر، زمان محاسبه سینوس یا کسینوس را به دو یا سه زمان ضرب<sup>۱</sup>، کاهش می‌دهد.

در محاسبه معادله‌های سینماتیکی، مانند معادله (۳-۱۴)، برای نمایش جهتگیری، ۹ کمیت به دست می‌آید و این کاری زائد است. یکی از روشهای کاهش محاسبات، به دست آوردن تنها دو ستون از ماتریس دوران، و سپس محاسبه یک ضرب خارجی است (که تنها به شش عمل ضرب و سه عمل جمع نیاز دارد). روشن است که دو ستون فوق را باید ساده‌ترین ستونها (از نظر حجم عملیات ریاضی) انتخاب کرد.

## مراجع

- [1] J. Denavit and R. S. Hartenberg, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices," *Journal of Applied Mechanics*, pp. 215-221, June 1955.
- [2] J. Lenarčič, "Kinematics," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John C. Wiley and Sons, 1988.
- [3] J. Colson and N.D. Perreira, "Kinematic Arrangements Used in Industrial Robots," *13th Industrial Robots Conference Proceedings*, April 1983.

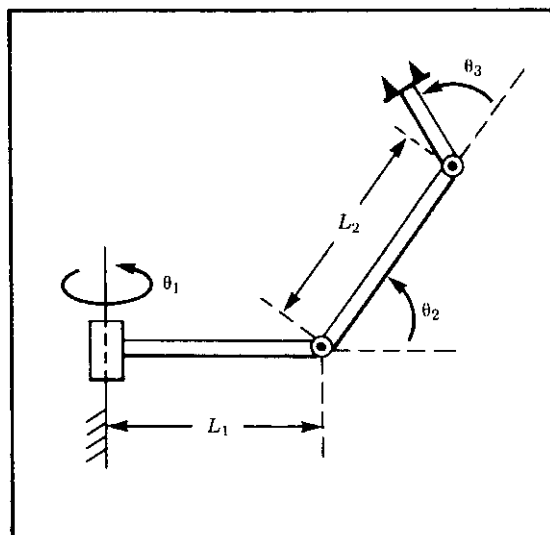
۱. زمان ضرب زمانی است که طول می‌کشد تا کامپیوتر یک عمل ضرب را انجام دهد.

- [4] T. Turner, J. Craig, and W. Gruver, "A Microprocessor Architecture for Advanced Robots Control," 14th ISIR, Stockholm, Sweden, October 1984.
- [5] W. Schiehlen, "Computer Generation of Equations of Motion" in *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, E.J. Haug, Editor, Springer-Verlag, 1984.
- [6] C. Ruoff, "Fast Trigonometric Functions for Robot Control," *Robotics Age*, November 1981.

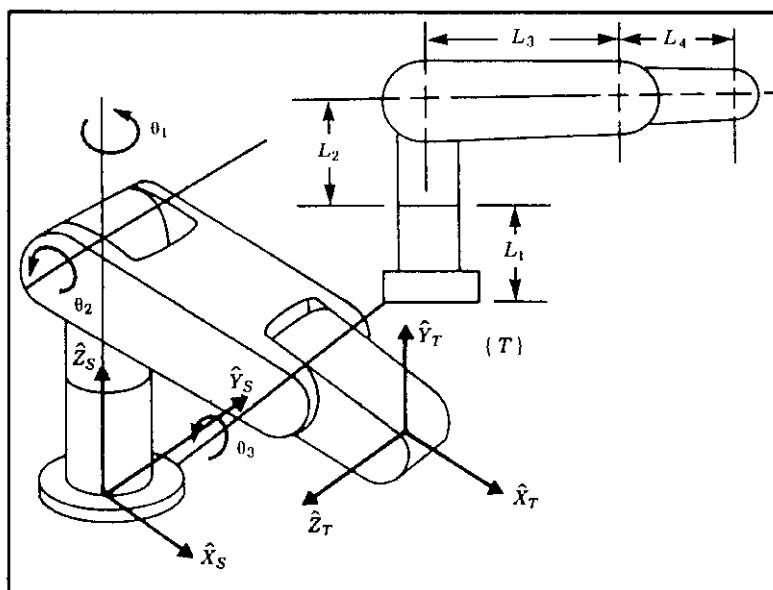
### تمرینها

- ۱-۳ [۱۵] معادله‌های سینماتیکی بازوی صفحه‌ای مثال ۳-۳ را به دست آورید.
- ۲-۳ [۳۷] [بازوی مکانیکی ماهر] مانند پیوما ۵۶۰ را در نظر بگیرید که در آن مفصل ۳ با یک مفصل کشویی جایگزین شده است. فرض کنید این مفصل کشویی در راستای  $\hat{X}_1$  در شکل ۱۸-۳ می‌لغزد. اما هنوز باید انحرافی برابر  $d_2$  را در نظر گرفت. معادله‌های سینماتیکی این سیستم را، با در نظر گرفتن فرضهای لازم، بنویسید.
- ۳-۳ [۲۵] بازوی مکانیکی با سه درجه آزادی که در شکل ۳-۳ نشان داده شده است، مانند بازوی مثال ۳-۳ است، با این تفاوت که در آن محور مفصل ۱ با دو محور دیگر موازی نیست و در عوض بین محوره‌های ۱ و ۲ پیچشی برابر  $90^\circ$  وجود دارد. پارامترهای رابط و معادله‌های سینماتیکی را برای  ${}^B_W T$  به دست آورید. توجه کنید که در اینجا به تعریف  $l_2$  نیاز نیست.
- ۴-۳ [۲۲] در بازوی با سه درجه آزادی نشان داده شده در شکل ۳-۳ مفصلهای ۱ و ۲ عمود بر هم و مفصلهای ۲ و ۳ موازی‌اند. چنانکه دیده می‌شود، همه مفصلها در موقعیت صفر خود هستند. توجه کنید که در شکل جهت مثبت زاویه مفصل نشان داده شده است. چهارچوبهای رابط  $\{0\}$  تا  $\{3\}$  را برای این بازو تعیین کنید. به عبارت دیگر، بازو را رسم، و چگونگی اتصال چهارچوبها به آن را مشخص کنید. سپس ماتریسهای تبدیل کلی  ${}^0_1T$ ،  ${}^1_2T$  و  ${}^2_3T$  را به دست آورید.
- ۵-۳ [۲۶] زیر برنامه‌ای برای حل معادله‌های سینماتیکی روبات پیوما ۵۶۰ بنویسید. سرعت را کدگذاری کنید و سعی کنید تعداد عملهای ضرب را تا حد امکان کاهش دهید. زیر برنامه را چنین آغاز کنید:

Procedure KIN (VAR theta: vec6; VAR Wrelb: frame);



شکل ۳-۲۹ بازوی صفحه‌ای ۳R (تمرین ۳-۳).



شکل ۳-۳۰ در تصویر از یک بازوی مکانیکی ۳R (تمرین ۳-۴).

زمان محاسبه سینوس یا کسینوس را برابر با ۵ زمان ضرب، انجام عمل جمع را برابر با  $0/333$  زمان ضرب، و نسبت دادن مقدار به متغیرها را برابر با  $0/2$  زمان ضرب در نظر بگیرید. همچنین، محاسبه ریشه دوم را برابر با ۴ زمان ضرب حساب کنید. روی هم رفته در این برنامه به چند زمان ضرب نیاز خواهید داشت؟

۶-۳ [۲۰] زیر برنامه‌ای بنویسید که معادله‌های سینماتیکی بازوی استوانه‌ای مثال ۳-۴ را حل کند و چنین آغاز شود:

Procedure KIN (VAR jointvar: vec3; VAR wrelb: frame);

زمان محاسبه سینوس یا کسینوس را برابر با ۵ زمان ضرب، انجام عمل جمع را برابر با  $0/333$  زمان ضرب، نسبت دادن مقدار به متغیرها را برابر با  $0/2$  زمان ضرب، و محاسبه ریشه دوم را ۴ زمان ضرب در نظر بگیرید. در مجموع به چند زمان ضرب نیاز خواهید داشت؟

۷-۳ [۲۲] زیر برنامه‌ای برای حل معادله‌های سینماتیکی بازوی تمرین ۳-۳ بنویسید و آن را چنین آغاز کنید:

Procedure KIN (VAR theta: vec3; VAR wrelb: frame);

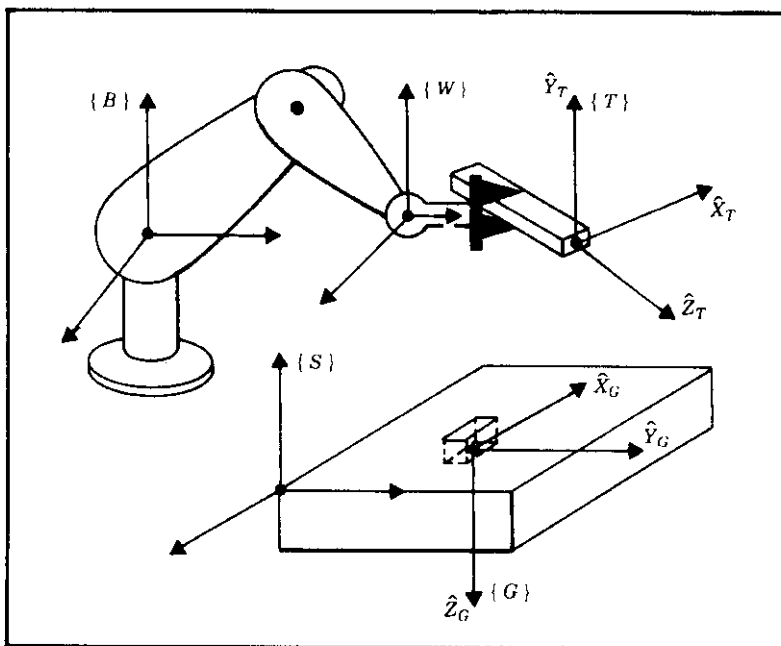
زمان محاسبه سینوس و کسینوس را برابر با ۵ زمان ضرب، انجام عمل جمع را برابر با  $0/333$  زمان ضرب، نسبت دادن مقدار به متغیرها را برابر با  $0/2$  زمان ضرب، و محاسبه ریشه دوم را برابر با ۴ زمان ضرب در نظر بگیرید. روی هم رفته به چند زمان ضرب نیاز خواهید داشت؟

(۸-۳) [۱۳] در شکل ۳-۳۱، مکان ابزار که با ماتریس  ${}^W T$  مشخص می‌شود، به طور دقیق معلوم نیست. روبات با استفاده از کنترل نیرو، آن قدر ابزار را در اطراف سوراخ (هدف) حرکت می‌دهد، تا سرانجام آن را در مکان  ${}^S T$  در سوراخ فرو برد. پس از آنکه روبات در این وضعیت «کالیبراسیون»، که در آن  $\{G\}$  و  $\{T\}$  بر یکدیگر منطبق می‌شوند، قرار گرفت، مکان روبات  $({}^B T)$  با خواندن زاویه مفصلی اندازه‌گیری شده توسط حساسه‌ها، و حل معادله‌های سینماتیکی روبات، تعیین می‌شود. با فرض معلوم بودن  ${}^S T$  و  ${}^B T$ ، معادله تبدیل لازم برای به دست آوردن چهارچوب ابزار  $({}^W T)$  را بنویسید.

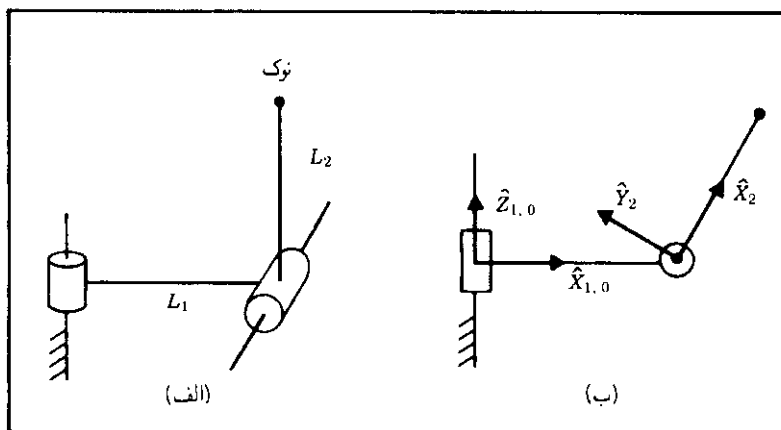
(۹-۳) [۱۱] برای بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط نشان داده شده در شکل ۳-۳۲ (الف)، ماتریسهای تبدیل رابط کلی  ${}^1 T$  و  ${}^2 T$  به دست آمده‌اند و حاصل ضرب آنها چنین است:

$${}^1 T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 & l_1 s\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چهارچوبها در این بازو مطابق با شکل ۳-۳۲ (ب) تخصیص داده شده‌اند. هنگامی که



شکل ۳-۳۱ تعیین چهارچوب ابزار (تمرین ۳-۸).



شکل ۳-۳۲ چهارچوبها در بازویی با دو رابط (تمرین ۳-۹).

$\theta_1 = 0$ ، چهارچوب  $\{0\}$  بر چهارچوب  $\{1\}$  منطبق می‌شود. طول رابط دوم بازو برابر  $l_2$  است. برای بردار  $P_{tip}$  که مکان انتهای بازو را نسبت به چهارچوب  $\{0\}$  تعیین می‌کند، عبارتی به‌دست آورید.

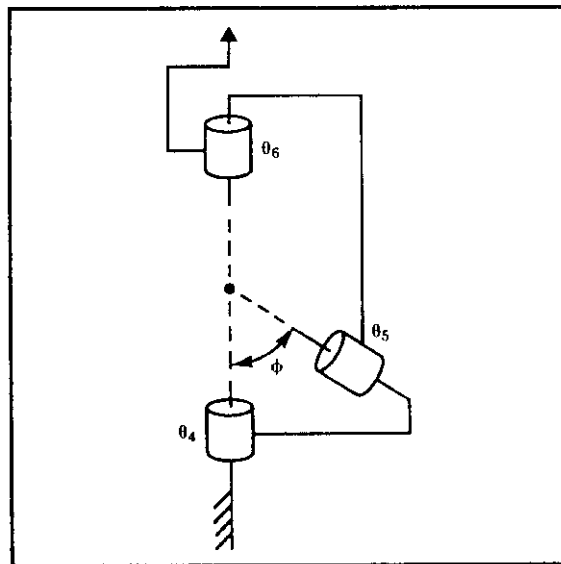
۱۰-۳ [۳۹] برای روبات یازوکاوا موتومان (بخش ۳-۷)، معادله‌های سینماتیکی را که مکان و جهتگیری چهارچوب میج را (به جای آنکه ابتدا زوایای مفصلی را محاسبه کند) مستقیماً از مقادیر کاراندازها تعیین می‌کند، به‌دست آورید. یکی از راه‌حلهای ممکن در این مسئله، تنها ۳۳ عمل ضرب، دو ریشه دوم، و ۶ سینوس یا کسینوس را شامل می‌شود.

۱۱-۳ [۱۷] در شکل ۳-۳۳، تصویر شماتیک میج دست روبات با سه محور که یکدیگر را قطع می‌کنند، اما متعامد نیستند، نشان داده شده است. چهارچوبها و پارامترهای رابط این مکانیزم را به‌دست آورید (میج دست را بازویی با ۳ درجه آزادی فرض کنید).

۱۲-۳ [۸۰] آیا تبدیل کلی دلخواهی از جسم صلب را می‌توان همواره برحسب چهارپارامتر  $(a, d, \alpha, \theta)$ ، با استفاده از معادله (۳-۶) بیان کرد؟

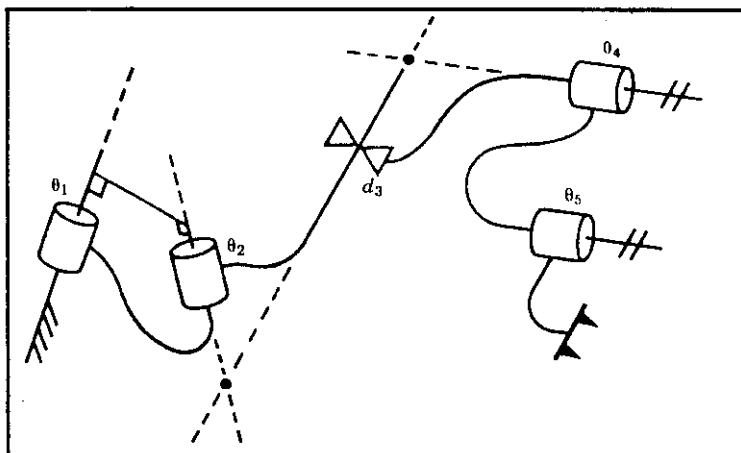
۱۳-۳ [۱۵] چگونگی اتصال چهارچوبهای رابطها را برای بازوی مکانیکی ماهر با ۵ درجه آزادی که در شکل ۳-۳۴ نشان داده شده است، تعیین کنید.

۱۴-۳ [۲۰] چنانکه گفته شد، مکان نسبی هر دو خط در فضا را می‌توان با دو پارامتر  $a$  و  $\alpha$  طول عمود مشترک دو خط و  $\alpha$  زاویه بین دو محور، تصویر شده در صفحه‌ای که عمود



شکل ۳-۳۳ روبات ۳R با محور غیر متعامد (تمرین ۱۱-۳).

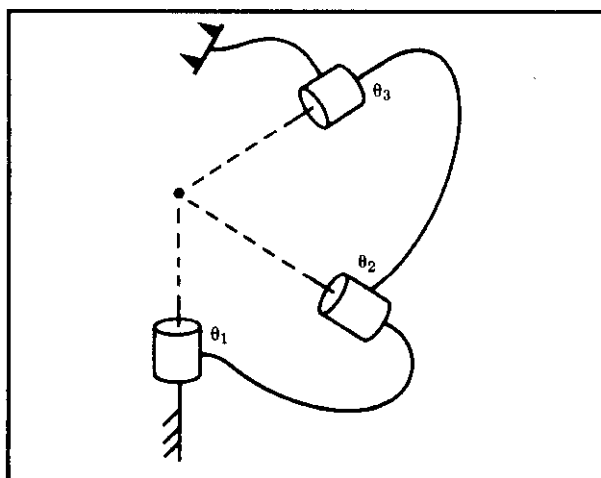




شکل ۳-۳۴ تصویر شماتیک بازوی مکانیکی ۲R۲P (تمرین ۳-۱۳).

بر آن عمود مشترک دو محور است) تعیین کرد. با مفروض بودن خطی گذرنده از نقطه  $p$  با راستای بردار یکه  $\hat{m}$ ، و خطی گذرنده از نقطه  $q$  با راستای بردار یکه  $\hat{n}$ ، عبارتهایی برای  $a$  و  $\alpha$  بنویسید.

۱۵-۳ [۱۵] چهارچوبهای رابط را برای بازوی مکانیکی با سه درجه آزادی که تصویر شماتیک آن در شکل ۳-۳۵ نشان داده شده است، تعیین کنید.

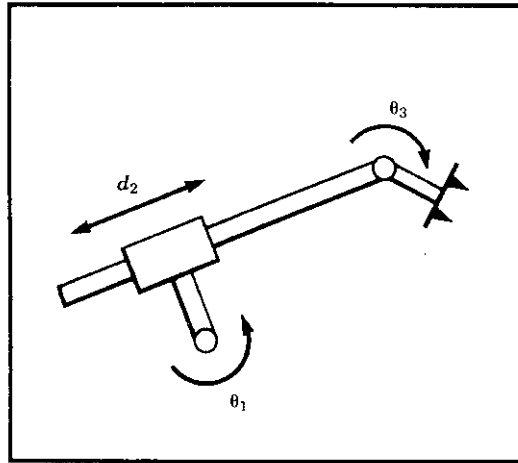


شکل ۳-۳۵ تصویر شماتیک یک بازوی مکانیکی ۳R (تمرین ۳-۱۵).

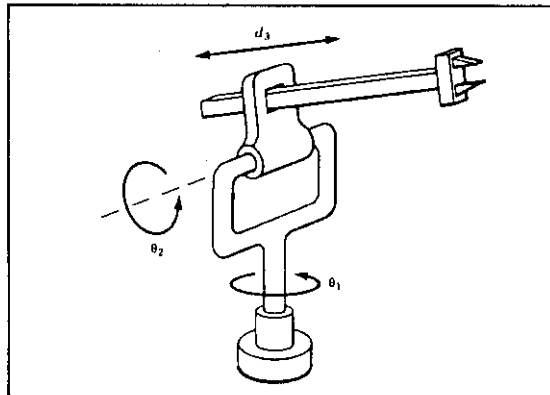
۱۶-۳ [۱۵] چهارچوبهای رابط را برای روبات صفحه‌ای شکل ۳-۳۶ تعیین کنید و پارامترهای رابط آن را به دست آورید.

۱۷-۳ [۱۵] چهارچوبهای رابط را برای روبات با سه رابط که در شکل ۳-۳۷ نشان داده شده است، مشخص کنید.

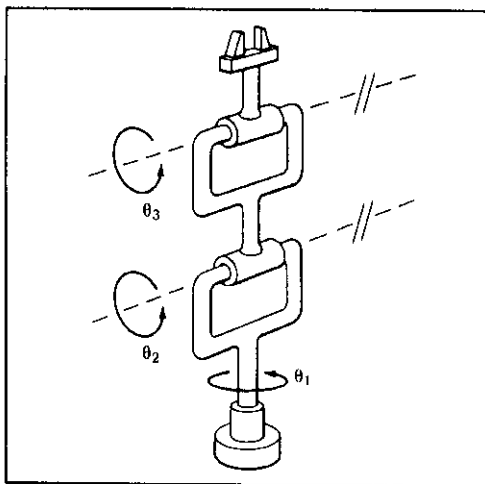
۱۸-۳ [۱۵] چهارچوبهای رابط را برای روبات با سه رابط که در شکل ۳-۳۸ نشان داده شده است، مشخص کنید.



شکل ۳-۳۶ روبات صفحه‌ای  $RPR$  (تمرین ۱۶-۳).



شکل ۳-۳۷ بازوی مکانیکی ماهر  $RRP$  (تمرین ۱۷-۳).



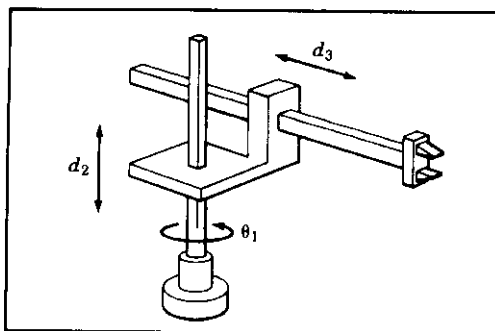
شکل ۳-۳۸ بازوی مکانیکی ماهر  $RRR$  (تیرین ۳-۱۸).

۱۹-۳ [۱۵] چهارچوبهای رابط را برای روبات با سه رابط که در شکل ۳-۳۹ نشان داده شده است، مشخص کنید.

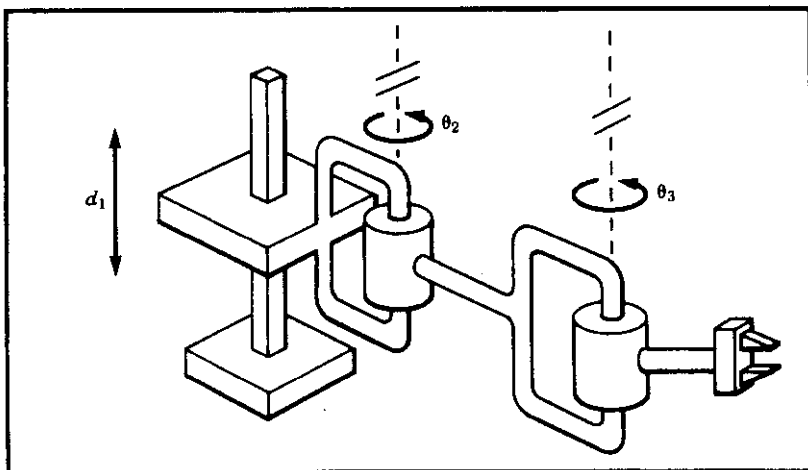
۲۰-۳ [۱۵] چهارچوبهای رابط را برای روبات با سه رابط که در شکل ۳-۴۰ نشان داده شده است، مشخص کنید.

۲۱-۳ [۱۵] چهارچوبهای رابط را برای روبات با سه رابط که در شکل ۳-۴۱ نشان داده شده است، مشخص کنید.

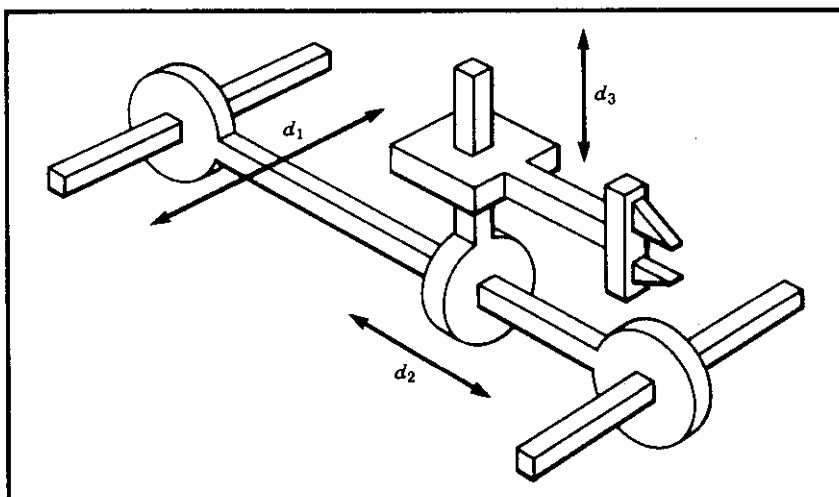
۲۲-۳ [۱۸] چهارچوبهای رابط را برای روبات  $P^3R$  نشان داده شده در شکل ۳-۴۲ مشخص



شکل ۳-۳۹ بازوی مکانیکی ماهر  $RPP$  (تیرین ۳-۱۹).



شکل ۳-۴۰ بازوی مکانیکی ماهر  $2R$  (تمرین ۳-۲۰).

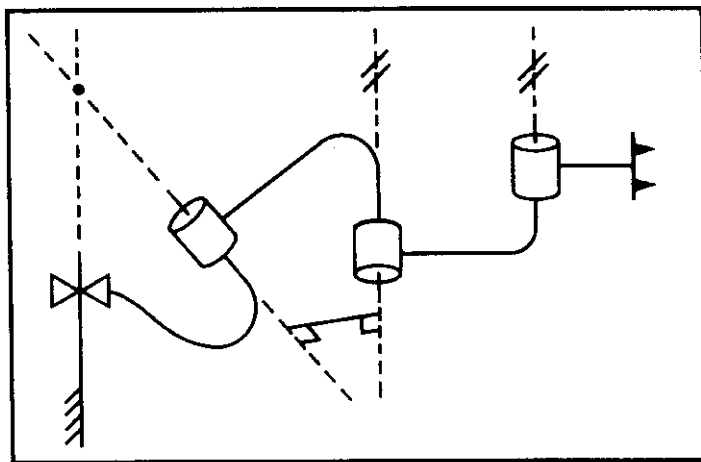


شکل ۳-۴۱ بازوی مکانیکی ماهر  $3R$  (تمرین ۳-۲۱).

کنید. با توجه به این چهارچوبها، علامتهای  $d_1$ ،  $d_2$ ،  $d_3$  و  $a_2$  را تعیین کنید.

تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۳)

۱. زیربرنامه‌ای برای حل معادله‌های سینماتیکی روبات صفحه‌ای  $2R$  در مثال ۳-۳ بنویسید.



شکل ۳-۴۲ تصویر شماتیک بازوی مکانیکی PRR (نماین ۳-۴۲).

مقادیر زوایای مفصلی را ورودی و یک چهارچوب (چهارچوب مرج دست نسبت به چهارچوب پایه) را خروجی در نظر بگیرید. زیر برنامه را چنین آغاز کنید:

Procedure KIN (VAR theta: vec3; VAR wrelb: frame);

که در آن «wrelb» تبدیل  ${}^B_W T$  (چهارچوب مرج دست نسبت به چهارچوب پایه) است. «frame» نیز متشکل از یک ماتریس  $(2 \times 2)$  و یک بردار مکان  $(2 \times 1)$  است. در صورت تمایل، می‌توانید frame (چهارچوب) را با یک تبدیل همگن  $(3 \times 3)$  که سطر سوم آن  $[0 \ 0 \ 1]^T$  است، نمایش دهید. مشخصات بازوی مکانیکی چنین است:  $l_1 = l_2 = 0.5m$ .

۲. زیر برنامه‌ای بنویسید که مکان ابزار را نسبت به چهارچوب ایستگاه محاسبه کند. ورودی به زیر برنامه، برداری شامل زوایای مفصلی است

Procedure WHERE (VAR theta: vec3; VAR trels: frame);

روشن است که زیر برنامه WHERE باید از مشخصات چهارچوب ابزار و چهارچوب پایه روبات برای محاسبه محل ابزار نسبت به ایستگاه استفاده کند. مقادیر ماتریسهای  ${}^W_T$  و  ${}^B_T$  باید در حافظه کلی<sup>۱</sup> ذخیره شود (این مقادیر را نیز می‌توان به صورت شناسه‌هایی در WHERE آورد).

۳. یک چهارچوب ابزار و یک چهارچوب ایستگاه برای انجام کاری معین به وسیله شخص

استفاده کننده از روبات چنین تعریف شده اند:

$${}^W_T = [x \ y \ \theta] = [0,10 \ , 23 \ 0,0]$$

$${}^B_S = [x \ y \ \theta] = [-0,1 \ 0,3 \ 0,0]$$

مکان و جهتگیری ابزار را نسبت به چهارچوب ایستگاه در سه پیکربندی زیر (برحسب درجه) محاسبه کنید:

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [0,0 \ 90,0 \ -90,0]$$

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [-23,6 \ -30,3 \ 48,0]$$

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [130,0 \ 40,0 \ 12,0]$$

## سینماتیک وارون بازوهای مکانیکی ماهر

### ۱-۴ مقدمه

در فصل پیش، مسئله به دست آوردن مکان و جهتگیری ابزار را نسبت به ایستگاه تعریف شده توسط استفاده کننده از روبات، با در دست داشتن زوایای مفصلی بازوی مکانیکی ماهر، مورد توجه قرار دادیم. در این فصل، مسئله دشوارتری را مطالعه می‌کنیم: چگونه می‌توان با در دست داشتن مکان و جهتگیری مطلوب چهارچوب ابزار نسبت به چهارچوب ایستگاه، زوایای مفصلی که روبات را در این وضعیت قرار می‌دهند، محاسبه کرد؟ در فصل ۳ توجه خود را به سینماتیک مستقیم معطوف نمودیم، ولی در این فصل سینماتیک وارون را بررسی می‌کنیم.

حل مسئله پیدا کردن زوایای مفصلی مورد نیاز برای استقرار چهارچوب ابزار  $\{T\}$  نسبت به چهارچوب ایستگاه  $\{S\}$ ، به دو بخش تقسیم می‌شود. ابتدا تبدیلهای کلی لازم برای به دست آوردن چهارچوب مرجع دست،  $\{W\}$ ، نسبت به چهارچوب پایه،  $\{B\}$ ، را محاسبه می‌کنیم، و سپس برای یافتن زوایای مفصلی، از سینماتیک وارون استفاده خواهیم کرد.

### ۲-۴ حل پذیر بودن

حل معادله‌های سینماتیکی بازوی مکانیکی ماهر به روشهای غیرخطی صورت می‌گیرد و در آن با داشتن مقادیر عددی  $T$ ، می‌کوشیم مقادیر  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  را پیدا کنیم. معادله‌های داده شده در رابطه (۱۴-۳) را در نظر بگیرید. بیان دقیق مسئله فوق در مورد روبات پیوما ۵۶۰ چنین است: با داشتن  $T$  به صورت ۱۶ مقدار عددی (که چهار مقدار آن بدیهی هستند)، معادله‌های (۱۴-۳) را حل کنید و زوایای مفصلی  $\theta_1$  تا  $\theta_6$  را به دست آورید.

برای بازویی با شش درجه آزادی (مانند بازوی متناظر با معادله‌های (۳-۱۴)، دوازده معادله و شش مجهول خواهیم داشت. اما تنها سه معادله از نه معادله به دست آمده از قسمت ماتریس دوران در  $T$  مستقل‌اند. این سه معادله، به همراه سه معادله دیگر به دست آمده از قسمت بردار مکان در  $T$ ، یک دستگاه شش معادله با شش مجهول را تشکیل می‌دهند. این معادله‌ها غیرخطی و غیرجبری‌اند و حل آنها ممکن است دشوار باشد. معادله‌های (۳-۱۴) مربوط به روباتی با پارامترهای رابط بسیار ساده‌اند، به طوری که بسیاری از مقادیر  $\alpha_i$  برابر با صفر یا  $\pm 90^\circ$  به دست می‌آید. همچنین، بسیاری از انحرفهای رابط و طولهای رابط نیز برابر با صفر است. روشن است که برای مکانیزمی کلی با شش درجه آزادی، (که در آن کلیه پارامترهای رابط غیر صفرند)، معادله‌های سینماتیکی بسیار پیچیده‌تر از معادله‌های (۳-۱۴) خواهند بود. چنانکه در هر دستگاه معادله‌های غیرخطی معمول است، باید وجود جوابها، وجود جوابهای چندگانه، و روش حل معادله‌ها، بررسی شود.

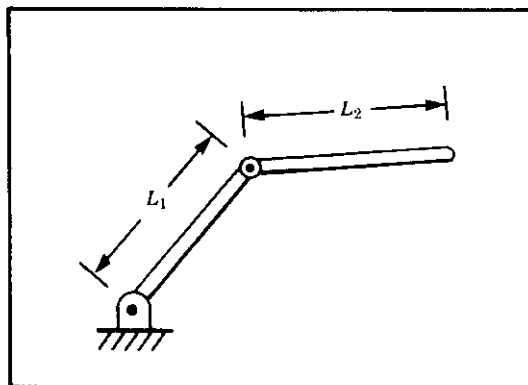
### وجود جوابها

وجود یا عدم وجود جواب، به فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر بستگی دارد. به بیان ساده، فضای کاری حجمی از فضا است که مجری نهایی بازو قادر است آن را تحت پوشش قرار دهد. شرط وجود جواب آن است که نقطه تعیین شده به عنوان هدف، در محدوده فضای کاری باشد. گاهی بهتر است دو تعریف جداگانه از فضای کاری ارائه شود: فضای کاری ماهر و فضای کاری دسترسی‌پذیر. فضای کاری ماهر، حجمی از فضا است که مجری نهایی روبات می‌تواند با همه جهتگیرهای خود به آن دسترسی پیدا کند. بدین ترتیب، در هر نقطه از فضای کاری ماهر، مجری نهایی جهتگیری دلخواه دارد. فضای کاری دسترسی‌پذیر، حجمی از فضا است که مجری نهایی می‌تواند حداقل در یک جهتگیری خود، به آن دسترسی یابد. روشن است که فضای کاری ماهر، زیرمجموعه فضای کاری دسترسی‌پذیر است.

فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط را، که در شکل ۴-۱ دیده می‌شود، در نظر بگیرید. اگر  $l_1 = l_2$ ، آن‌گاه فضای کاری دسترسی‌پذیر دیسکی به شعاع  $2l_1$  خواهد بود، در حالی که فضای کاری ماهر تنها نقطه مبدأ است. اگر  $l_1 \neq l_2$ ، آن‌گاه فضای کاری ماهر وجود نخواهد داشت و فضای کاری دسترسی‌پذیر نیز حلقه‌ای به شعاع خارجی  $l_1 + l_2$  و شعاع داخلی  $|l_1 - l_2|$  خواهد بود. برای مجری نهایی، در داخل فضای کاری دسترسی‌پذیر دو جهتگیری و در مرزهای آن، تنها یک جهتگیری امکان خواهد داشت.

در مطالب گفته شده در مورد فضای کاری بازوی مکانیکی با دو رابط، فرض شده است که مفصلهای بازوی مکانیکی ماهر  $360^\circ$  دوران می‌کنند، در حالی که در مکانیزمهای واقعی، این امر به ندرت اتفاق می‌افتد. هنگامی که زاویه دوران مفصلها از  $360^\circ$  کمتر باشد، فضای کاری نیز محدود خواهد شد. این محدودیت ممکن است به صورت کاهش در دامنه حرکت، و یا به صورت کاهش در تعداد جهتگیرهای مجری نهایی برای رسیدن به هدف، ظاهر شود. مثلاً، در شکل ۴-۱،





شکل ۴-۱ بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط به طولهای  $L_1$  و  $L_2$ .

اگر رابط ۱ بتواند  $360^\circ$  و رابط ۲ تنها  $180^\circ$  گردش کند ( $0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$ )، آنگاه دامنه فضای کاری دسترسی پذیر برابر با قبل خواهد بود، اما در هر نقطه از آن تنها یک جهتگیری برای مجری نهایی ممکن است.

هنگامی که بازوی مکانیکی ماهر کمتر از شش درجه آزادی داشته باشد، نمی توان مکان و جهتگیری کلی (در فضای سه بعدی) برای هدف قائل شد. مثلاً، بازوی صفحه ای نشان داده شده در شکل ۴-۱ قادر نیست به خارج از صفحه خود دسترسی یابد، و در نتیجه نقاطی از فضا را که مؤلفه  $Z$  آنها مخالف با صفر باشد، نمی توان به عنوان هدف انتخاب کرد. در بسیاری از مکانیزمهای واقعی، بازوهای با ۴ یا ۵ درجه آزادی به کار می روند که در خارج از صفحه نیز عمل می کنند، اما نمی توانند به هدفهای کلی (در فضای سه بعدی) دسترسی یابند. چنین مکانیزمهایی را باید در هر مورد مطالعه، و فضای کاری آنها را تعیین کرد. در حالت کلی، فضای کاری چنین روباتی، زیرمجموعه ای از یک زیرفضا است که می توان آن را به هر روبات خاص، نسبت داد. با داشتن مشخصات چهارچوب هدف، مسئله ای جالب در ارتباط با بازوهای مکانیکی ماهر با کمتر از شش درجه آزادی مطرح می شود: نزدیکترین چهارچوب هدف دسترسی پذیر کدام است؟

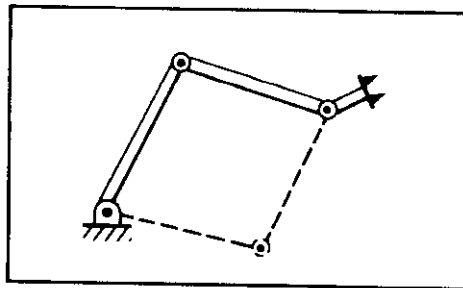
فضای کاری به چگونگی تعریف چهارچوب ابزار نیز بستگی دارد، زیرا به هنگام صحبت از نقاط دسترسی پذیر در فضا، معمولاً منظور نقاط دسترسی پذیر برای انتهای ابزار است. در حالت کلی، تبدیل ابزار به طور مستقل از سینماتیک و سینماتیک وارون بازوی مکانیکی ماهر، انجام می شود، و در نتیجه در بیشتر موارد باید فضای کاری چهارچوب  $\{W\}$ ، را در نظر بگیریم. بدین ترتیب، به ازای مجری نهایی مفروض، یک چهارچوب ابزار،  $\{T\}$ ، تعریف می شود، و به ازای چهارچوب هدف مفروض،  $\{G\}$ ، چهارچوب  $\{W\}$  محاسبه می شود. سپس این پرسش را مطرح می کنیم: آیا مکان و جهتگیری مورد نظر برای  $\{W\}$  در فضای کاری قرار دارد؟ بدین ترتیب، فضای کاری که

ما برای محاسبه در نظر می‌گیریم، با فضای کاری تجسم یافته به وسیله استفاده کننده از روبات، که با فضای کاری مجری نهایی (چهارچوب  $\{T\}$ ) سروکار دارد، متفاوت است. اگر مکان و جهتگیری مطلوب چهارچوب مع در فضای کاری قرار گیرد، آن‌گاه حداقل یک جواب وجود خواهد داشت.

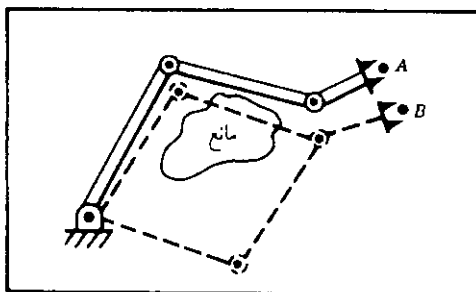
### جوابهای چندگانه

مسئله دیگری که ممکن است در حل معادله‌های سینماتیکی پیش آید، وجود جوابهای چندگانه است. یک بازوی صفحه‌ای با سه مفصل لولایی، دارای فضای کاری ماهر بزرگی در صفحه است (در صورتی که طول رابطهای آن مناسب و آزادی حرکت مفصلهای آن زیاد باشد)، زیرا می‌تواند با هر جهتگیری دلخواه به هر مکانی در داخل فضای کاری خود دسترسی پیدا کند. شکل ۲-۴ یک بازوی صفحه‌ای با سه رابط را نشان می‌دهد که در آن مجری نهایی در مکان و جهتگیری معینی قرار دارد. خط چینها، پیکربندی دومی را برای رسیدن مجری نهایی به همان مکان و جهتگیری نشان می‌دهند.

وجود چند جواب برای معادله‌های سینماتیکی بازو، ممکن است باعث ایجاد مشکلاتی شود، زیرا سیستم به ناچار باید قادر به انتخاب یک جواب باشد. معیار تصمیم‌گیری در موارد مختلف، متفاوت است، اما نزدیکترین جواب، انتخابی بسیار معقول است. مثلاً اگر بازوی مکانیکی در شکل ۳-۴ در نقطه  $A$  باشد و بخواهیم آن را به نقطه  $B$  حرکت دهیم، جوابی که به‌ازای آن میزان حرکت هر مفصل مینیمم شود، انتخابی مناسب خواهد بود. بدین ترتیب، اگر در شکل ۳-۴ مانع وجود نداشته باشد، پیکربندی خط‌چین بالایی انتخاب خواهد شد. این بدان معناست که یکی از شناسه‌های ورودی داده شده به سینماتیک وارون، می‌تواند مکان فعلی بازو باشد. پس اگر انتخابی انجام گیرد، الگوریتم ما می‌تواند نزدیکترین جواب در فضای مفصلی را انتخاب کند. اما واژه «نزدیک» را می‌توان به چند صورت تعریف کرد. مثلاً روباتهای معمولی ممکن است سه رابط بزرگ و سه رابط کوچکتر (برای تنظیم جهتگیری مجری نهایی خود) داشته باشند. در این مورد، احتمال



شکل ۲-۴ بازوی مکانیکی ماهر با سه رابط. خط چینها، پیکربندی دوم را مشخص می‌کند.



شکل ۳-۴ یکی از دو راه حل ممکن برای رسیدن به نقطه  $B$ ، باعث برخورد بازو به مانع می شود.

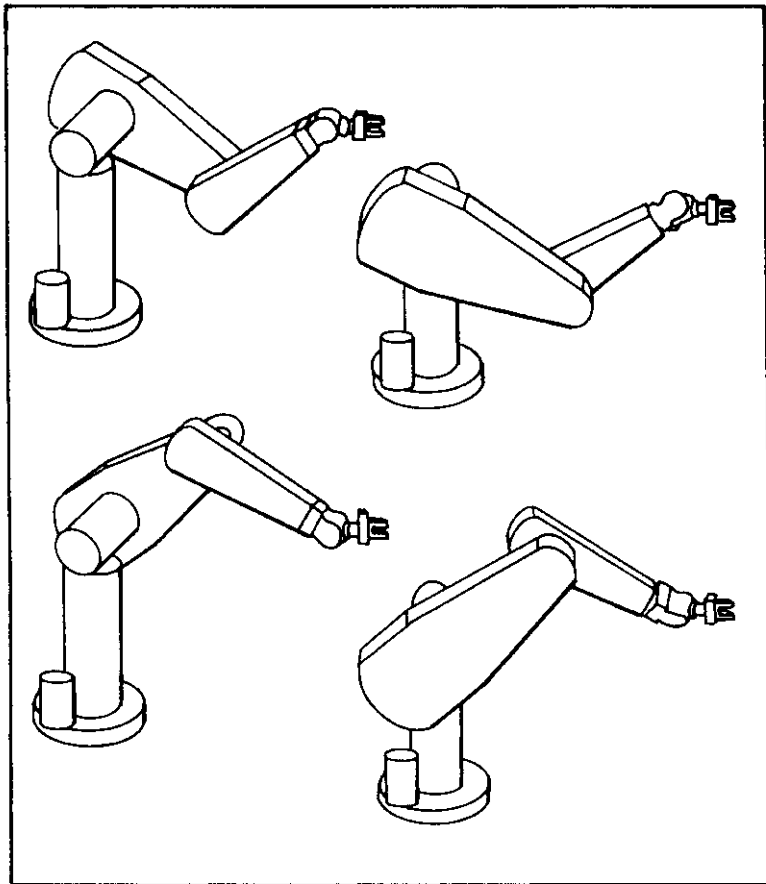
دارد در محاسبه جواب «نزدیکتر»، عامل وزن مورد توجه قرار گیرد و در موقع انتخاب، راه حلی ترجیح داده شود که در آن مفصلهای کوچکتر حرکت داده شوند. در صورتی که در سر راه حرکت بازو مانعی وجود داشته باشد، به ناچار باید جواب «دورتر» انتخاب شود، زیرا جواب «نزدیکتر» باعث برخورد بازو به مانع می شود. در حالت کلی، باید بتوانیم کلیه جوابهای ممکن را محاسبه کنیم. بدین ترتیب، در شکل ۳-۴، وجود مانع بدان معناست که باید برای رسیدن به نقطه  $B$ ، از بیکریندی خط چین پایینی استفاده شود.

تعداد راه حلها، به تعداد مفصلهای بازو بستگی دارد، اما تابعی از پارامترهای رابط  $(\alpha_i, a_i)$  و  $d_i$  برای بازوی با مفصل لولایی و گستره مجاز حرکت مفصل نیز هست. مثلاً روبات پیوما  $560$  می تواند به هشت طریق مختلف به برخی هدفها دسترسی پیدا کند. در شکل ۴-۴ چهار راه حل که همگی دست روبات را در مکان و جهتگیری نهایی یکسانی قرار می دهند، نشان داده شده است. متناظر با هر راه حل نشان داده شده، راه حل دیگری وجود دارد که در آن سه مفصل آخر بر طبق روابط زیر، بیکریندی جدیدی به خود می گیرند:

$$\begin{aligned}\theta'_1 &= \theta_1 + 180^\circ \\ \theta'_5 &= -\theta_5 \\ \theta'_6 &= \theta_6 + 180^\circ\end{aligned}\quad (1-4)$$

بدین ترتیب، برای رسیدن به هدف، هشت راه حل وجود دارد. ممکن است به دلیل محدود بودن گستره حرکت مفصلها، برخی از این هشت راه حل عملی نباشند.

در حالت کلی، هرچه تعداد پارامترهای رابط غیرصفر بیشتر باشد، تعداد راههای رسیدن به هدف نیز بیشتر خواهد بود. مثلاً بازوی مکانیکی ماهری با شش مفصل لولایی را در نظر بگیرید. شکل ۴-۵ نشان می دهد که چگونه ماکزیمم تعداد جوابها با تعداد پارامترهای غیرصفر  $a_i$  (پارامتر طول رابط) رابطه دارد. هرچه تعداد مقادیر  $a_i$  غیرصفر بیشتر باشد، ماکزیمم تعداد جوابها نیز بیشتر



شکل ۴-۴ چهار راه حل برای پیما  $0.56^\circ$ .

$a_i$	تعداد جوابها
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	$\leq 4$
$a_3 = a_5 = 0$	$\leq 8$
$a_3 = 0$	$\leq 16$
کلیه مقادیر $a_i \neq 0$	$\leq 16$

شکل ۴-۵ مقایسه تعداد جوابها با مقادیر غیر صفر  $a_i$ .

خواهد بود. در کلیترین حالت، برای بازوی مکانیکی ماهری با شش درجه آزادی و مفصلهای لولایی، تعداد جوابهای ممکن تا ۱۶ افزایش می یابد [۱]، [۶].

## روش حل

برخلاف معادله های خطی، معادله های غیرخطی را نمی توان با دنبال کردن الگوریتمی کلی حل کرد. به هنگام بررسی روشهای حل این گونه معادله ها، عاقلانه است ابتدا منظور از «جواب» در بازوهای مکانیکی توضیح داده شود.

هر بازوی مکانیکی هنگامی قابل حل است (جواب دارد) که بتوان با دنبال کردن الگوریتمی، همه مجموعه های متغیرهای مفصلی مربوط به مکان و جهت گیری مفروض را تعیین کرد [۲].

نکته اصلی در این تعریف آن است که می خواهیم، در صورتی که جوابهای چندگانه موجود باشد، همه آنها را به دست آوریم. به همین دلیل، از برخی روشهای عددی تکراری برای حل معادله های بازوی مکانیکی ماهر استفاده نخواهیم کرد، زیرا در این روشها تضمینی برای یافتن همه جوابها وجود ندارد.

در اینجا روشهای حل معادله های بازوهای مکانیکی ماهر را به دو دسته روشهای حل بسته و روشهای حل عددی تقسیم می کنیم. از آنجا که در روشهای عددی عملیات تکرار می شوند، در حالت کلی این روشها بسیار کندتر از روشهای بسته اند، و این کندتر بودن، به اندازه ای چشمگیر است که اصولاً برای حل معادله های سینماتیکی علاقه ای به استفاده از روشهای عددی نشان نمی دهیم. روشهای حل عددی از طریق تکرار عملیات، زمینه مطالعاتی مفصلی است و از محدوده این کتاب خارج است (مرجعهای [۶، ۱۱، ۱۲] را ببینید).

با توجه به آنچه گفته شد، خود را به روشهای حل بسته محدود می کنیم. در این کتاب، «روش بسته» به معنی روش حلی است که بر عبارتهای تحلیلی، یا حل یک چند جمله ای درجه ۴ یا کمتر که در آن محاسبات غیر تکراری اند، مبتنی است. روشهای حل بسته را می توان به دو گروه جبری و هندسی تقسیم کرد. شاید این تقسیم بندی تا حدی غیر دقیق باشد، زیرا هر روش هندسی با عبارتهای جبری بیان می شود و از این نظر، دو روش به هم شبیه اند. بنابراین، تفاوت آنها در رهیافت به مسئله است.

نتیجه ای بسیار مهم که اخیراً در سینماتیک حاصل شده، آن است که بر اساس تعریف ما از قابل حل بودن، همه سیستمهایی که مفصلهای کشویی و لولایی دارند و جمعاً شش درجه آزادی را در یک زنجیر سری سینماتیکی شامل می شوند، قابل حل اند. اما این حل کلی، یک حل عددی است. تنها در موارد خاص است که می توان روبانهای با شش درجه آزادی را به طور تحلیلی حل کرد. روبانهایی که برای آنها راه حل تحلیلی یا بسته وجود دارد، به وسیله چندین محور مفصل متقاطع، یا چندین مقدار  $\alpha$  برابر با  $0^\circ$  یا  $90^\circ \pm$  مشخص می شوند. نظر به اینکه روشهای عددی بسیار وقت گیرتر از روشهای تحلیلی اند، باید روبات را طوری طراحی کرد که معادله های سینماتیکی آن راه حل تحلیلی داشته باشند. طراحان بازوهای مکانیکی ماهر خیلی زود به این مطلب پی بردند

و در حال حاضر، تقریباً همه بازوهای مکانیکی به قدر کافی ساده طراحی می‌شوند و معادلات آنها جوابهای تحلیلی دارند.

شرطی کافی برای آنکه بازویی با شش مفصل لولایی، جواب تحلیلی داشته باشد، آن است که سه محور مفصلی همسایه آن یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند. در بخش ۴-۶ این شرط را بررسی می‌کنیم. تقریباً همه بازوهای مکانیکی ماهر با شش درجه آزادی که امروزه طراحی می‌شوند، سه محور مفصلی متقاطع دارند. مثلاً در پیوما ۵۶۰ محورهای ۴، ۵، و ۶ متقاطع‌اند.

#### ۳-۴ نمادگذاری زیرفضای بازوی مکانیکی ماهر در حالت $n < 6$

فضای کاری دسترسی‌پذیر هر بازوی مکانیکی ماهر، عبارت از مجموعه چهارچوبهای هدف دسترسی‌پذیر آن است. برای بازویی با  $n$  درجه آزادی ( $n < 6$ )، این فضای کاری دسترسی‌پذیر را می‌توان به صورت بخشی از یک زیرفضای دارای  $n$  درجه آزادی در نظر گرفت. همان‌طور که فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر با شش درجه آزادی، زیرمجموعه‌ای از فضای بازوست، فضای کاری بازویی ساده‌تر نیز زیرمجموعه‌ای از زیرفضای آن بازوست. مثلاً زیرفضای روبات دارای دو رابط در شکل ۴-۱، یک صفحه است، اما فضای کاری آن زیرمجموعه‌ای از این صفحه، یعنی دایره‌ای به شعاع  $l_1 + l_2$  (برای حالت  $l_1 = l_2$ ) است.

راهی برای مشخص کردن زیرفضای هر بازوی مکانیکی با  $n$  درجه آزادی، تعیین عبارتی ریاضی برای چهارچوب مج یا چهارچوب ابزار به صورت تابعی از  $n$  متغیر نشان‌دهنده مکان آن است. اگر این  $n$  متغیر را آزاد فرض کنیم، آنگاه هنگامی که آنها کلیه مقادیر ممکن را اختیار می‌کنند، زیرفضای مورد نظر ایجاد می‌شود.

#### ■ مثال ۴-۱

زیرفضای  ${}^B_W T$  را برای بازوی مکانیکی ماهر نشان داده شده در شکل ۳-۶ (فصل ۳) تعیین کنید. زیرفضای  ${}^B_W T$  به صورت زیر مشخص می‌شود:

$${}^B_W T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0/^\circ & x \\ s_\phi & c_\phi & 0/^\circ & y \\ 0/^\circ & 0/^\circ & 1/^\circ & 0/^\circ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

که در آن  $x$  و  $y$  مکان مج، و  $\phi$  جهتگیری آخرین رابط را نشان می‌دهد. با نسبت دادن مقادیر اختیاری به  $x$ ،  $y$ ، و  $\phi$ ، زیرفضای مورد نظر ایجاد می‌شود. هر چهارچوب مج که ساختار رابطه (۲-۴) را ندارد، در خارج از زیرفضای (و در نتیجه در خارج از فضای کاری) این بازوی مکانیکی

ماهر، قرار می‌گیرد. طول رابطها و محدودیتهای موجود در مفصلهای بازو، فضای کاری آن را به زیرمجموعه‌ای از این زیر فضا کاهش می‌دهد. ■

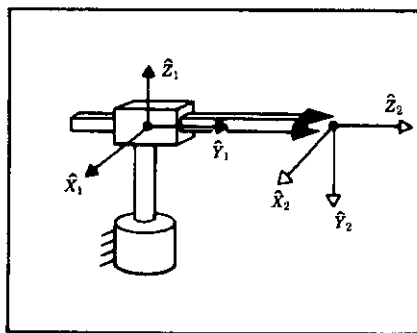
#### ■ مثال ۲-۴

زیرفضای  $T$  مربوط به بازوی مکانیکی قطبی با دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل ۴-۶ را تعیین کنید. داریم:

$${}^0P_{TORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳-۴)$$

که در آن  $x$  و  $y$  می‌توانند هر مقدار دلخواه باشند. در جهتگیری محدودیت وجود دارد، زیرا محور  ${}^0\hat{Z}_T$  باید در جهتی وابسته به  $x$  و  $y$  باشد. محور  ${}^0\hat{Y}_T$  همواره روبه پایین است، و محور  ${}^0\hat{X}_T$  از ضرب خارجی  ${}^0\hat{Z}_T \times {}^0\hat{Y}_T$  به دست می‌آید. برحسب  $x$  و  $y$  چنین به دست می‌آید

$${}^0\hat{Z}_T = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۴)$$



شکل ۴-۶ بازوی مکانیکی ماهر قطبی با دو رابط.

در نتیجه، زیرفضا چنین خواهد بود

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

معمولاً در تعریف هدف برای هر بازوی مکانیکی ماهر با  $\pi$  درجه آزادی، از  $\pi$  پارامتر استفاده می‌شود. از سوی دیگر، اگر مشخصات کامل شش درجه آزادی را داشته باشیم، در حالت کلی نخواهیم توانست با یک بازوی مکانیکی ماهر با  $6 < n$  به هدف برسیم. در چنین حالتی می‌توان به جای هدف اصلی، هدف دیگری را که در زیرفضای بازو قرار دارد و تا حد امکان به هدف اصلی «نزدیک» است، انتخاب کرد.

بدین ترتیب، هنگامی که بخواهیم برای بازوی مکانیکی ماهری با کمتر از شش درجه آزادی، هدفهای کلی تعیین کنیم، یک روش عمل چنین خواهد بود:

۱. با داشتن چهارچوب کلی  ${}^S_G T$ ، چهارچوب هدف تغییر یافته  ${}^S_G T$  را طوری به دست می‌آوریم که  ${}^S_G T$  در زیر فضای بازو قرار گیرد و تا حد امکان «نزدیک» به  ${}^S_G T$  باشد. برای واژه «نزدیک» نیز باید تعریفی ارائه کرد.

۲. معادله‌های سینماتیکی وارون را برای پیدا کردن زوایای مفصلی حل می‌کنیم و  ${}^S_G T$  را به عنوان هدف مورد نظر به کار می‌بریم. توجه کنید که در اینجا اگر نقطه هدف در فضای کاری بازو نباشد، ممکن است جوابی به دست نیاید.

در حالت کلی، عاقلانه است که ابتدا مبدأ چهارچوب ابزار را بر مکان مورد نظر منطبق، و سپس جهتگیری قابل قبول را که نزدیک به جهتگیری مورد نظر است، انتخاب کنیم. چنانکه در مثالهای ۱-۴ و ۲-۴ دیدیم، محاسبه زیر فضا به هندسه بازوی مکانیکی ماهر بستگی دارد. روش انجام این محاسبه را باید پس از بررسی جداگانه هر بازو، تعیین کرد.

در بخش ۴-۷، مثالی بررسی می‌شود که در آن هدفی کلی بر روی زیرفضای یک بازوی مکانیکی ماهر با پنج درجه آزادی تصویر شده است، تا بدین ترتیب بتوان آن دسته از زوایای مفصلی را که دسترسی بازو به نزدیکترین چهارچوب به موقعیت مطلوب را ممکن می‌سازند، محاسبه کرد.

#### ۴-۴ راه حل جبری در مقابل راه حل هندسی

به منظور آشنایی با حل معادله‌های سینماتیکی، در اینجا دو رهیافت مختلف برای حل معادله‌های یک بازوی مکانیکی ماهر ساده و صفحه‌ای با سه رابط را بررسی می‌کنیم.



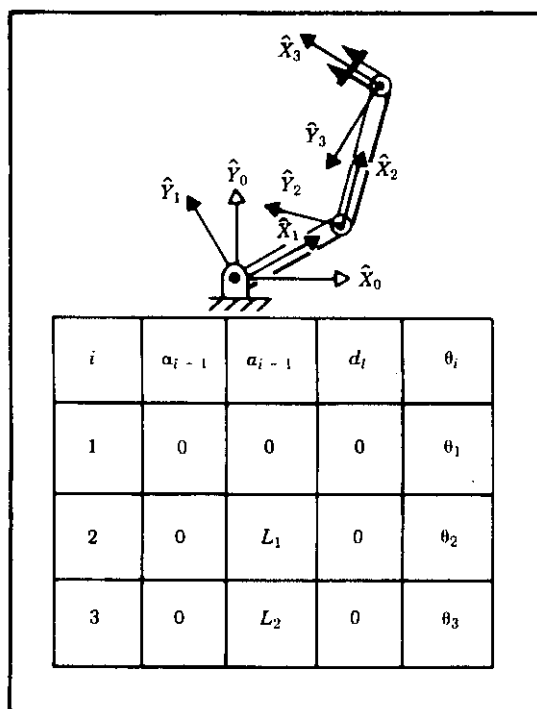
### راهنمای جبری

بازوی مکانیکی ماهر یا سه رابط را که در فصل ۳ معرفی شد، در نظر بگیرید. این بازو و پارامترهای رابط آن در شکل ۷-۴ نشان داده شده است.

با دنبال کردن روشی که در فصل ۳ گفته شد، از پارامترهای رابط برای به دست آوردن معادله‌های سینماتیکی این بازو استفاده می‌کنیم

$${}^B_W T = {}^{\dot{r}}T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0/0 & l_1 c_{12} + l_2 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0/0 & l_1 s_{12} + l_2 s_{123} \\ 0/0 & 0/0 & 1/0 & 0/0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۶-۴)$$

حال به منظور تمرکز بحث خود بر سینماتیک وارون، فرض می‌کنیم که تبدیلهای کلی لازم انجام



شکل ۷-۴ بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با سه رابط و پارامترهای رابط آن.

گرفته‌اند و در نتیجه نقطه هدف، به صورت مشخصه‌ای از چهارچوب میج نسبت به چهارچوب پایه در آمده است (تبدیل  ${}^B_W T$ ). چون بازو صفحه‌ای است، تعیین نقاط هدف به سادگی با سه عدد  $x$ ،  $y$ ، و  $\phi$  انجام می‌پذیرد ( $\phi$  جهتگیری رابط ۳ در صفحه نسبت به محور  $X$  است). بنابراین، به جای آنکه  ${}^B_W T$  را در حالت کلی به صورت مشخصه هدف به دست دهیم، تبدیلی با ساختار زیر را در نظر می‌گیریم

$${}^B_W T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0/0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0/0 & y \\ 0/0 & 0/0 & 1/0 & 0/0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

کلیه هدفهای قابل قبول، باید در زیرفضای نهفته در ساختار معادله (۷-۴) قرار گیرند. با مساری قراردادن معادله‌های (۶-۴) و (۷-۴)، دستگاهی از چهار معادله غیرخطی با مجهولهای  $\theta_1$ ،  $\theta_2$ ، و  $\theta_3$  به دست خواهد آمد

$$c_\phi = c_{122} \quad (8-4)$$

$$s_\phi = s_{122} \quad (9-4)$$

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \quad (10-4)$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \quad (11-4)$$

حال معادله‌های (۸-۴) تا (۱۱-۴) را به صورت جبری حل خواهیم کرد. اگر دو معادله (۱۰-۴) و (۱۱-۴) را به توان دو برسانیم، و سپس با یکدیگر جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 \quad (12-4)$$

که در آن از اتحادهای زیر استفاده کرده‌ایم

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$$

$$s_{12} = c_1 s_2 + s_1 c_2 \quad (13-4)$$

با حل معادله (۱۲-۴)،  $c_2$  چنین به دست می‌آید

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad (14-4)$$

شرط وجود جواب آن است که سمت راست معادله (۱۴-۴) بین ۱ و -۱ باشد. در الگوریتم حل

معادله، در این مرحله این قید واری می‌شود تا وجود جواب آشکار شود. از نظر فیزیکی، اگر  $c_2$  بین ۱ و ۱- نباشد، آنگاه نقطه هدف خارج از محدوده دسترسی روبات قرار دارد. با فرض اینکه هدف در داخل فضای کاری قرار دارد،  $s_2$  چنین محاسبه می‌شود

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (15-4)$$

و سرانجام  $\theta_2$  با استفاده از برنامه تابع دو شناسه‌ای  $\text{Atan2}$ <sup>۱</sup> چنین به دست می‌آید

$$\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2) \quad (16-4)$$

علامت معادله (۱۵-۴)، برحسب آنکه بخواهیم روبات در حالت «آرنج در بالا» یا «آرنج در پایین» باشد، انتخاب می‌شود. در به دست آوردن  $\theta_2$ ، از یکی از روشهای رایج حل معادله‌های سینماتیکی، یعنی تعیین سینوس و کسینوس زاویه مفصلی مورد نظر، و سپس از برنامه تابع دو شناسه‌ای  $\text{Atan2}$ ، استفاده کرده‌ایم. بدین ترتیب، کلیه جوابهای معادله به دست می‌آیند و زاویه محاسبه شده نیز در ربع مثلثاتی صحیح قرار می‌گیرد.

پس از پیدا کردن  $\theta_2$ ، می‌توان معادله‌های (۱۰-۴) و (۱۱-۴) را برای به دست آوردن  $\theta_1$  حل کرد. این دو معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = k_1 c_1 - k_2 s_1 \quad (17-4)$$

$$y = k_1 s_1 + k_2 c_1 \quad (18-4)$$

که در آن

$$k_1 = l_1 + l_2 c_2$$

$$k_2 = l_2 s_2 \quad (19-4)$$

به منظور حل معادله‌ای از این نوع، از روش تغییر متغیرها استفاده می‌کنیم. با این کار، در واقع ثابتهای  $k_1$  و  $k_2$  را به شکلی دیگر می‌نویسیم.

اگر

$$r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\gamma = \text{Atan2}(k_2, k_1) \quad (20-4)$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} k_1 &= r \cos \gamma \\ k_2 &= r \sin \gamma \end{aligned} \quad (21-4)$$

پس معادله‌های (۱۷-۴) و (۱۸-۴) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{x}{r} = \cos \gamma \cos \theta_1 - \sin \gamma \sin \theta_1 \quad (22-4)$$

$$\frac{y}{r} = \cos \gamma \sin \theta_1 + \sin \gamma \cos \theta_1 \quad (23-4)$$

یا

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r} \quad (24-4)$$

$$\sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r} \quad (25-4)$$

 با استفاده از تابع  $\text{Atan}^2$  داریم

$$\gamma + \theta_1 = \text{Atan}^2\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \text{Atan}^2(y, x) \quad (26-4)$$

و در نتیجه

$$\theta_1 = \text{Atan}^2(y, x) - \text{Atan}^2(k_2, k_1) \quad (27-4)$$

توجه کنید که وقتی علامت  $\theta_2$  (در معادله (۱۶-۴)) تغییر داده شود، علامت  $k_2$  نیز تغییر می‌کند و بر مقدار به‌دست آمده برای  $\theta_1$  تأثیر می‌گذارد. با جایگزینیهای نشان داده شده در معادله‌های (۲۰-۴) و (۲۱-۴)، روشی برای حل معادله‌های (۱۰-۴)، یا (۱۱-۴)، که در سینماتیک بسیار ظاهر می‌شوند، به دست می‌آید. اگر  $x = y = 0$ ، آن‌گاه معادله (۲۷-۴) تعریف نشده، و  $\theta_1$  اختیاری خواهد بود.

سرانجام، مجموع زوایای  $\theta_1$ ،  $\theta_2$  و  $\theta_3$  را می‌توان با استفاده از معادله‌های (۸-۴) و (۹-۴) به‌دست آورد:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{Atan}^2(s_\phi, c_\phi) = \phi \quad (28-4)$$

و از آنجا  $\theta_3$  حاصل می‌شود ( $\theta_1$  و  $\theta_2$  قبلاً به‌دست آمده‌اند). در هنگام حل معادلات بازوهای مکانیکی ماهر با دو یا سه رابط متحرک در صفحه، با عبارتهایی مانند (۲۸-۴) که به‌صورت مجموع زوایای مفصلی است، بسیار روبه‌رو می‌شویم.

به طور خلاصه، روش جبری حل معادله های سینماتیکی، عبارت است از تبدیل این معادله ها به صورتی که راه حل آن شناخته شده باشد. برای بسیاری از حالت های هندسی متداول، چند صورت از معادله های متعالی (غیر جبری) موجود است. در این بخش، دو نمونه از این گونه معادله ها را بررسی کردیم. در پیوست «ج» (در پایان کتاب) چند مورد دیگر از این راه حل های گوناگون آمده است.

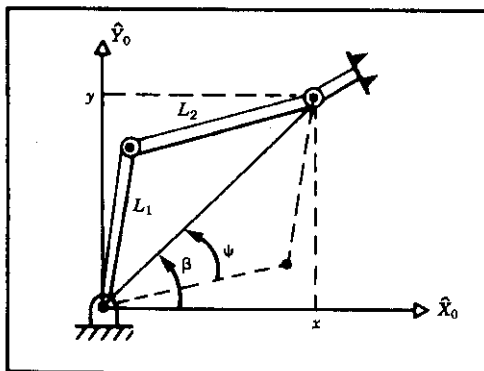
### راه حل هندسی

در رهیافت هندسی حل معادله های سینماتیکی بازوی مکانیکی ماهر، سعی می شود هندسه فضایی بازو به چند مسئله هندسه مسطحه تجزیه شود. این کار در بسیاری از بازوها (به ویژه هنگامی که  $\alpha_i = 0$  یا  $\alpha_i = \pm 90^\circ$ )، بسیار آسان است. پس از این مرحله، زوایای مفصلی با استفاده از اصول هندسه مسطحه [۷] به دست می آیند. برای بازوی با سه درجه آزادی در شکل ۴-۷، می توان برای یافتن جواب مستقیماً از هندسه مسطحه استفاده کرد، زیرا بازو صفحه ای است. در شکل ۴-۸ مثلث ساخته شده از  $l_1$ ،  $l_2$  و خط واصل بین مبدأ چهارچوب  $\{0\}$  و مبدأ چهارچوب  $\{2\}$ ، نشان داده شده است. خط چین ها مثلث دیگری را نمایش می دهند که می تواند برای رسیدن به وضعیت یکسانی از چهارچوب  $\{2\}$  به کار رود. با در نظر گرفتن مثلث مشخص شده با خط پر، و استفاده از «قانون کسینوسها»، می توان نوشت

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(180^\circ + \theta_2) \quad (29-4)$$

چون  $\cos(180^\circ + \theta_2) = -\cos(\theta_2)$ ، پس

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (30-4)$$



شکل ۴-۸ استفاده از هندسه مسطحه برای حل معادله های روبات صفحه ای با سه رابط.

شرط وجود این مثلث، آن است که فاصله تا هدف  $(\sqrt{x^2 + y^2})$  کمتر یا مساوی با مجموع طول رابطها  $(l_1 + l_2)$  باشد. در الگوریتم محاسباتی نوشته شده برای این حالت، باید در این مرحله صحت شرط فوق را تحقیق کرد. در صورتی که نقطه هدف خارج از دسترس بازو باشد، این شرط برقرار نخواهد شد. اگر فرض شود جواب وجود دارد، آنگاه معادله  $(4-30)$  مقدار  $\theta_2$  را بین  $0^\circ$  و  $180^\circ$  - به دست می دهد، زیرا تنها به ازای این مقادیر مثلث شکل  $4-8$  وجود دارد. جواب دیگر را (که به وسیله مثلث خط چین نشان داده شده است)، می توان با استفاده از تقارن، برابر  $\theta_2 = -\theta_1$  به دست آورد.

برای پیدا کردن  $\theta_1$ ، کافی است زوایای  $\psi$  و  $\beta$  را در شکل  $4-8$  به دست آوریم. زاویه  $\beta$  برحسب علامتهای  $x$  و  $y$ ، می تواند در هر یک از چهار ربع مختصات واقع شود. بنابراین، از تابع  $\text{Atan2}$  استفاده می کنیم و می نویسیم

$$\beta = \text{Atan2}(y, x) \quad (31-4)$$

حال دوباره قانون کسینوسها را می نویسیم و  $\psi$  را پیدا می کنیم:

$$\cos \psi = \frac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (32-4)$$

که در آن به منظور حفظ ترتیب هندسی پدید آورنده رابطه  $(32-4)$ ، باید  $0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$  باشد. این گونه ملاحظات، در روش هندسی بسیار معمول است و روابط به دست آمده تنها در گستره ای از متغیرها که به ازای آنها هندسه مسئله محفوظ می ماند، به کار می روند. در نتیجه داریم

$$\theta_1 = \beta \pm \psi \quad (33-4)$$

که در آن علامت مثبت برای حالت  $\theta_2 < 0^\circ$  و علامت منفی برای حالت  $\theta_2 > 0^\circ$  به کار می رود. با توجه به اینکه در صفحه، زوایا را می توان با هم جمع کرد، جهت گیری آخرین رابط به صورت مجموع سه زاویه مفصلی، چنین نوشته می شود:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_r = \phi \quad (34-4)$$

با پیدا کردن  $\theta_2$  از معادله فوق، حل مسئله کامل خواهد شد.

## ۵-۴ راه حل جبری از طریق تبدیل به چندجمله ای

حل معادله های متعالی (غیرجبری) دشوار است، زیرا این معادله ها اگر چه ممکن است تنها یک متغیر (مانند  $\theta$ ) داشته باشند، اما اغلب برحسب  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  ظاهر می شوند. با به کار بردن روابط

زیرا، می‌توان معادله‌ای برحسب متغیر ساده  $u$  به‌دست آورد

$$\begin{aligned} u &= \tan \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ \sin \theta &= \frac{2u}{1 + u^2} \end{aligned} \quad (35-4)$$

از جایگزینیهای فوق، در حل معادله‌های سینماتیکی استفاده بسیار می‌شود و با به‌کار بردن آنها، می‌توان معادله‌های متعالی را به معادله‌هایی به‌صورت چند جمله‌ایهایی برحسب  $u$ ، تبدیل کرد. در پیوست «الف» فهرستی از این جایگزینیها و دیگر اتحادهای مثلثاتی آمده است.

#### ■ مثال ۳-۴

معادله متعالی زیر را به یک چند جمله‌ای بر حسب تانژانت نصف زاویه تبدیل کنید و زاویه  $\theta$  را به‌دست آورید:

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c \quad (36-4)$$

با استفاده از (۳۵-۴) و ضرب طرفین معادله در  $(1 + u^2)$  نتیجه می‌شود

$$a(1 - u^2) + 2bu = c(1 + u^2) \quad (37-4)$$

پس از مرتب کردن برحسب توانهای  $u$  داریم

$$(a + c)u^2 - 2bu + (c - a) = 0 \quad (38-4)$$

از آنجا  $u$  حاصل می‌شود

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c} \quad (39-4)$$

و سرانجام  $\theta$  به‌دست می‌آید

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left( \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c} \right) \quad (40-4)$$

اگر در مواردی به‌دست آوردن  $u$  از معادله (۳۹-۴) دشوار باشد، معادله متعالی اصلی جواب حقیقی ندارد. توجه کنید که اگر  $a + c = 0$ ، شناسه آرک تانژانت بینهایت می‌شود و در نتیجه  $\theta = 180^\circ$ . در برنامه کامپیوتری نوشته شده برای حل این معادله، احتمال تقسیم بر صفر باید قبلاً پیش‌بینی شود. حالت تقسیم بر صفر، بر اثر از میان رفتن جمله درجه دوم در معادله (۳۸-۴) و

تبدیل شدن معادله به معادله درجه اول، ایجاد می‌شود.

از آنجا که چند جمله‌ایهای تا درجه ۴، جوابهای بسته [۸، ۹] دارند، آن دسته از بازوهای مکانیکی ماهر را که به قدر کافی ساده‌اند و می‌توان با معادله‌های جبری درجه ۴ یا کمتر آنها را حل کرد، به نام بازوهای قابل حل به طریق بسته می‌خوانند.

#### ۴-۶ روش حل پایپر برای سه محور متقاطع در یک نقطه

چنانکه پیش از این گفته شد، اگر چه رویات با شش درجه آزادی، در حالت کلی جواب بسته ندارد، اما در موارد ویژه و پراهمیت می‌توان جواب را به صورت بسته به دست آورد. پایپر [۳، ۴]، بازوهای مکانیکی ماهری با شش درجه آزادی را که در آنها سه محور پیایی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند<sup>۲</sup>، مطالعه کرد. در این بخش، روشی را که او برای حالتی که در آن هر شش مفصل لولایی و سه محور آخر متقارب‌اند پی‌ریزی کرده است، بررسی می‌کنیم. روش پایپر برای حالت‌های دیگر، شامل مفصل‌های کشویی، نیز به کار می‌رود (خواننده علاقه‌مند، می‌تواند مرجع [۴] را ببیند). از این روش می‌توان برای بیشتر روبات‌های صنعتی موجود، استفاده کرد.

هنگامی که سه محور آخر یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، مبدأ چهارچوب‌های رابط {۴}، {۵}، و {۶} در این نقطه تقاطع واقع می‌شوند. مختصات این نقطه در چهارچوب پایه چنین است

$${}^i P_{TORG} = {}^i T {}_i^j T {}_j^r T {}^r P_{TORG} \quad (41-4)$$

یا با استفاده از ستون چهارم در رابطه (۳-۶) به‌ازای  $i = 4$ ، می‌توان نوشت

$${}^i P_{TORG} = {}^i T {}_i^j T {}_j^r T \begin{bmatrix} a_r \\ -d_r s\alpha_r \\ d_r c\alpha_r \\ \backslash \end{bmatrix} \quad (42-4)$$

یا

$${}^i P_{TORG} = {}^i T {}_i^j T \begin{bmatrix} f_1(\theta_r) \\ f_2(\theta_r) \\ f_3(\theta_r) \\ \backslash \end{bmatrix} \quad (43-4)$$

1. Pieper

۲. روبات‌های دارای سه محور پیایی موازی نیز جزو این خانواده‌اند، زیرا این محورها یکدیگر را در نقطه‌ای در بینهایت قطع می‌کنند.



که در آن

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^T_r T \begin{bmatrix} a_r \\ -d_r s \alpha_r \\ d_r c \alpha_r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44-4)$$

با استفاده از رابطه (۶-۳) به جای  ${}^T_r T$  در (۴۴-۴)، عبارتهای زیر برای  $f_i$  به دست می‌آید

$$\begin{aligned} f_1 &= a_r c_r + d_r s \alpha_r s_r + a_r \\ f_2 &= a_r c \alpha_r s_r - d_r s \alpha_r c \alpha_r c_r - d_r s \alpha_r c \alpha_r - d_r s \alpha_r \quad (45-4) \\ f_3 &= a_r s \alpha_r s_r - d_r s \alpha_r s \alpha_r c_r + d_r c \alpha_r c \alpha_r + d_r c \alpha_r \end{aligned}$$

و اگر رابطه (۶-۳) را به جای  ${}^T_r T$  و  ${}^T_r T$  در (۴۳-۴) به کار ببریم، نتیجه می‌شود

$${}^*P_{rORG} = \begin{bmatrix} c_1 g_1 - s_1 g_2 \\ s_1 g_1 + c_1 g_2 \\ g_r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46-4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} g_1 &= c_r f_1 - s_r f_2 + a_1 \\ g_2 &= s_r c \alpha_1 f_1 + c_r c \alpha_1 f_2 - s \alpha_1 f_r - d_r s \alpha_1 \quad (47-4) \\ g_r &= s_r s \alpha_1 f_1 + c_r s \alpha_1 f_2 + c \alpha_1 f_r + d_r c \alpha_1 \end{aligned}$$

حال عبارتی برای مربع مقدار  ${}^*P_{rORG}$  می‌نویسیم. با توجه به (۴۶-۴) داریم

$$r = g_1^2 + g_2^2 + g_r^2 \quad (48-4)$$

یا با استفاده از (۴۷-۴) به جای  $g_i$  داریم

$$r = f_1^2 + f_2^2 + f_r^2 + a_1^2 + d_r^2 + 2d_r f_r + 2a_1(c_r f_1 - s_r f_2) \quad (49-4)$$

حال این معادله را، به همراه معادله مربوط به مؤلفه  $Z$  در (۴۶-۴)، به صورت یک دستگاه معادلات

به شکل زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} r &= (k_1 c_r + k_2 s_r) 2a_1 + k_r \\ z &= (k_1 s_r - k_2 c_r) s\alpha_1 + k_z \end{aligned} \quad (50-4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1 \\ k_2 &= -f_2 \\ k_r &= f_1^2 + f_2^2 + f_r^2 + a_1^2 + d_r^2 + 2d_r f_r \\ k_z &= f_r c\alpha_1 + d_r c\alpha_1 \end{aligned} \quad (51-4)$$

معادله (50-4) معادله‌ای سودمند است، زیرا در آن  $\theta_1$  حذف شده، وابستگی به  $\theta_2$  در آن به صورت ساده‌ای درآمده است.

حال (50-4) را برای به دست آوردن  $\theta_2$  حل می‌کنیم. در اینجا با سه حالت زیر روبه‌رو می‌شویم:

۱. اگر  $\alpha_1 = 0$ ، آنگاه داریم  $r = k_r$ ، که در آن  $r$  معلوم است. طرف راست ( $k_r$ )، تنها تابعی از متغیر  $\theta_2$  است. پس از قرار دادن مقادیر از رابطه (4-35)، معادله‌ای درجه دوم برحسب  $\tan \frac{\theta_2}{2}$  حاصل می‌شود که می‌توان آن را برای یافتن  $\theta_2$  حل کرد.

۲. اگر  $s\alpha_1 = 0$ ، آنگاه داریم  $z = k_z$ ، که در آن  $z$  معلوم است. در اینجا نیز پس از جایگزینی مقادیر از رابطه (4-35)، معادله درجه دومی حاصل می‌شود که می‌توان  $\theta_2$  را از آن به دست آورد.

۳. در سایر حالتها،  $s_r$  و  $c_r$  را از (50-4) حذف می‌کنیم تا نتیجه زیر حاصل شود

$$\frac{(r - k_r)^2}{4a_1^2} + \frac{(z - k_z)^2}{s^2\alpha_1} = k_1^2 + k_2^2 \quad (52-4)$$

این معادله، پس از قراردادن رابطه (4-35) به جای  $\theta_2$ ، به معادله‌ای از درجه 4 تبدیل می‌شود، و می‌توان  $\theta_2$  را از آن به دست آورد.<sup>۱</sup>

پس از محاسبه  $\theta_2$ ، می‌توان معادله (50-4) را برای به دست آوردن  $\theta_2$ ، و معادله (4-46) را برای پیدا کردن  $\theta_1$ ، حل کرد.

۱. در اینجا رابطه زیر مفید است

$$f_1^2 + f_2^2 + f_r^2 = a_1^2 + d_r^2 + d_r^2 + a_1^2 + 2d_r d_r c\alpha_r + 2a_1 a_r c\alpha_r + 2a_1 d_r s\alpha_r s_r$$

به منظور کامل کردن حل مسئله، باید  $\theta_4$ ،  $\theta_5$  و  $\theta_6$  را نیز به دست آورد. چون این سه محور یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند، زوایای مفصلی آنها تنها بر جهتگیری آخرین رابط تأثیر خواهند گذاشت. در نتیجه می توانیم این زوایا را فقط با استفاده از قسمت دورانی هدف تعیین شده، یعنی  $R$  به دست آوریم. پس از آنکه  $\theta_1$ ،  $\theta_2$  و  $\theta_3$  محاسبه شدند، می توان  $R|_{\theta_1=0}$ ، یعنی جهتگیری چهارچوب رابط  $\{4\}$  نسبت به چهارچوب پایه در حالت  $\theta_1 = 0$  را به دست آورد. تفاوت جهتگیری مطلوب چهارچوب  $\{6\}$  با این جهتگیری، تنها در طرز عمل سه مفصل آخر است. چون در این مسئله  $R$  داده شده است، می توان نوشت

$${}^4R|_{\theta_1=0} = {}^4R^{-1}|_{\theta_1=0} {}^6R \quad (۵۳-۴)$$

در بسیاری از بازوهای مکانیکی ماهر، این سه زاویه آخر را می توان با به کار بردن روش حل زوایای اوپلز Z-Y-Z (فصل ۲) در مورد  ${}^4R|_{\theta_1=0}$  محاسبه کرد. در هر بازوی مکانیکی با محوره های ۴، ۵ و ۶ متقاطع، سه زاویه مفصلی آخر را می توان به صورت مجموعه ای از زوایای اوپلز، که به طریزی مناسب تعریف شده اند، به دست آورد. چون همواره برای سه مفصل آخر دو جواب وجود دارد، تعداد کل جوابها برای روبات، دو برابر تعداد جوابهای پیدا شده برای سه مفصل اول خواهد بود.

#### ۷-۴ مثالهایی از سینماتیک وارون بازوهای مکانیکی ماهر

در این بخش، سینماتیک وارون را برای دو روبات صنعتی به کار خواهیم گرفت. روش به کار رفته برای یکی از این روباتهای جبری، و برای دیگری قسمتی جبری و قسمتی هندسی خواهد بود. اگر چه این روشها راه حل قدم به قدمی برای حل معادله های سینماتیکی روباتها در حالت کلی به دست نمی دهند، اما بسیاری از عملیاتی را که در بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر معمول اند، نمایش می دهند.

##### روبات یونیمیشن پیوما ۵۶۰

در اینجا به عنوان مثالی از کاربرد روش جبری برای روباتی با شش درجه آزادی، معادله های سینماتیکی پیوما ۵۶۰ را که در فصل ۳ به دست آمدند، حل خواهیم کرد. راه حل ارائه شده، با روش مرجع [۵] یکسان است.

هدف ما حل معادله زیر و محاسبه  $\theta_i$  در هنگامی است که  $T$  به صورت مقادیر عددی داده شده باشد

$${}^0T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۵۴-۴)$$

$$= {}^1T(\theta_1) {}^2T(\theta_2) {}^3T(\theta_3) {}^4T(\theta_4) {}^5T(\theta_5) {}^6T(\theta_6)$$

معادله (۴-۵۴) را می‌توان به صورت زیر، که در آن جمله‌های شامل  $\theta_1$  در طرف چپ قرار می‌گیرند، نوشت

$$[{}^1T(\theta_1)]^{-1} {}^5T = {}^1T(\theta_2) {}^2T(\theta_3) {}^3T(\theta_4) {}^4T(\theta_5) {}^6T(\theta_6) \quad (۴-۵۵)$$

با وارون کردن  ${}^1T$ ، معادله (۴-۵۵) به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1T \quad (۴-۵۶)$$

که در آن  ${}^6T$  با رابطه (۳-۱۳) در فصل ۳ داده شده است. این روش ساده ضرب کردن دو طرف معادله تبدیل در تبدیل وارون، غالباً در جدا کردن متغیرها و به دست آوردن معادله‌ای قابل حل، مفید واقع می‌شود.

با مساوی قرار دادن عنصرهای (۴، ۲) در دو طرف معادله (۴-۵۶)، داریم

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_2 \quad (۴-۵۷)$$

برای حل معادله‌ای با شکل فوق، از جایگزینیهای مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} p_x &= \rho \cos \phi \\ p_y &= \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (۴-۵۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \phi &= \text{Atan2}(p_y, p_x) \end{aligned} \quad (۴-۵۹)$$

با قراردادن (۴-۵۸) در (۴-۵۷) نتیجه می‌شود

$$c_1 s_\phi - s_1 c_\phi = \frac{d_2}{\rho} \quad (۴-۶۰)$$

و با به کار بردن فرمول تفاضل زاویه‌ها داریم

$$\sin(\phi - \theta_1) = \frac{d_2}{\rho} \quad (۴-۶۱)$$

بنابراین

$$\cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \frac{d_r^2}{\rho^2}} \quad (۶۲-۴)$$

و همچنین

$$\phi - \theta_1 = \text{Atan2} \left( \frac{d_r}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \frac{d_r^2}{\rho^2}} \right) \quad (۶۳-۴)$$

سرانجام  $\theta_1$  چنین پیدا می‌شود

$$\theta_1 = \text{Atan2}(p_y, p_x) - \text{Atan2} \left( d_r, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_r^2} \right) \quad (۶۴-۴)$$

توجه کنید که برای  $\theta_1$  دو جواب (یکی برای علامت مثبت و یکی برای علامت منفی در رابطه (۶۴-۴)) به دست می‌آید. با پیدا شدن جواب  $\theta_1$ ، طرف چپ معادله (۵۶-۴) معلوم می‌شود. با مساوی قرار دادن عنصرهای (۱-۴) و (۳-۴) در دو طرف (۵۶-۴)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} c_1 p_x + s_1 p_y &= a_r c_{r2} - d_r s_{r2} + a_r c_r \\ -p_z &= a_r s_{r2} + d_r c_{r2} + a_r s_r \end{aligned} \quad (۶۵-۴)$$

اگر معادله‌های (۶۵-۴) و (۵۷-۴) را به توان دو برسانیم و معادله‌های حاصل را با هم جمع کنیم، داریم

$$a_r c_r - d_r s_r = K \quad (۶۶-۴)$$

که در آن

$$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_r^2 - a_r^2 - d_r^2 - d_r^2}{2a_r} \quad (۶۷-۴)$$

توجه کنید که در معادله (۶۶-۴)، وابستگی به  $\theta_1$  وجود ندارد. معادله (۶۶-۴) به شکل معادله (۵۷-۴) است و در نتیجه می‌توان با جایگزینیهای مثلثاتی مشابه، آن را حل کرد و  $\theta_r$  را چنین به دست آورد

$$\theta_r = \text{Atan2}(a_r, d_r) - \text{Atan2} \left( K, \pm \sqrt{a_r^2 + d_r^2 - K^2} \right) \quad (۶۸-۴)$$

علامت مثبت یا منفی در معادله (۶۸-۴)، به دو جواب متفاوت برای  $\theta_r$  می‌انجامد.

اگر دوباره رابطه (۴-۵۴) را در نظر بگیریم، خواهیم دید که می‌توان آن را طوری نوشت که طرف چپ آن فقط تابعی از مقادیر معلوم و  $\theta_r$  باشد. پس

$$[{}^rT(\theta_r)]^{-1} {}^rT = {}^rT(\theta_r) {}^oT(\theta_o) {}^sT(\theta_s) \quad (۴-۶۹)$$

یا

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{rr} & s_1 c_{rr} & -s_{rr} & -a_r c_r \\ -c_1 s_{rr} & -s_1 s_{rr} & -c_{rr} & a_r s_r \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^rT \quad (۴-۷۰)$$

که در آن  ${}^rT$  از معادله (۳-۱۱) در فصل ۳ به‌دست می‌آید. با مساوی قرار دادن عنصرهای (۴-۱) و (۴-۷۰) در دو طرف معادله (۴-۷۰)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} c_1 c_{rr} p_x + s_1 c_{rr} p_y - s_{rr} p_z - a_r c_r &= a_r \\ -c_1 s_{rr} p_x - s_1 s_{rr} p_y - c_{rr} p_z + a_r s_r &= d_r \end{aligned} \quad (۴-۷۱)$$

این معادله‌ها را می‌توان به‌طور همزمان حل کرد و  $c_{rr}$  و  $s_{rr}$  را چنین به‌دست آورد

$$\begin{aligned} s_{rr} &= \frac{(-a_r - a_r c_r) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_r s_r - d_r)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \\ c_{rr} &= \frac{(a_r s_r - d_r) p_z - (-a_r - a_r c_r)(c_1 p_x + s_1 p_y)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \end{aligned} \quad (۴-۷۲)$$

چون در این دو رابطه مخرجها مساوی و مثبت‌اند، مجموع  $\theta_r$  و  $\theta_{rr}$  را چنین پیدا خواهیم کرد

$$\begin{aligned} \theta_{rr} &= \text{Atan}^2[(-a_r - a_r c_r) p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(d_r - a_r s_r) \\ &\quad (a_r s_r - d_r) p_z - (a_r + a_r c_r)(c_1 p_x + s_1 p_y)] \end{aligned} \quad (۴-۷۳)$$

معادله (۴-۷۳) چهار مقدار را (متناظر با چهار ترکیب ممکن از جوابهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ) برای  $\theta_{rr}$  به‌دست می‌دهد. چهار جواب  $\theta_r$  به‌صورت زیر خواهند بود

$$\theta_r = \theta_{rr} - \theta_r \quad (۴-۷۴)$$

جواب مناسب برای  $\theta_r$ ، با تشکیل تفاضل بالا به‌دست می‌آید.

بدین ترتیب، سمت چپ معادله (۴-۷۰) به‌طور کامل معلوم است. با مساوی قرار دادن عنصرهای

(۱,۳) و (۳,۳) در دو طرف معادله (۷۰-۴)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \tau_{12}c_1c_{22} + \tau_{22}s_1c_{22} - \tau_{22}s_{22} &= -c_2s_5 \\ -\tau_{12}s_1 + \tau_{22}c_1 &= s_2s_5 \end{aligned} \quad (75-4)$$

تا زمانی که  $s_5 \neq 0$ ، می‌توان  $\theta_2$  را چنین به‌دست آورد

$$\theta_2 = \text{Atan2}(-\tau_{12}s_1 + \tau_{22}c_1, -\tau_{12}c_1c_{22} - \tau_{22}s_1c_{22} + \tau_{22}s_{22}) \quad (76-4)$$

اگر  $\theta_5 = 0$ ، بازو پیکربندی تکینی دارد که در آن محورهای مفصلی ۴ و ۶ همراستا باشند و باعث ایجاد یک نوع حرکت در رابط نهایی می‌شوند. در این حالت، تنها چیزی که اهمیت دارد (و تنها جوابی که قابل محاسبه است)، مجموع یا تفاضل زوایای  $\theta_2$  و  $\theta_6$  است. این پیکربندی تکین را می‌توان با واریسی هر دو شناسه تابع  $\text{Atan2}$  در (۷۶-۴) و تحقیق اینکه آیا آنها در حوالی صفر قرار دارند، آشکار ساخت. اگر این حالت برقرار باشد،  $\theta_2$  ابتدا به دلخواه انتخاب می‌شود<sup>۱</sup>، و پس از محاسبه  $\theta_6$ ، مجدداً با توجه به مقدار  $\theta_6$ ، آن را به‌دست می‌آوریم.

معادله (۵۴-۴) را می‌توان به‌گونه‌ای نوشت که طرف چپ آن تابعی از فقط مقادیر معلوم  $\theta_2$  باشد، یعنی

$$[{}^2T(\theta_2)]^{-1} {}^2T = {}^5_0T(\theta_5) {}^0_2T(\theta_6) \quad (77-4)$$

که در آن  $[{}^2T(\theta_2)]^{-1}$  از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} c_1c_{22}c_2 + s_1s_2 & s_1c_{22}c_2 - c_1s_2 & -s_{22}c_2 & -a_2c_2c_2 + d_2s_2 - a_2c_2 \\ -c_1c_{22}s_2 + s_1c_2 & -s_1c_{22}s_2 - c_1c_2 & s_{22}s_2 & a_2c_2s_2 + d_2c_2 + a_2s_2 \\ -c_1s_{22} & -s_1s_{22} & -c_{22} & a_2s_2 - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (78-4)$$

تبدیل  ${}^2T$  در معادله (۷۰-۳) از فصل ۳ داده شده است. با مساوی قرار دادن عنصرهای (۱,۳) و (۳,۳) در دو طرف (۷۷-۴) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \tau_{12}(c_1c_{22}c_2 + s_1s_2) + \tau_{22}(s_1c_{22}c_2 - c_1s_2) - \tau_{22}(s_{22}c_2) &= -s_5 \\ \tau_{12}(-c_1s_{22}) + \tau_{22}(-s_1s_{22}) + \tau_{22}(-c_{22}) &= c_5 \end{aligned} \quad (79-4)$$

۱. معمولاً  $\theta_2$  را برابر با مقدار فعلی زاویه مفصلی ۴ در نظر می‌گیرند.

پس می‌توان  $\theta_5$  را چنین پیدا کرد

$$\theta_5 = \text{Atan2}(s_5, c_5) \quad (۸۰-۴)$$

که در آن  $s_5$  و  $c_5$  از رابطه (۷۹-۴) به‌دست می‌آیند. با استفاده دوباره از همان روش، می‌توان  $(\dot{\theta}_5 T)^{-1}$  را محاسبه کرد و (۵۴-۴) را به‌صورت زیر نوشت

$$(\dot{\theta}_5 T)^{-1} \dot{\theta}_5 T = \dot{\theta}_5 T(\theta_5) \quad (۸۱-۴)$$

با مساوی قراردادن عنصرهای (۳، ۱) و (۱، ۱) در دو طرف معادله (۷۷-۴)،  $\theta_6$  چنین محاسبه می‌شود

$$\theta_6 = \text{Atan2}(s_6, c_6) \quad (۸۲-۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} s_6 &= -r_{11}(c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_2) - r_{21}(s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_2) + r_{31}(s_{23} s_2) \\ c_6 &= r_{11}[(c_1 c_{23} c_2 + s_1 s_2) c_5 - c_1 s_{23} s_5] + r_{21}[(s_1 c_{23} c_2 - c_1 s_2) c_5 - s_1 s_{23} s_5] \\ &\quad - r_{31}(s_{23} c_2 c_5 + c_{23} s_5) \end{aligned}$$

چون علامتهای مثبت یا منفی در (۶۴-۴) و (۶۸-۴) ظاهر می‌شوند، این معادله‌ها چهار جواب دارند. علاوه بر این، چهار جواب دیگر نیز برای حالت «معکوس کردن» مچ روبات به‌دست می‌آید. جوابهای معکوس متناظر با چهار جواب محاسبه شده در بالا، چنین‌اند

$$\begin{aligned} \theta'_4 &= \theta_4 + 180^\circ \\ \theta'_5 &= -\theta_5 \\ \theta'_6 &= \theta_6 + 180^\circ \end{aligned} \quad (۸۳-۴)$$

پس از پیدا کردن هر هشت جواب فوق، ممکن است لازم باشد برخی از آنها به‌دلیل وجود محدودیت در حرکت مفصلها، کنار گذاشته شوند. از جوابهای باقیمانده، جوابی که به وضعیت موجود بازوی مکانیکی ماهر نزدیکتر است، انتخاب خواهد شد.

### روبات یازوکاوا موتومان I-۳

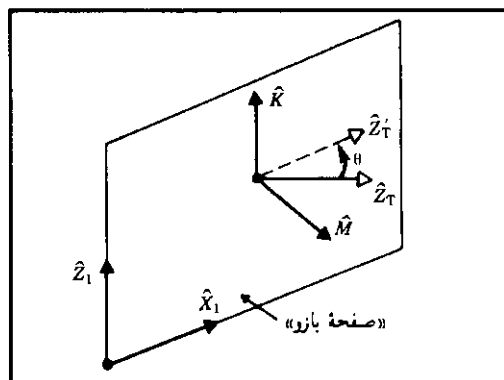
در این مثال، معادله‌های سینماتیکی روبات یازوکاوا موتومان I-۳ را، که در فصل ۳ پی‌ریزی شد، حل می‌کنیم. روش حل قسمتی جبری و قسمتی هندسی است. این روبات سه ویژگی دارد که مسئله سینماتیک وارون آن را کاملاً از سینماتیک پیوما متمایز می‌سازد. اولین ویژگی آن است که



این روبات به سبب داشتن تنها پنج مفصل، نمی‌تواند مکان و جهتگیری مجری نهایی خود را برای چهارچوبهای هدف در حالت کلی، تنظیم کند. ویژگی دوم آن است که وجود مکانیزمهای چهارمیله‌ای و محرک زنجیری در این روبات، باعث می‌شود حرکت یک کارانداز به حرکت دو یا چند مفصل بینجامد. و سرانجام، ویژگی سوم آن است که محدوده مکانی کاراندازها ثابت نیست و به مکان کاراندازهای دیگر بستگی دارد. در نتیجه، پیش‌بینی اینکه آیا مجموعه مقادیر محاسبه شده برای کاراندازها، در گستره مجاز قرار دارد یا نه، آسان نیست.

طبیعت زیر فضای روبات موتومان (و بسیاری از روباتهای با پنج درجه آزادی) به گونه‌ای است که می‌توان آن را با مقرر کردن یک قید برای جهتگیری مورد نظر، توصیف کرد: جهت اشاره ابزار، یعنی محور  $\hat{Z}_T$ ، باید در «صفحه بازوی مکانیکی» قرار گیرد. این صفحه، صفحه قائمی است که محور مفصل ۱، و نقطه برخورد محوره‌های ۴ و ۵ را در بر می‌گیرد. نزدیکترین جهتگیری به هر جهتگیری کلی، جهتگیری است که در آن جهت اشاره ابزار، با حداقل دوران ممکن، در صفحه فوق قرار می‌گیرد. در اینجا بدون آنکه برای این زیرفضا تعریف صریحی ارائه کنیم، روشی را برای تصویر کردن یک چهارچوب هدف کلی بر روی آن، تعیین خواهیم کرد. توجه کنید که این بحث تنها برای حالتی که تفاوت چهارچوب میج و چهارچوب ابزار تنها در یک انتقال در راستای  $\hat{Z}_W$  است، درست است.

در شکل ۴-۹، صفحه بازوی روبات را با بردار عمود بر آن،  $\hat{M}$ ، و جهت اشاره مورد نظر برای ابزار را با  $\hat{Z}_T$  مشخص می‌کنیم. این جهت اشاره باید حول برداری چون  $\hat{K}$  به اندازه زاویه  $\theta$  دوران داده شود تا بر اثر آن جهت اشاره جدید،  $\hat{Z}_T'$ ، در صفحه بازو قرار گیرد. روشن است که بردار  $\hat{K}$  مینیمم کننده  $\theta$ ، در صفحه بازو قرار دارد و بر  $\hat{Z}_T$  و  $\hat{Z}_T'$  عمود است.



شکل ۴-۹ دوران چهارچوب هدف به داخل زیر فضای روبات موتومان.

بردار  $\hat{M}$  برای هر چهارچوب هدف مفروض، چنین تعریف می‌شود

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۸۴-۴)$$

که در آن  $p_x$  و  $p_y$  مختصات  $X$  و  $Y$  مربوط به مکان مطلوب ابزارند. در نتیجه بردار  $\hat{K}$  چنین به‌دست می‌آید

$$K = \hat{M} \times \hat{Z}_T \quad (۸۵-۴)$$

و بردار  $\hat{Z}'_T$  از رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\hat{Z}'_T = \hat{K} \times \hat{M} \quad (۸۶-۴)$$

زاویه دوران  $\theta$  نیز چنین است

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \hat{Z}_T \cdot \hat{Z}'_T \\ \sin \theta &= (\hat{Z}_T \times \hat{Z}'_T) \cdot \hat{K} \end{aligned} \quad (۸۷-۴)$$

با استفاده از فرمول رودریکز (تمرین ۲-۲۰ را ببینید)، نتیجه می‌شود

$$\hat{Y}'_T = c\theta \hat{Y}_T + s\theta(\hat{K} \times \hat{Y}_T) + (1 - c\theta)(\hat{K} \cdot \hat{Y}_T)\hat{K} \quad (۸۸-۴)$$

سرانجام، ستون مجهول باقیمانده از ماتریس دوران جدید ابزار، چنین به‌دست می‌آید

$$\hat{X}'_T = \hat{Y}'_T \times \hat{Z}'_T \quad (۸۹-۴)$$

معادله‌های (۸۴-۴) تا (۸۹-۴)، روشی را برای تصویر کردن هر جهتگیری هدف کلی مفروض بر روی زیرفضای روبات موتومان، ارائه می‌دهند.

حال با فرض اینکه چهارچوب داده شده برای میج،  ${}^B_W T$ ، در زیرفضای روبات قرار دارد، معادله‌های سینماتیکی را حل خواهیم کرد. چنانکه دیدیم، در فصل ۳ حاصلضرب تبدیلهای رابط کلی برای موتومان ۳-۱، چنین به‌دست آمد

$${}^0T = {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T \quad (۹۰-۴)$$

اگر

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (91-4)$$

و دو طرف معادله فوق را در  ${}^0_5T^{-1}$  ضرب کنیم، داریم

$${}^0_5T^{-1} {}^0_5T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T \quad (92-4)$$

در این رابطه، طرف چپ برابر است با

$$\begin{bmatrix} c_1 r_{11} + s_1 r_{21} & c_1 r_{12} + s_1 r_{22} & c_1 r_{13} + s_1 r_{23} & c_1 p_x + s_1 p_y \\ -r_{21} & -r_{22} & -r_{23} & -p_z \\ -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} & -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} & -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} & -s_1 p_x + c_1 p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (93-4)$$

و طرف راست

$$\begin{bmatrix} * & * & s_{234} & * \\ * & * & -c_{234} & * \\ s_\delta & c_\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (94-4)$$

که در آن چند عنصر مشخص نشده‌اند. با مساوی قرار دادن عنصرهای (۳،۴)، نتیجه می‌شود

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = 0 \quad (95-4)$$

و از آنجا  $\theta_1$  حاصل می‌شود<sup>۱</sup>

$$\theta_1 = \text{Atan}^2(p_y, p_x) \quad (96-4)$$

۱. در این روابط خاص، جواب دوم از محدوده حرکت مفصلها خارج است و محاسبه نخواهد شد.

با مساوی قرار دادن عنصرهای (۳,۱) و همچنین (۳,۲) نتیجه می‌شود

$$s_0 = -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} \quad (۹۷-۴)$$

$$c_0 = -s_1 r_{12} + c_1 r_{22}$$

و از آنجا  $\theta_0$  چنین محاسبه می‌شود

$$\theta_0 = \text{Atan2}(r_{21}c_1 - r_{11}s_1, r_{22}c_1 - r_{12}s_1) \quad (۹۸-۴)$$

با مساوی قرار دادن عنصرهای (۲,۳) و همچنین (۱,۳) نتیجه می‌شود

$$c_{rrr} = r_{rr} \quad (۹۹-۴)$$

$$s_{rrr} = c_1 r_{1r} + s_1 r_{2r}$$

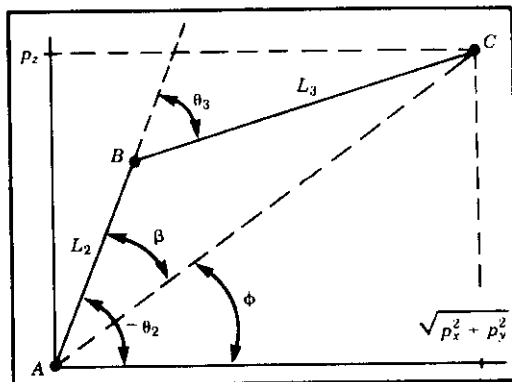
بنابراین داریم

$$\theta_{rrr} = \text{Atan2}(r_{1r}c_1 + r_{2r}s_1, r_{rr}) \quad (۱۰۰-۴)$$

برای به دست آوردن زوایای  $\theta_r$ ,  $\theta_f$  و  $\theta_z$  از روش هندسی استفاده می‌کنیم. شکل ۴-۱۰ صفحه بازوی روبات را نشان می‌دهد. نقطه  $A$  در محور مفصل ۲، نقطه  $B$  بر محور مفصل ۳، و نقطه  $C$  بر محور مفصل ۴ قرار گرفته است.

با نوشتن قانون کسینوسها در مثلث  $ABC$  داریم

$$\cos \theta_r = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_1^2 - l_r^2}{2l_1 l_r} \quad (۱۰۱-۴)$$



شکل ۴-۱۰ بازوی مکانیکی موتومان.

و از آنجا<sup>۱</sup>

$$\theta_r = A \tan^2 \left( \sqrt{1 - \cos^2 \theta_r}, \cos \theta_r \right) \quad (102-4)$$

با توجه به شکل ۴-۱۰، داریم  $\theta_r = -\phi - \beta$  یا

$$\theta_r = -A \tan^2 \left( p_x, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \right) - A \tan^2 (l_r \sin \theta_r, l_r + l_r \cos \theta_r) \quad (103-4)$$

و سرانجام  $\theta_r$  حاصل می‌شود

$$\theta_r = \theta_{r_{rr}} - \theta_r - \theta_r \quad (104-4)$$

پس از به دست آوردن زوایای مفصلی، باید مقادیر کارانداز را محاسبه کنیم. با توجه به بخش ۷-۳، و حل معادله (۳-۱۵)،  $A_i$  چنین محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{k_1} (\theta_1 - \lambda_1) \\ A_r &= \frac{1}{k_r} \left( \sqrt{-2\alpha_r \beta_r \cos \left( \theta_r - \Omega_r - \tan^{-1} \left( \frac{\phi_r}{\gamma_r} \right) + 270^\circ \right) + \alpha_r^2 + \beta_r^2 - \lambda_r} \right) \\ A_r &= \frac{1}{k_r} \left( \sqrt{-2\alpha_r \beta_r \cos \left( \theta_r + \theta_r - \tan^{-1} \left( \frac{\phi_r}{\gamma_r} \right) + 90^\circ \right) + \alpha_r^2 + \beta_r^2 - \lambda_r} \right) \\ A_r &= \frac{1}{k_r} (180^\circ + \lambda_r - \theta_r - \theta_r - \theta_r) \\ A_5 &= \frac{1}{k_5} (\lambda_5 - \theta_5) \end{aligned} \quad (105-4)$$

چون گستره حرکت کاراندازها محدود است، باید جوابهای فوق از نظر قرار داشتن در گستره مجاز، امتحان شوند. این امتحان «در گستره مجاز بودن» پیچیده است، زیرا مکانیزم روبات طوری است که کاراندازها، در کنشی دو جانبه، برگستره حرکت هم تأثیر می‌گذارند. در روبات موتومان، کاراندازهای ۲ و ۳ طوری بر هم کنش می‌کنند که نامساوی زیر همواره برقرار است

$$A_r - 10000 > A_r > A_r + 3000 \quad (106-4)$$

بدین ترتیب، حدود کارانداز ۲ تابعی از مکان کارانداز ۳ است. به همین ترتیب

$$32000 - A_r < A_5 < 55000 \quad (107-4)$$

۱. در این روبات خاص، جواب دوم از محدوده حرکت مفصلها خارج است و محاسبه نخواهد شد.

از آنجا که یک دوران کامل از مفصل ۵ متناظر با ۲۵۶۰۰ شمارش کارانداز است، به ازای  $A_4 > 2600$ ، دو جواب برای  $A_4$  حاصل می‌شود. این تنها حالتی است که به ازای آن، روبات یازوکاوا موتومان L-۳ بیش از یک جواب دارد.

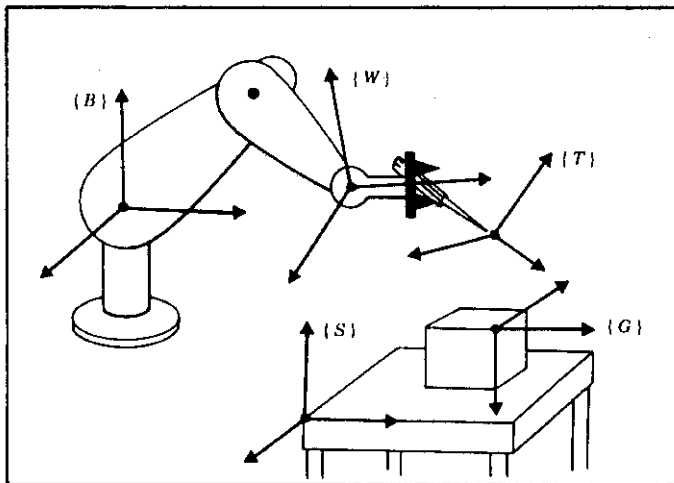
#### ۸-۴ چهارچوبهای استاندارد

در بیشتر سیستمهای کنترل روبات، مسئله اصلی به دست آوردن زوایای مفصلی از معادله‌های سینماتیکی است. شکل ۴-۱۱ را که در آن چهارچوبهای استاندارد نشان داده شده است، در نظر بگیرید.

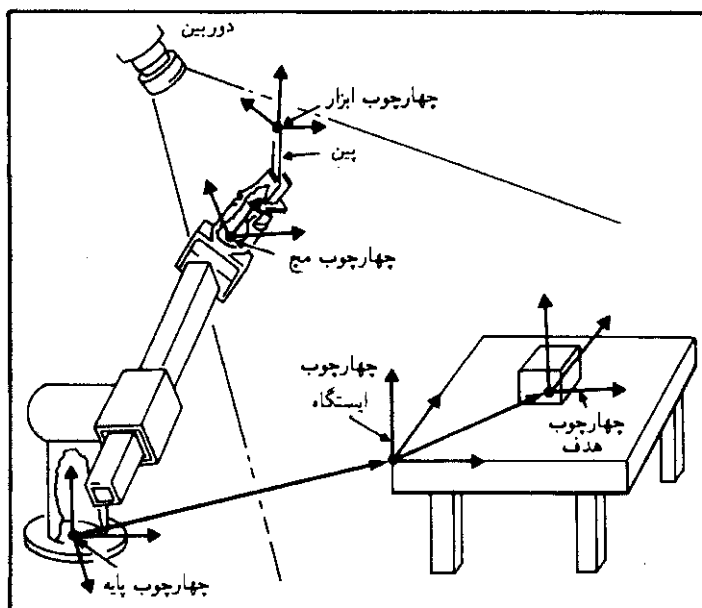
در حالت کلی، این چهارچوبها در یک سیستم روباتی چنین مورد استفاده قرار می‌گیرند:

۱. استفاده کننده جایی را که مایل است چهارچوب ایستگاه در آن باشد، مشخص می‌کند. این مکان ممکن است مانند شکل ۴-۱۲ در گوشه میز کار باشد، یا حتی به یک تسمه نقاله متحرک متصل شود. چهارچوب ایستگاه،  $\{S\}$ ، نسبت به چهارچوب پایه،  $\{B\}$ ، تعریف می‌شود.

۲. استفاده کننده با دادن مشخصات چهارچوب  $\{T\}$ ، توصیفی از ابزار را که برای روبات قابل درک است، ارائه می‌کند. چهارچوب  $\{T\}$  ممکن است برای هر ابزاری که روبات برمی‌دارد، متفاوت باشد. توجه کنید که اگر ابزاری معین نیز به راههای گوناگون برداشته شود، باز چهارچوبهای  $\{T\}$  متفاوت خواهند بود. چهارچوب  $\{T\}$  نسبت به چهارچوب  $\{W\}$



شکل ۴-۱۱ طرز قرارگیری چهارچوبهای «استاندارد».



شکل ۴-۱۲ مثالی از ایستگاه کاری.

به صورت  ${}^WT$  تعریف می شود.

۳. استفاده کننده نقطه هدف برای حرکت روبات را از طریق توصیف چهارچوب هدف  $\{G\}$  نسبت به چهارچوب ایستگاه، مشخص می کند. اغلب تعریفهای  $\{T\}$  و  $\{S\}$  برای چندین حرکت روبات، ثابت باقی می مانند. بدین ترتیب، استفاده کننده پس از تعریف اولیه آنها، تنها کافی است مشخصات  $\{G\}$  را در هر مرحله تعیین کند.

در بسیاری از سیستمها، تعریف چهارچوب ابزار  $({}^WT)$  ثابت می ماند (مثلاً، مبدأ این چهارچوب در وسط نوک انگشتان روبات قرار داده می شود). همچنین، چهارچوب ایستگاه یا ثابت است، یا به آسانی توسط استفاده کننده، به وسیله خود روبات، تعلیم داده می شود. در چنین سیستمهایی، استفاده کننده به آگاهی از پنج چهارچوب استاندارد نیاز ندارد و تنها حواس خود را بر حرکت دادن ابزار به سوی هدفهای مورد نظر، نسبت به ناحیه کاری مشخص شده توسط چهارچوب ایستگاه، متمرکز خواهد کرد.

۴. سیستم روبات، دسته ای از زوایای مفصلی را که به ازای آنها، می توان چهارچوب ابزار را از وضعیت اولیه آن، در مسیری هموار طوری حرکت داد تا در پایان حرکت  $\{G\} = \{T\}$  شود، محاسبه می کند.

#### ۹-۴ استفاده از زیر برنامه SOLVE برای بازوهای مکانیکی ماهر

زیر برنامه SOLVE، تبدیلهای کلی دکارتی را انجام می دهد و زیر برنامه مربوط به معادله های سینماتیکی وارون را فرا می خواند. بدین ترتیب، با داشتن تعریفهای چهارچوب ابزار و چهارچوب ایستگاه دلخواه، می توان با استفاده از این زیر برنامه، چهارچوب مرجع را نسبت به چهارچوب پایه به دست آورد.

به عبارت دیگر، اگر  ${}^S_T$  مشخصات چهارچوب هدف باشد، SOLVE با استفاده از تعریف چهارچوبهای ابزار و ایستگاه، مکان  $\{W\}$  نسبت به  $\{B\}$  (یعنی  ${}^B_W T$ ) را چنین محاسبه می کند

$${}^B_W T = {}^B_S T {}^S_T T {}^T_W T^{-1} \quad (۱۰۸-۴)$$

سپس  ${}^B_W T$  به عنوان ورودی به زیر برنامه سینماتیک وارون وارد می شود و در آنجا مقادیر  $\theta_1$  تا  $\theta_n$  محاسبه خواهد شد.

#### ۱۰-۴ دقت و تکرارپذیری

در بسیاری از روباتهای صنعتی موجود، نقاط هدف تعلیم داده می شوند. نقطه تعلیم داده شده نقطه ای است که بازوی مکانیکی ماهر به طور فیزیکی به آن هدایت می شوند. سپس حساسه های مکانی مستقر در مفصل خوانده شده، زوایای مفصلی مربوط به آنها در حافظه ثبت می شود. هنگامی که به روبات فرمان بازگشت به این نقطه داده شود، هر مفصل به وضعیت ثبت شده در حافظه، حرکت خواهد کرد. در چنین روباتهایی مسئله سینماتیک وارون به طور کلی مطرح نخواهد شد، زیرا نقاط هدف هرگز در مختصات دکارتی تعریف نمی شوند. هنگامی که تولیدکننده روبات، دقت بازگشت روبات خود را به نقطه تعلیم داده شده مشخص می کند، در واقع تکرارپذیری آن را تعیین می کند.

هرگاه مکان و جهتگیری نقطه هدف، در مختصات دکارتی بیان شوند، باید معادله های سینماتیکی وارون روبات را برای به دست آوردن زوایای مفصلی مورد نظر، حل کرد. سیستمهایی که در آنها نقاط هدف در مختصات دکارتی تعریف شده است، می توانند بازوی مکانیکی ماهر را به نقاطی که هرگز تعلیم داده نشده است، نقاطی در فضای کاری روبات که بازو قبلاً به آنها هدایت نشده است، حرکت دهند. ما چنین نقاطی را نقاط محاسبه شده خواهیم نامید. توانایی هدایت روبات به این نقاط، در بسیاری از کاربردها لازم است. مثلاً اگر برای تعیین وضعیت قطعه ای که باید روبات آن را بگیرد، از سیستم بینایی کامپیوتری استفاده شود، روبات باید بتواند به مختصات دکارتی تعیین شده به وسیله حساسه بینایی، حرکت کند. میزان دقیق بودن روبات را در رسیدن به نقاط محاسبه شده، دقت روبات می نامند.

دقت هر بازوی مکانیکی از تکرارپذیری آن کمتر است. روشن است که دقت پارامترهای ظاهر شده در معادله های سینماتیکی روبات، بر دقت خود روبات تأثیر می گذارد. وجود خطا در



پارامترهای دناویست-هارتنبِگ، باعث ایجاد خطا در محاسبه زوایای مفصلی از روی معادله‌های سینماتیکی و ارون خواهد شد. بدین ترتیب، با اینکه تکرارپذیری بیشتر روبات‌های صنعتی نسبتاً خوب است، اما دقت آنها معمولاً بسیار کمتر است و میزان آن در روبات‌های مختلف، بسیار متفاوت است. با به‌کار بردن روشهای گوناگون کالیبراسیون، می‌توان دقت روبات را از طریق تخمین زدن پارامترهای سینماتیکی آن روبات خاص، افزایش داد [۱۰].

#### ۱۱-۴ ملاحظات محاسباتی

در بسیاری از روشهای کنترل مسیر، که در فصل ۷ بررسی خواهند شد، لازم است حل معادله‌های سینماتیکی و ارون بازوی مکانیکی ماهر، با سرعت بسیار زیاد ( $30\text{ Hz}$  یا بیشتر) انجام شود. در نتیجه، بازده محاسباتی مسئله‌ای بر اهمیت خواهد بود. در اینجا روشهای حل عددی، به دلیل اینکه طبیعت تکراری دارند، و زیاد وقت می‌گیرند، بررسی نمی‌شوند.

بیشتر مطالبی که در حالت کلی در بخش ۳-۱۰ برای سینماتیک مستقیم گفته شد، برای سینماتیک و ارون نیز صادق‌اند. در سینماتیک و ارون نیز اغلب برای افزایش سرعت محاسبات، مقادیر تابع  $\tan^{-1}$  از جدول به دست می‌آیند، و محاسبه نمی‌شوند.

ساختار محاسباتی به‌کار رفته برای جوابهای چندگانه نیز اهمیت دارد. در حالت کلی، بهتر است کلیه جوابها به‌طور موازی، و نه سری، محاسبه شوند. البته در برخی کاربردها، که در آنها لازم نیست کلیه جوابها به دست آیند، با محاسبه تنها یک جواب، در وقت بسیار صرفه‌جویی خواهد شد.

هنگامی که از رهیافت هندسی برای حل معادله‌های سینماتیکی و ارون استفاده می‌شود، گاهی می‌توان با انجام عملیات ساده بر روی زوایای گوناگون به دست آمده در اولین جواب، جوابهای چندگانه بعدی را محاسبه کرد. بدین ترتیب، محاسبه جواب اول، از نظر محاسباتی گران خواهد بود، اما جوابهای بعدی با جمع و تفریق کردن زوایای به دست آمده، کم کردن آنها از  $\pi$ ، و غیره، بسیار سریع به دست خواهند آمد.

#### مراجع

- [1] B. Roth, J. Rastegar, and V. Scheinman, "On the Design of Computer Controlled Manipulators," On the Theory and Practice of Robots and Manipulators, Vol. 1, First CISM-IFTOMM Symposium, September 1973, pp. 93-113.
- [2] B. Roth, "Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint," Performance Evaluation of Manipulators, National Bureau of Standards, special publication, 1975.

- [3] D. Pieper and B. Roth, "The Kinematics of Manipulators Under Computer Control," *Proceedings of the Second International Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Vol. 2, Zakopane, Poland, 1969, pp. 159-169.
- [4] D. Pieper, "The Kinematics of Manipulators Under Computer Control," Unpublished Ph.D Thesis, Stanford University, 1968.
- [5] R.P. Paul, B. Shimano, and G. Mayer, "Kinematic Control Equations for Simple Manipulators," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-11, No. 6, 1981.
- [6] L. Tsai and A. Morgan, "Solving the Kinematics of the Most General Six-and Five-degree-of-freedom Manipulators by Continuation Methods," Paper 84-DET-20, ASME Mechanisms Conference, Boston, October 7-10, 1984.
- [7] C.S.G. Lee and M. Ziegler, "Geometric Approach in Solving Inverse Kinematics of PUMA Robots," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-20, No. 6, November 1984.
- [8] W. Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables*, 25th edition, CRC Press, Inc., Florida, 1980.
- [9] R. Burington, *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*, 5th edition, McGraw-Hill, 1973.
- [10] S.Hayati, "Robot Arm Geometric Link Parameter Estimation," *Proceedings of the 22nd IEEE Conf. on Decision and Control*, December 1983.
- [11] Y.Nakamura and H. Hanafusa, "Inverse Kinematic Solutions with Singularity Robustness for Robot Manipulator Control," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 108, 1986.
- [12] D. Baker and C. Wampler, "On the Inverse Kinematics of Redundant Manipulators," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 7, No. 2, 1988.

## تمرینها

۱-۴ [۱۵] فضای کاری سرانگشت بازوی مکانیکی ماهر با سه مفصل در تمرین ۳ از فصل ۳ را برای حالت  $l_1 = 150^\circ$ ,  $l_2 = 100^\circ$ , و  $l_3 = 30^\circ$  ترسیم کنید.

۲-۴ [۲۶] معادله‌های سینماتیکی وارون را برای بازوی مکانیکی ماهر با سه مفصل در تمرین ۳ از فصل ۳، به دست آورید.

۳-۴ [۱۲] فضای کاری سرانگشت بازوی مکانیکی ماهر با سه درجه آزادی در مثال ۳-۴ از فصل ۳ را ترسیم کنید.

۴-۴ [۲۴] معادله‌های سینماتیکی وارون را برای بازوی مکانیکی ماهر با سه درجه آزادی در مثال ۴-۳ از فصل ۳، به دست آورید.

۵-۴ [۳۸] یک زیر برنامه به زبان پاسکال بنویسید که در آن کلیه جوابهای ممکن برای بازوی مکانیکی ماهر پیوما ۵۶۰، واقع در محدوده‌های زوایای مفصلی زیر، محاسبه شود

$$-170.0^\circ < \theta_1 < 170.0^\circ$$

$$-225.0^\circ < \theta_2 < 45.0^\circ$$

$$-250.0^\circ < \theta_3 < 75.0^\circ$$

$$-135.0^\circ < \theta_4 < 135.0^\circ$$

$$-100.0^\circ < \theta_5 < 100.0^\circ$$

$$-180.0^\circ < \theta_6 < 180.0^\circ$$

از معادله‌های به دست آمده در بخش ۴-۷ با مقادیر عددی زیر (برحسب اینچ) استفاده کنید

$$a_2 = 17.0$$

$$a_3 = 0.8$$

$$d_2 = 4.9$$

$$d_4 = 17.0$$

۶-۴ [۱۵] الگوریتم ساده‌ای برای برگزیدن نزدیکترین (بهترین) جواب از میان مجموعه‌ای از جوابهای ممکن، بیان کنید.

۷-۴ [۱۰] فهرستی از عواملی که می‌توانند بر تکرارپذیری بازوی مکانیکی ماهر مؤثر باشند، تهیه کنید. فهرست دومی نیز از عوامل اضافی که بر دقت روبات مؤثرند، ترتیب دهید.

۸-۴ [۱۲] به ازای هر مکان و جهتگیری مفروض دست یک بازوی صفحه‌ای با سه رابط و مفصلهای لولایی، می‌توان دو سری جواب ممکن برای بازو به دست آورد. اگر یک مفصل لولایی دیگر به بازو اضافه شود (به طوری که بازو همچنان صفحه‌ای باقی بماند)، چند سری جواب ممکن خواهد بود؟

۹-۴ [۲۶] در شکل ۴-۱۳، یک بازوی صفحه‌ای با دو رابط و مفصلهای لولایی نشان داده شده است. در این بازو، طول رابط دوم نصف طول رابط اول است، یعنی  $l_1 = 2l_2$ . گستره زوایای مفصلی نیز چنین است:

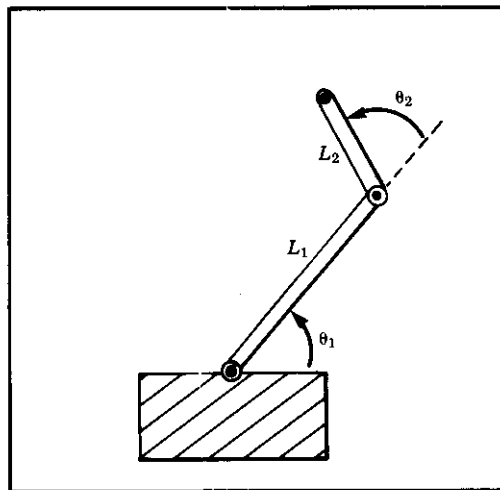
$$0^\circ < \theta_1 < 180^\circ$$

$$-90^\circ < \theta_2 < 180^\circ$$

فضای کاری تقریبی دسترسی‌پذیر را (به صورت یک ناحیه) برای انتهای رابط دوم مشخص کنید.

۱۰-۴ [۲۳] عبارتی برای زیرفضای بازوی مکانیکی ماهر در مثال ۳-۴ از فصل ۳ به دست آورید.

۱۱-۴ [۲۴] از یک میز تعیین موقعیت با دو درجه آزادی، برای قراردادن قطعات کار در موقعیت مناسب به منظور انجام عملیات جوشکاری با قوس الکتریکی، استفاده می‌شود. معادله‌های سینماتیکی مستقیم که مکان سطح میز (رابط ۲) را نسبت به پایه (رابط صفر)



شکل ۴-۱۳ بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با دو رابط.

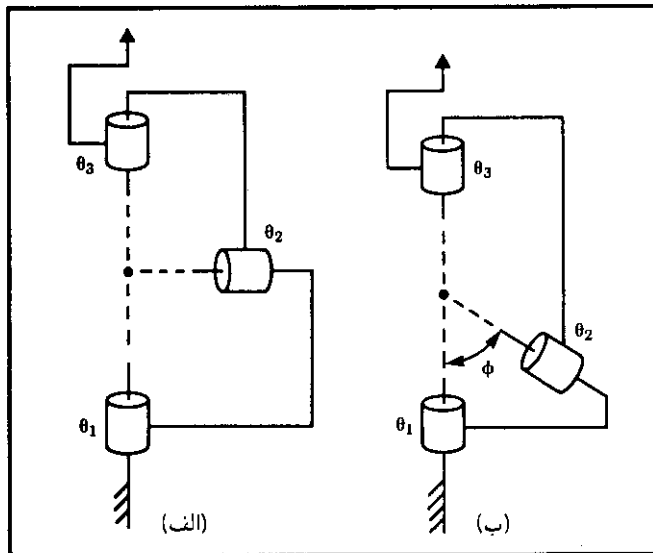
به دست می دهند، چنین اند

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & l_2 s_1 + l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -s_1 c_2 & s_1 s_2 & c_1 & l_2 c_1 + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به ازای هر راستای یکه ثابت در چهارچوب سطح میز (رابط ۲)، مانند  $\hat{V}^2$ ، سینماتیک وارون را برای یافتن  $\theta_1$  و  $\theta_2$  طوری حل کنید که این بردار با  $\hat{Z}$  همراستا (به طرف بالا) شود. آیا چند جواب برای این حالت وجود دارد؟ آیا حالت تکینی وجود دارد که برای آن نمی توان جواب یکتا پیدا کرد؟

۱۲-۴ [۲۲] در شکل ۴-۱۴، دو مکانیزم  $3R$  نشان داده شده است. در هر دو مکانیزم، سه محور در یک نقطه یکدیگر را قطع می کنند (توجه کنید که در هر پیکربندی دلخواه از مکانیزمها، این نقطه در فضا ثابت باقی می ماند). مکانیزم شکل ۴-۱۴ (الف) دارای زوایای پیچش رابط  $(\alpha_i)$  برابر با  $90^\circ$  درجه است. مکانیزم شکل ۴-۱۴ (ب) یک زاویه پیچش  $\phi$  و زاویه پیچش دیگر  $\phi - 180^\circ$  دارد.

مکانیزم شکل ۴-۱۴ (الف)، چنانکه دیده می شود، با زوایای اولیه  $Z-Y-Z$  متناظر



شکل ۴-۱۴ دو مکانیزم  $3R$  (تمرین ۴-۱۲).

است، و در نتیجه کافی است جهتگیری رابط ۳ به طور دلخواه نسبت به رابط صفر (که ثابت است)، تعیین شود (به وسیلهٔ پیکان نشان داده شده در شکل). چون  $\phi$  برابر  $90^\circ$  درجه نیست، نمی توان جهتگیری رابط ۳ در مکانیزم دوم را به دلخواه تعیین کرد.

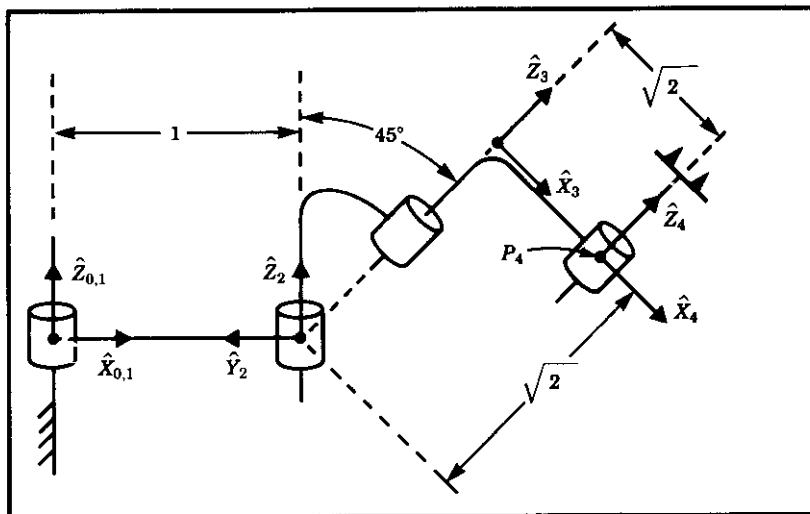
مجموعه‌ای از جهتگیرهایی را که در مکانیزم دوم غیر عملی هستند، مشخص کنید. توجه کنید که فرض می‌کنیم همهٔ مفصلها می‌توانند  $360^\circ$  درجه گردش کنند (یعنی محدودیتی در گردش آنها وجود ندارد)، و فرض می‌کنیم که در صورت نیاز، رابطها نیز می‌توانند از یکدیگر عبور کنند (یعنی فضای کاری با برخورد رابطها با خودشان محدود نمی‌شود).

[۱۳] دو دلیل برای برتری جوابهای تحلیلی سینماتیکی بسته بر جوابهای تکراری، ذکر کنید.

[۱۴] روباتهایی با شش درجهٔ آزادی وجود دارند که معادله‌های سینماتیکی آنها به طور «بسته» قابل حل نیست. آیا روباتی با سه درجهٔ آزادی می‌توان یافت که برای آن معادله‌های سینماتیکی (مکان) به طور بسته قابل حل نباشند؟

[۳۸] زیر برنامه‌ای بنویسید که معادله‌های درجهٔ چهارم را به طور بسته حل کند. (مرجعهای [۸] و [۹] را ببینید).

[۲۵] در شکل ۱۵-۴ یک بازوی مکانیکی  $4R$  به طور شماتیک نشان داده شده است.



شکل ۱۵-۴ بازوی مکانیکی ماهر  $4R$  نشان داده شده در مکان  $\Theta = [0, 90^\circ, -90^\circ, 0]^T$  (تشرین ۱۶-۴).

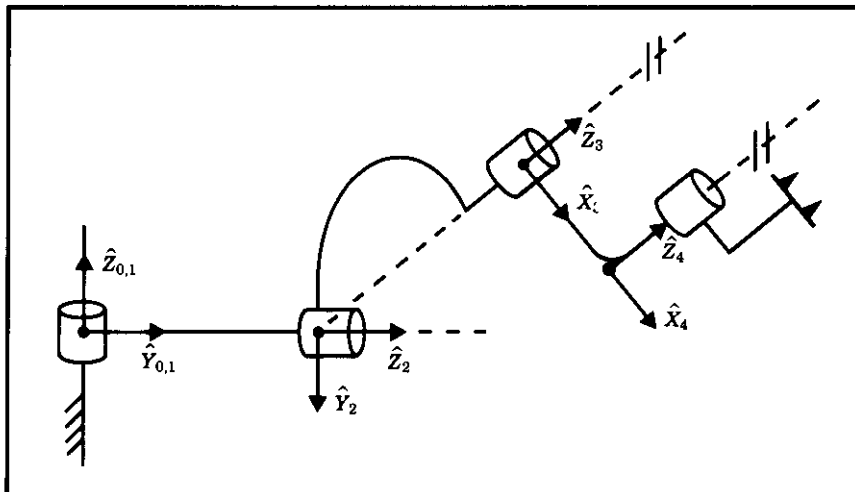
پارامترهای رابط غیر صفر عبارتند از  $a_1 = 1$ ،  $\alpha_2 = 45^\circ$ ،  $d_2 = \sqrt{2}$  و  $a_2 = \sqrt{2}$ ، پیکربندی مکانیزم در شکل، متناظر با  $\Theta = [0, 90^\circ, -90^\circ, 0]^T$  است. هر مفصل، در محدوده  $\pm 180^\circ$  حرکت می‌کند. کلیه مقادیر  $\theta_2$  را طوری پیدا کنید که داشته باشیم

$${}^0P_{4ORG} = [1/1, 1/5, 1/707]^T$$

[۲۵] در شکل ۱۶-۴ یک بازوی مکانیکی  ${}^4R$  به‌طور شماتیک نشان داده شده است. پارامترهای رابط غیر صفر عبارتند از  $a_1 = -90^\circ$ ،  $d_2 = 1$ ،  $\alpha_2 = 45^\circ$  و  $d_2 = 1$ ، پیکربندی مکانیزم در شکل، با  $\Theta = [0, 0, 90^\circ, 0]^T$  متناظر است. محدوده حرکت هر مفصل،  $\pm 180^\circ$  است. کلیه مقادیر  $\theta_2$  را طوری پیدا کنید که داشته باشیم

$${}^0P_{4ORG} = [0/0, 1/0, 1/414]^T$$

- ۱۸-۴ [۱۵] بازوی مکانیکی ماهر  $RRP$  نشان داده شده در شکل ۳-۳۷ را در نظر بگیرید. معادله‌های سینماتیکی (مکان) این بازو چند جواب دارند؟
- ۱۹-۴ [۱۵] بازوی مکانیکی ماهر  $RRR$  نشان داده شده در شکل ۳-۳۸ را در نظر بگیرید. معادله‌های سینماتیکی (مکان) این بازو چند جواب دارند؟



شکل ۱۶-۴ بازوی مکانیکی ماهر  ${}^4R$  نشان داده شده در مکان  $\Theta = [0, 90^\circ, -90^\circ, 0]^T$  (تمرین ۱۷-۴).

[۱۵] بازوی مکانیکی ماهر  $RPP$  نشان داده شده در شکل ۳-۳۹ را در نظر بگیرید. معادله‌های سینماتیکی (مکان) این بازو چند جواب دارند؟

[۱۵] بازوی مکانیکی ماهر  $PRR$  نشان داده شده در شکل ۳-۴۰ را در نظر بگیرید. معادله‌های سینماتیکی (مکان) این بازو چند جواب دارند؟

[۱۵] بازوی مکانیکی ماهر  $PPP$  نشان داده شده در شکل ۳-۴۱ را در نظر بگیرید. معادله‌های سینماتیکی (مکان) این بازو چند جواب دارند؟

[۳۸] معادله‌های سینماتیکی زیر، در مسئله‌ای خاص داده شده‌اند:

$$\sin \xi = a \sin \theta + b$$

$$\sin \phi = c \cos \theta + d$$

$$\psi = \xi + \phi$$

با معلوم بودن  $a, b, c, d$  و  $\psi$ ، نشان دهید که در حالت کلی، برای  $\theta$  چهار جواب به دست می‌آید. حالت ویژه‌ای را که به ازای آن تنها دو جواب برای  $\theta$  حاصل می‌شود، تعیین کنید. [۲۰] با داشتن توصیف چهارچوب رابط  $\{i\}$  برحسب چهارچوب رابط  $\{i-1\}$ ، چهار پارامتر «دناویت-هارتنبگ» را به صورت توابعی از عنصرهای  $T^{-1}$ ؛ به دست آورید.

#### تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۴)

۱. زیر برنامه‌ای بنویسید که معادله‌های سینماتیکی وارون برای بازوی مکانیکی ماهر با سه رابط را حل کند (بخش ۴-۴ را ببینید). در این برنامه، شناسه‌ها به صورت زیر ارائه می‌شوند

Procedure INVKIN(VAR wrelb: frame; VAR current, near, far: Vec3; VAR sol: boolean);

که در آن “wrelb” ورودی است و چهارچوب مرجع را نسبت به چهارچوب پایه تعریف می‌کند. “current” ورودی است و مکان فعلی روبات را (که به صورت بردار زوایای مفصلی داده می‌شود) مشخص می‌کند. “near” نزدیکترین جواب، “far” جواب دوم، و “sol” یک «پرچم»<sup>۱</sup> است که پیدا شدن یا نشدن جواب را نشان می‌دهد (اگر جوابی پیدا نشود، sol = FALSE می‌شود). طول پارامترها (برحسب متر) چنین است

$$l_1 = l_2 = 0.5$$

گستره حرکت مفصلها نیز عبارت است از

$$-170^\circ \leq \theta_i \leq 170^\circ$$



برای امتحان درستی برنامه خود، آن را با زیربرنامه KIN به صورت پشت سرهم قرار دهید و ببینید آیا این دو برنامه واقعاً وارون یکدیگر هستند یا نه.

۲. ابزاری به رابط ۳ از یک بازوی مکانیکی ماهر متصل شده است. این ابزار به وسیله  ${}^W_T$  که چهارچوب ابزار را نسبت به چهارچوب مرجع بیان می‌کند، توصیف می‌شود. همچنین، استفاده‌کننده از روبات، محدوده کاری خود، چهارچوب ایستگاه نسبت به پایه روبات، را با  ${}^B_S$  معین کرده است. زیربرنامه‌ای به صورت زیر بنویسید:

Procedure SOLVE (VAR trels: frame; VAR current, near, far: vec3; VAR sol: boolean);

که در آن "trels" چهارچوب  $\{T\}$  را نسبت به چهارچوب  $\{S\}$  توصیف می‌کند و پارامترهای دیگر، همان پارامترهای گفته شده در زیربرنامه INVKIN هستند. تعریفهای  $\{T\}$  و  $\{S\}$  باید متغیرها یا ثابتهای تعریف شده در دستگاه مختصات عام باشند. زیربرنامه SOLVE باید زیربرنامه‌های TMULT، TINVERT، و INVKIN را فراخواند.

۳. برنامه‌ای اصلی بنویسید که یک چهارچوب هدف را که برحسب  $x$ ،  $y$ ، و  $\phi$  مشخص شده است، دریافت کند. این مشخص کردن هدف، بیان  $\{T\}$  نسبت به  $\{S\}$  است، و ترتیبی را که استفاده‌کننده مایل است هدفها را مشخص کند، نشان می‌دهد.

چون روبات از همان ابزار و ناحیه (محدوده) کاری مشخص شده در تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۲) استفاده می‌کند،  $\{T\}$  و  $\{S\}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند

$${}^W_T = [x \ y \ \theta] = [0.1 \ 0.2 \ 30.0]$$

$${}^B_S = [x \ y \ \theta] = [-0.1 \ 0.3 \ 0.0]$$

زوایای مفصلی را برای هر یک از سه چهارچوب هدف داده شده در زیر، محاسبه کنید. فرض کنید روبات حرکت را در حالی که کلیه زوایا صفرند، آغاز کرده است و به ترتیب به این سه هدف می‌رسد. برنامه باید نزدیکترین جواب را برحسب نقطه هدف قبلی، پیدا کند.

$$[x_1 \ y_1 \ \phi_1] = [0.0 \ 0.0 \ -90.0]$$

$$[x_2 \ y_2 \ \phi_2] = [0.6 \ -0.3 \ 45.0]$$

$$[x_3 \ y_3 \ \phi_3] = [-0.4 \ 0.3 \ 120.0]$$

$$[x_4 \ y_4 \ \phi_4] = [0.8 \ 1.4 \ 30.0]$$

زیربرنامه SOLVE و WHERE را به طور متوالی فرا بخوانید و تحقیق کنید که آنها به راستی توابع وارون یکدیگرند.



## ژاکوبیها، سرعتها و نیروهای استاتیکی

### ۵-۱ مقدمه

در این فصل، مطالعهٔ بازوهای مکانیکی ماهر روباتی را از مسائل مکانی استاتیکی فراتر خواهیم برد و از مفاهیم سرعت خطی و زاویه‌ای یک جسم صلب، برای تحلیل حرکت بازوی مکانیکی استفاده خواهیم کرد. همچنین، نیروهای وارد بر جسم صلب را در نظر می‌گیریم، و از آنها در مطالعهٔ نیروهای استاتیکی وارد بر بازوهای مکانیکی ماهر، استفاده می‌کنیم.

مطالعهٔ یکجای سرعتها و نیروهای استاتیکی، به ماتریس ژاکوبی<sup>۱</sup> بازوی مکانیکی ماهر، می‌انجامد. این ماتریس در این فصل بررسی خواهد شد.

در اینجا موضوع سینماتیک مکانیزمها به‌طور عمقی بررسی نمی‌شود و در بیشتر موارد، تنها به مفاهیمی که در روباتیک اساسی‌اند اشاره خواهد شد. خوانندهٔ علاقه‌مند، برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه می‌تواند به کتابهای مکانیک (مراجع [۱] تا [۳]) مراجعه کند.

### ۵-۲ نمادگذاری برای مکان و جهتگیری متغیر با زمان

پیش از تعریف حرکت جسم صلب، برخی مفاهیم پایه را به اختصار بررسی می‌کنیم: مشتقگیری از بردارها، نمایش سرعت زاویه‌ای، و نمادگذاری.

۱. ریاضیدانان اصطلاح «ماتریس ژاکوبی» را به‌کار می‌برند، اما در روباتیک، آن را به‌طور خلاصه «ژاکوبی» می‌نامند.

## مشتقگیری از بردارهای مکان

به عنوان پایه‌ای برای بررسی سرعتها ( و در فصل ۶ شتابها)، از نمادگذاری زیر برای مشتق یک بردار استفاده می‌کنیم

$${}^B V_Q = \frac{d}{dt} {}^B Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B Q(t + \Delta t) - {}^B Q(t)}{\Delta t} \quad (۱-۵)$$

سرعت هر بردار مکان را می‌توان به صورت سرعت خطی نقطه‌ای که بردار مکان با آن تعریف می‌شود، در نظر گرفت. با توجه به معادله (۱-۵)، می‌توان مشاهده کرد که در واقع مشتق  $Q$  را نسبت به چهارچوب  $\{B\}$  محاسبه می‌کنیم. مثلاً اگر  $Q$  با گذشت زمان نسبت به  $\{B\}$  تغییر نکند، آن‌گاه سرعت صفر خواهد بود، حتی اگر چهارچوب دیگری وجود داشته باشد که  $Q$  نسبت به آن در حال تغییر است. به این ترتیب، مشخص کردن چهارچوبی که در آن از بردار مشتقگیری می‌شود، اهمیت دارد.

بردار سرعت را نیز مانند هر بردار دیگر می‌توان برحسب هر چهارچوبی تعریف کرد، و این چهارچوب مرجع با یک پیش‌زبرنویس، نشان داده خواهد شد. در نتیجه، بردار سرعت به دست آمده از (۱-۵)، برحسب چهارچوب  $\{A\}$  چنین نوشته می‌شود

$${}^A ({}^B V_Q) = \frac{d}{dt} {}^B Q \quad (۲-۵)$$

می‌بینیم که در حالت کلی، هر بردار سرعت به یک نقطه در فضا مربوط است، اما مقادیر عددی نشان‌دهنده سرعت آن نقطه، به دو چهارچوب بستگی دارند: چهارچوبی که مشتقگیری نسبت به آن انجام می‌گیرد، و چهارچوبی که بردار سرعت برآیند، نسبت به آن بیان می‌شود. در رابطه (۱-۵)، سرعت محاسبه شده برحسب چهارچوب مشتقگیری نوشته شده است، پس نتیجه را می‌توان با پیش‌زبرنویس  $B$  نشان داد. اما برای سادگی، در حالتی که هر دو زبرنویس یکی‌اند، نیازی به نشان دادن زبرنویس خارجی وجود ندارد و می‌توان نوشت

$$B ({}^B V_Q) = {}^B V_Q \quad (۳-۵)$$

سرانجام، چون همواره ماتریس دوران پدید آورنده تغییر در چهارچوب مرجع (بخش ۲-۱۰ را ببینید)، به طور صریح نشان داده می‌شود، همواره می‌توان پیش‌زبرنویس خارجی را حذف کرد. این بدان معناست که

$${}^A ({}^B V_Q) = {}^A_B R {}^B V_Q \quad (۴-۵)$$

معمولاً عبارتها را به شکل سمت راست معادله (۴-۵) می‌نویسیم تا نمادهای به‌کار رفته برای سرعت، همواره معرف سرعت در چهارچوب مشتقگیری باشند، و در آنها به نوشتن پیش‌زبرنویس

خارجی نیازی نباشد.

در بسیاری موارد، به جای آنکه حالت کلی سرعت یک نقطه نسبت به یک چهارچوب اختیاری را در نظر بگیریم، سرعت مبدأ یک چهارچوب را نسبت به یک چهارچوب مرجع عام معین، بیان خواهیم کرد. برای این حالت خاص، از نمادگذاری خلاصه‌ای به صورت زیر استفاده می‌کنیم

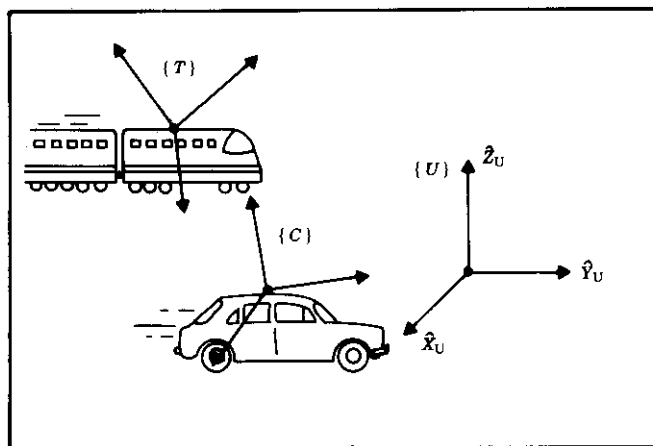
$$v_C = {}^U V_{CORG} \quad (5-5)$$

که در آن نقطه مورد مطالعه، مبدأ چهارچوب  $\{C\}$ ، و  $\{U\}$  چهارچوب مرجع است. مثلاً می‌توان نماد  $v_C$  را برای اشاره به سرعت مبدأ چهارچوب  $\{C\}$ ، و نماد  ${}^A v_C$  را برای سرعت مبدأ چهارچوب  $\{C\}$  توصیف شده در چهارچوب  $\{A\}$  به کار برد (اگر چه مشتق نسبت به  $\{U\}$  گرفته شده است).

#### ■ مثال ۵-۱

در شکل ۵-۱ چهارچوب مرجع عام و ثابت  $\{U\}$ ، چهارچوب متصل به قطاری که با سرعت  $100 \text{ mph}$  حرکت می‌کند  $\{T\}$ ، و چهارچوب متصل به اتومبیلی که با سرعت  $30 \text{ mph}$  در حرکت است  $\{C\}$ ، نشان داده شده است. هر دو خودرو در امتداد محور  $\hat{x}$  از چهارچوب  $\{U\}$  حرکت می‌کنند. ماتریسهای دوران  ${}^U R$  و  ${}^C R$  معلوم و ثابت‌اند. مطلوب است

$$\frac{d}{dt} {}^U P_{CORG} \quad ۱.$$



شکل ۵-۱ مثالی از چهارچوبها در حرکت خطی.

$${}^C({}^U V_{TORG}) \quad .۲$$

$${}^C({}^T V_{CORG}) \quad .۳$$

جوابهای فوق، چنین به دست می آیند

$$\frac{{}^U d}{{}^U dt} {}^U P_{CORG} = {}^U V_{CORG} = v_C = 3^\circ \hat{X} \quad .۱$$

$${}^C({}^U V_{TORG}) = {}^C v_T = {}^C_U R v_T = {}^C_U R (1^\circ \hat{X}) = {}^C_U R^{-1} 1^\circ \hat{X} \quad .۲$$

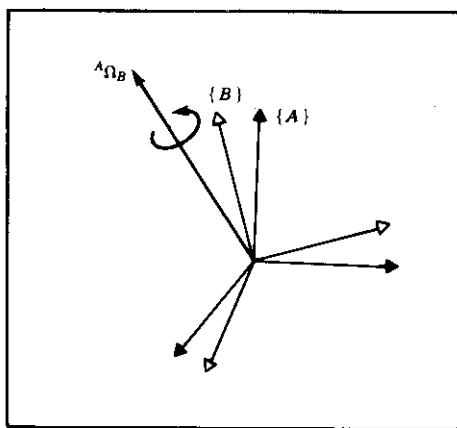
$${}^C({}^T V_{CORG}) = {}^C_T R {}^T V_{CORG} = -{}^C_U R^{-1} {}^U_T R 7^\circ \hat{X} \quad .۳$$

■

### بردار سرعت زاویه‌ای

در اینجا بردار سرعت زاویه‌ای را تعریف می‌کنیم و آن را با نماد  $\Omega$  نشان می‌دهیم. همان‌گونه که سرعت خطی ویژگی یک نقطه را مشخص می‌کند، سرعت زاویه‌ای ویژگی یک جسم را نشان می‌دهد. از آنجا که همواره به اجسام مورد مطالعه چهارچوبی متصل می‌کنیم، می‌توانیم سرعت زاویه‌ای را به صورت حرکت دورانی یک چهارچوب نیز در نظر بگیریم.

در شکل (۵-۲)،  ${}^A \Omega_B$  دوران چهارچوب  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف می‌کند. از لحاظ فیزیکی، جهت  ${}^A \Omega_B$  در هر لحظه، محور آنی دوران  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  و مقدار  ${}^A \Omega_B$  سرعت دوران را نشان می‌دهد. بردار سرعت زاویه‌ای را نیز مانند هر بردار دیگر می‌توان در هر دستگاه



شکل ۵-۲ چهارچوب  $\{B\}$  با سرعت  ${}^A V_{BORG}$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  انتقال می‌یابد.

مختصات دلخواه معین نشان داد، و در نتیجه می‌توان با اضافه کردن یک پیش‌زبرنویس دیگر در نمادگذاری، آن را نمایش داد. مثلاً  ${}^A\Omega_B^C$  سرعت زاویه‌ای چهارچوب  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  است که برحسب چهارچوب  $\{C\}$  بیان می‌شود.

در اینجا نیز برای حالتی خاص و پراهمیت، از نمادگذاری ساده شده استفاده خواهیم کرد. این حالت، موردی را مطرح می‌سازد که در آن دستگاه مختصات مرجع، به دلیل مشخص بودن، در نمادگذاری وارد نمی‌شود

$$\omega_C = {}^U\Omega_C \quad (6-5)$$

که در آن  $\omega_C$  سرعت زاویه‌ای چهارچوب  $\{C\}$  نسبت به دستگاه مرجع معین  $\{U\}$  است. مثلاً  ${}^A\omega_C$  سرعت زاویه‌ای چهارچوب  $\{C\}$  بیان شده در دستگاه  $\{A\}$  است (اگرچه سرعت زاویه‌ای نسبت به  $\{U\}$  در نظر گرفته شده است).

### ۳-۵ سرعت خطی و دورانی اجسام صلب

در این بخش، تعریف حرکت یک جسم صلب را، لااقل تا جایی که به سرعت مربوط می‌شود، بررسی می‌کنیم. مفاهیم ارائه شده در اینجا، تعریفهای انتقالها و جهتگیریهای توصیف شده در فصل ۲ را به حالت متغیر با زمان، توسعه خواهند داد. در فصل ۶ مفهوم شتاب را نیز مطالعه خواهیم کرد.

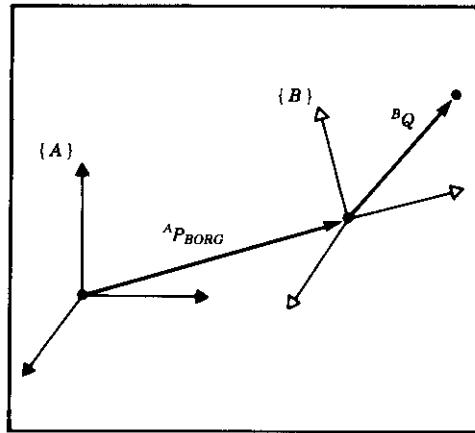
در اینجا نیز مانند فصل ۲، به هر جسم مورد مطالعه یک دستگاه مختصات متصل می‌کنیم و سپس حرکت اجسام صلب را به صورت حرکت چهارچوبها نسبت به یکدیگر، در نظر خواهیم گرفت.

#### سرعت خطی

چهارچوب  $\{B\}$  را متصل به جسمی صلب فرض کنید. می‌خواهیم حرکت  ${}^BQ$  را نسبت به چهارچوب  $\{A\}$ ، مانند شکل ۳-۵، توصیف کنیم.  $\{A\}$  را ثابت در نظر می‌گیریم. چهارچوب  $\{B\}$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$ ، با بردار مکان  ${}^AP_{BORG}$  و ماتریس دوران  ${}^A_BR$  توصیف می‌شود. فعلاً فرض می‌کنیم جهتگیری  ${}^A_BR$  با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. این بدان معناست که حرکت نقطه  $Q$  نسبت به  $\{A\}$ ، از تغییر  ${}^AP_{BORG}$  و (یا) تغییر  ${}^BQ$  نسبت به زمان، ناشی می‌شود.

به دست آوردن سرعت خطی نقطه  $Q$  برحسب  $\{A\}$  بسیار ساده است. کافی است هر دو مؤلفه سرعت را برحسب  $\{A\}$  بیان نماییم و آنها را باهم جمع کنیم

$${}^AV_Q = {}^AV_{BORG} + {}^A_BR {}^BV_Q \quad (7-5)$$



شکل ۳-۵ چهارچوب  $\{B\}$  با سرعت  ${}^A V_{BORG}$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  انتقال می‌یابد.

معادله (۷-۵) تنها برای حالتی که در آن جهتگیری نسبی  $\{B\}$  و  $\{A\}$  ثابت باقی می‌ماند، صادق است.

### سرعت دورانی

حال به بررسی دو چهارچوب با مبدأ مشترک و سرعت خطی صفر می‌پردازیم، که مبدأ آنها در کلیه لحظات بر یکدیگر منطبق است. یک یا هر دو چهارچوب را می‌توان به جسم (اجسام) صلب متصل کرد، اما در شکل ۴-۵ برای روشن بودن مسئله، اجسام صلب نشان داده نشده‌اند. جهتگیری چهارچوب  $\{B\}$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$ ، با گذشت زمان تغییر می‌کند. چنانکه در شکل ۴-۵ دیده می‌شود، سرعت دورانی  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$ ، با بردار  ${}^A \Omega_B$  بیان می‌شود. همچنین، بردار  ${}^B Q$  نقطه‌ای را مشخص می‌کند که در  $\{B\}$  ثابت است. حال پرسش مهمی را مطرح می‌کنیم: تغییرات یک بردار نسبت به زمان، از دید ناظر واقع در چهارچوب  $\{A\}$ ، هنگامی که نسبت به  $\{B\}$  ثابت است و چهارچوبهای  $\{A\}$  و  $\{B\}$  نسبت به یکدیگر دوران می‌کنند، چگونه است؟

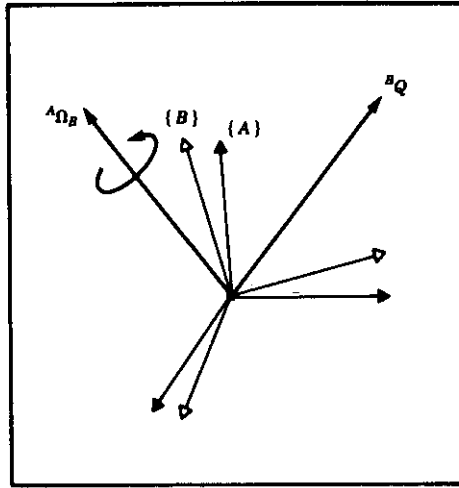
با توجه به آنکه بردار  $Q$  از دید ناظر واقع در  $\{B\}$  ثابت است، می‌توان نوشت

$${}^B V_Q = 0 \quad (۸-۵)$$

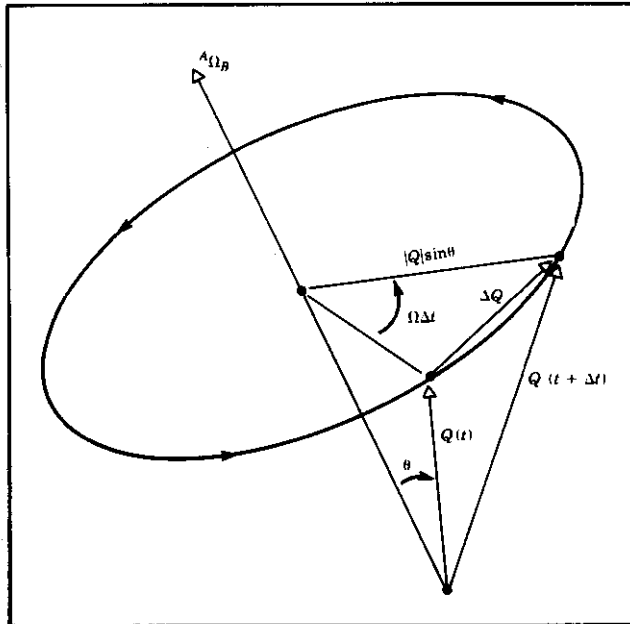
اگر چه این بردار نسبت به  $\{B\}$  ثابت است، اما از دید ناظر واقع در  $\{A\}$ ، به دلیل وجود سرعت دورانی  ${}^A \Omega_B$ ، سرعت خواهد داشت.

برای محاسبه سرعت نقطه  $Q$ ، از رهیافت شهودی کمک می‌گیریم. در شکل ۵-۵، دو لحظه از گردش بردار  $Q$  حول  ${}^A \Omega_B$  نشان داده شده است. این چیزی است که ناظر در  $\{A\}$  مشاهده





شکل ۴-۵ بردار  ${}^BQ$  که در چهارچوب  $\{B\}$  ثابت است، با سرعت زاویه‌ای  ${}^A\Omega_B$  نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  دوران می‌کند.



شکل ۵-۵ سرعت یک نقطه، ناشی از وجود سرعت زاویه‌ای.

می‌کند.

با مطالعه شکل ۵-۵، می‌توان جهت و مقدار تغییر در بردار را آن‌طور که ناظر واقع در  $\{A\}$  مشاهده می‌کند، به دست آورد. در درجه اول، روشن است که تغییر دیرانسیلی در  ${}^A Q$  باید هم بر  ${}^A \Omega_B$  و هم بر  ${}^A Q$  عمود باشد. در درجه دوم، با توجه به شکل ۵-۵، دیده می‌شود که مقدار تغییر دیرانسیلی چنین است

$$|\Delta Q| = (|{}^A Q| \sin \theta) (|{}^A \Omega_B| \Delta t) \quad (۹-۵)$$

این شرایط حاکم بر مقدار و جهت، بلافاصله ضرب برداری را تداعی می‌کنند. نتایج گفته شده در بالا درباره جهت و مقدار را می‌توان با رابطه زیر، بیان کرد

$${}^A V_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q \quad (۱۰-۵)$$

در حالت کلی، بردار  $Q$  ممکن است نسبت به چهارچوب  $\{B\}$  نیز تغییر کند. با در نظر گرفتن این عامل، داریم

$${}^A V_Q = {}^A ({}^B V_Q) + {}^A \Omega_B \times {}^A Q \quad (۱۱-۵)$$

با به کار بردن ماتریس دوران (به منظور حذف زیرنویس دوگان)، و با توجه به اینکه توصیف  ${}^A Q$  در هر لحظه  ${}^B R {}^A Q$  است، خواهیم داشت

$${}^A V_Q = {}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B Q \quad (۱۲-۵)$$

### سرعت خطی و زاویه‌ای همزمان

به سادگی می‌توان معادله (۱۲-۵) را به حالتی که در آن دو مبدأ مختصات منطبق نیستند، بسط داد. بدین منظور، سرعت خطی مبدأ به (۱۲-۵) افزوده می‌شود، و رابطه کلی برای سرعت بردار ثابت نسبت به دستگاه مختصات  $\{B\}$ ، از دید ناظر واقع در  $\{A\}$  چنین به دست می‌آید

$${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B Q \quad (۱۳-۵)$$

معادله (۱۳-۵) کلیترین حالت را برای مشتق برداری واقع در چهارچوب متحرک، از دید یک ناظر واقع در چهارچوب ساکن، بیان می‌کند.

### ۴-۵ مطالبی بیشتر درباره سرعت زاویه‌ای

در این بخش سرعت زاویه‌ای، به‌ویژه اثبات رابطه (۱۰-۵)، را عمیقتر بررسی می‌کنیم. در اینجا برخلاف بخش قبل، که در آن برای نشان دادن اعتبار معادله (۱۰-۵) از رهیافت هندسی استفاده

شد، رهیافت ریاضی را درپیش می‌گیریم. این بخش را می‌توان در نخستین دور مطالعه این کتاب، ندیده گرفت.

### ویژگی مشتق یک ماتریس یکامتعامد

بین مشتق یک ماتریس یکامتعامد و یک ماتریس پاد متقارن، می‌توان رابطه جالبی به صورت زیر به دست آورد. برای هر ماتریس یکامتعامد و  $n \times n$ ،  $R$ ، می‌توان نوشت

$$RR^T = I_n \quad (۱۴-۵)$$

که در آن  $I_n$  ماتریس همانی  $n \times n$  است. در اینجا حالت  $n = ۳$  و ماتریس یکامتعامد سره  $R$ ، یا ماتریس دوران، مورد نظر است. با مشتق گرفتن از معادله (۱۴-۵) نتیجه می‌شود

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \circ_n \quad (۱۵-۵)$$

که در آن  $\circ_n$  ماتریس صفر  $n \times n$  است. معادله (۱۵-۵) را می‌توان چنین نوشت

$$\dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = \circ_n \quad (۱۶-۵)$$

با تعریف

$$S = \dot{R}R^T \quad (۱۷-۵)$$

می‌توان (۱۶-۵) را چنین نوشت

$$S + S^T = \circ_n \quad (۱۸-۵)$$

دیده می‌شود که  $S$  ماتریسی پاد متقارن است. پس ویژگی‌ای که مشتق ماتریسهای یکامتعامد را به ماتریسهای پادمتقارن مربوط می‌سازد، چنین بیان می‌شود

$$S = \dot{R}R^{-1} \quad (۱۹-۵)$$

### سرعت یک نقطه بر اثر دوران چهارچوب مرجع

بردار ثابت  ${}^B P$  را که نسبت به چهارچوب  $\{B\}$  تغییر نمی‌کند، در نظر بگیرید. این بردار در چهارچوب دیگر  $\{A\}$  چنین توصیف می‌شود

$${}^A P = {}^A_B R {}^B P \quad (۲۰-۵)$$

اگر چهارچوب  $\{B\}$  در حال دوران باشد (یعنی مشتق  ${}^A_B R$  صفر نباشد)، آنگاه  ${}^A P$ ، حتی هنگامی که  ${}^B P$  ثابت است، تغییر خواهد کرد؛ یعنی

$${}^A \dot{P} = {}^A_B \dot{R} {}^B P \quad (21-5)$$

یا، با استفاده از نمادگذاری به‌کار رفته برای سرعت

$${}^A V_P = {}^A_B R {}^B P \quad (22-5)$$

حال (۲۲-۵) را با قراردادن مقدار  ${}^B P$  در آن، به‌صورت زیر می‌نویسیم

$${}^A V_P = {}^A_B R {}^A_B R^{-1} {}^A P \quad (23-5)$$

با استفاده از نتیجه (۱۹-۵) برای ماتریسهای یکا متعامد، داریم

$${}^A V_P = {}^A_B S {}^A P \quad (24-5)$$

که در آن  $S$  با زیر و زبرنویسها مشخص شده است تا بدین ترتیب، نشان داده شود که ماتریس پادمتقارن مربوط به ماتریس دوران خاص  ${}^A_B R$  است. چون این ماتریس پادمتقارن ( $S$ ) در رابطه (۲۴-۵) ظاهر شده است، و به دلایل دیگری که به‌زودی خواهیم دید، آن را ماتریس سرعت زاویه‌ای می‌نامند.

ماتریسهای پادمتقارن و ضرب برداری

اگر عنصرهای یک ماتریس پادمتقارن  $S$  را به‌صورت زیر در نظر بگیریم

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (25-5)$$

و بردار ستونی  $3 \times 1$  زیر را تعریف کنیم

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (26-5)$$

آنگاه به‌آسانی می‌توان نشان داد

$$S P = \Omega \times P \quad (27-5)$$

که در آن  $P$  برداری دلخواه، و علامت  $\times$  نشان‌دهنده ضرب برداری است. بردار  $1 \times 3$ ، که آن را با  $\Omega$  نشان داده‌ایم، و با ماتریس سرعت زاویه‌ای  $3 \times 3$  متناظر است، بردار سرعت زاویه‌ای خوانده می‌شود. این بردار در بخش ۵-۲ معرفی شد. پس رابطه (۵-۲۴) چنین نوشته می‌شود

$${}^A V_P = {}^A \Omega_B \times {}^A P \quad (5-28)$$

که در آن  ${}^A \Omega_B$  بردار سرعت زاویه‌ای است که حرکت چهارچوب  $\{B\}$  را نسبت به  $\{A\}$  توصیف می‌کند.

### مفهوم فیزیکی بردار سرعت زاویه‌ای

دیدیم که بردار  $\Omega$  در رابطه (۵-۲۸) صدق می‌کند. حال می‌خواهیم مفهوم فیزیکی آن را بهتر درک کنیم.  $\Omega$  را می‌توان با مشتقگیری مستقیم از ماتریس دوران، به دست آورد؛ یعنی

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \quad (5-29)$$

حال  $R(t + \Delta t)$  را به صورت ترکیبی از دو ماتریس می‌نویسیم

$$R(t + \Delta t) = R_K(\Delta \theta) R(t) \quad (5-30)$$

که در آن، دوران کوچک  $\Delta \theta$  در فاصله زمانی  $\Delta t$  حول محور  $\hat{K}$  انجام گرفته است. با توجه به (۵-۳۰)، می‌توان (۵-۲۹) را چنین نوشت

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{R_K(\Delta \theta) - I_r}{\Delta t} R(t) \right) \quad (5-31)$$

یا

$$\dot{R} = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_K(\Delta \theta) - I_r}{\Delta t} \right) R(t) \quad (5-32)$$

با توجه به رابطه (۲-۷۷)، می‌توان برای زوایای کوچک چنین نوشت

$$R_K(\Delta \theta) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z \Delta \theta & k_y \Delta \theta \\ k_z \Delta \theta & 1 & -k_x \Delta \theta \\ -k_y \Delta \theta & k_x \Delta \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (5-33)$$

پس (۳۲-۵) به صورت زیر در می‌آید

$$\dot{R} = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} 0 & -k_z \Delta \theta & k_y \Delta \theta \\ k_z \Delta \theta & 0 & -k_x \Delta \theta \\ -k_y \Delta \theta & k_x \Delta \theta & 0 \end{bmatrix}}{\Delta t} \right) R(t) \quad (34-5)$$

سرانجام، با تقسیم همهٔ عنصرهای ماتریس فوق بر  $\Delta t$  و گرفتن حد، داریم

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z \dot{\theta} & k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} & 0 & -k_x \dot{\theta} \\ -k_y \dot{\theta} & k_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} R(t) \quad (35-5)$$

پس نتیجه می‌شود

$$\dot{R}R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (36-5)$$

که در آن

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \dot{\theta} \\ k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{\theta} \hat{K} \quad (37-5)$$

مفهوم فیزیکی بردار سرعت زاویه‌ای،  $\Omega$ ، آن است که در هر لحظه تغییر جهتگیری هر چهارچوب در حال دوران را می‌توان به صورت دورانی حول محوری چون  $\hat{K}$  در نظر گرفت. این محور آنی دوران، که ابتدا به صورت بردار یکه فرض می‌شود و سپس بر اساس سرعت دوران حول آن محور ( $\dot{\theta}$ ) مقیاس‌بندی می‌شود، بردار سرعت زاویه‌ای را به دست خواهد داد.

### روشهای دیگر نمایش سرعت زاویه‌ای

سرعت زاویه‌ای را می‌توان به روشهای دیگر نیز نمایش داد. مثلاً تصور کنید که سرعت زاویه‌ای جسمی در حال دوران، به صورت آهنگ تغییرات مجموعهٔ زوایای اویلر Z-Y-Z در دست است

$$\dot{\Theta}_{Z,Y,Z} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (38-5)$$

می‌خواهیم با در دست داشتن این روش توصیف، یا هر روش دیگری که از یکی از بیست و چهار مجموعه زوایا استفاده می‌کند، بردار سرعت زاویه‌ای معادل را به دست آوریم. پیش از این دیدیم که

$$\dot{R}R^T = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_x & 0 & -\Omega_z \\ -\Omega_y & \Omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (39-5)$$

این ماتریس، سه معادله مستقل زیر را به دست می‌دهد

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{r}_{21}r_{21} + \dot{r}_{32}r_{22} + \dot{r}_{33}r_{23} \\ \Omega_y &= \dot{r}_{11}r_{21} + \dot{r}_{12}r_{22} + \dot{r}_{13}r_{23} \\ \Omega_z &= \dot{r}_{21}r_{11} + \dot{r}_{22}r_{12} + \dot{r}_{23}r_{13} \end{aligned} \quad (40-5)$$

با استفاده از (40-5) و توصیف نمادین  $R$  برحسب مجموعه زوایا، می‌توان عبارتهایی را که سرعت‌های مجموعه زوایا را با بردار سرعت زاویه‌ای معادل مربوط می‌کنند، نوشت. عبارتهای حاصل را می‌توان به صورت ماتریسی در آورد. مثلاً برای زوایای اوایلر Z-Y-Z داریم

$$\Omega = E_{Z,Y,Z'}(\Theta_{Z,Y,Z'})\dot{\Theta}_{Z,Y,Z'} \quad (41-5)$$

این بدان معناست که  $E(\cdot)$  ژاکوبی ارتباط‌دهنده بردار سرعت مجموعه زوایا به بردار سرعت زاویه‌ای، و تابعی از مقادیر لحظه‌ای مجموعه زوایاست. شکل  $E(\cdot)$  به مجموعه زوایای مورد نظری که به ازای آنها محاسبه شده است، بستگی دارد و به همین دلیل، برای مشخص کردن آن از زیرنویس استفاده می‌شود.

## ■ مثال ۲-۵

ماتریس  $E$ ، مربوط کننده زوایای اوایلر Z-Y-Z به بردار سرعت زاویه‌ای، یعنی  $E_{Z,Y,Z'}$  در معادله (41-5)، را به دست آورید.

با استفاده از (۲۲-۲) و (40-5)، و گرفتن مشتقات لازم، نتیجه می‌شود

$$E_{Z,Y,Z'} = \begin{bmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad (42-5)$$

## ۵-۵ حرکت رابطهای روبات

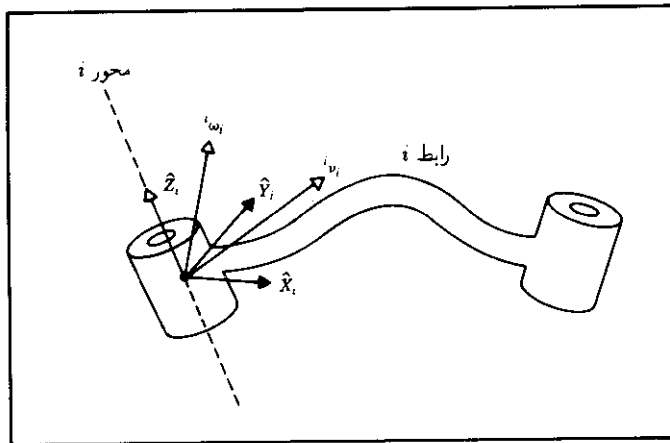
برای بررسی حرکت رابطهای روبات، همواره چهارچوب رابط  $\{e\}$  را به عنوان چهارچوب مرجع در نظر خواهیم گرفت. به این ترتیب،  $v$  سرعت خطی مبدأ چهارچوب رابط  $\{e\}$ ، و  $\omega$  سرعت زاویه‌ای این چهارچوب است.

در هر لحظه، هر رابط متحرک روبات، یک سرعت خطی و یک سرعت زاویه‌ای دارد. در شکل ۵-۶، این بردارهای سرعت برای رابط  $i$  نشان داده شده‌اند. در این مورد، این بردارها نسبت به چهارچوب  $\{i\}$  نوشته شده‌اند.

## ۵-۶ چگونگی «اشاعه» سرعت از رابطی به رابط دیگر

در این بخش، محاسبه سرعتهای خطی و زاویه‌ای رابطهای یک روبات را بررسی می‌کنیم. هر بازاری مکانیکی ماهر، زنجیری از اجسام است که هر یک نسبت به اجسام مجاور خود حرکت می‌کند. به همین دلیل، می‌توان سرعت هر رابط را به ترتیب محاسبه کرد. برای این کار، باید از پایه روبات شروع کرد. سرعت رابط  $1 + i$  عبارت است از سرعت رابط  $i$  به علاوه هر مؤلفه سرعتی که رابط  $1 + i$  وارد مسئله می‌کند.<sup>۱</sup>

چنانکه در شکل ۵-۶ دیده می‌شود، می‌توان هر رابط مکانیزم را به صورت جسمی صلب که حرکت آن را بردارهای سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای توصیف می‌کنند، در نظر گرفت. به علاوه،



شکل ۵-۶ سرعت رابط  $i$  با بردارهای  $v_i$  و  $\omega_i$  که می‌توانند در هر چهارچوب دلخواه، حتی چهارچوب  $\{i\}$ ، نوشته شوند، داده می‌شود.

۱. به خاطر آورید که سرعت خطی برای نقطه، و سرعت زاویه‌ای برای جسم تعریف می‌شود. پس اصطلاح «سرعت رابط» در اینجا برابری سرعت خطی مبدأ چهارچوب رابط، و سرعت زاویه‌ای آن رابط است.



این سرعتها را می‌توان، به جای دستگاه مختصات پایه، نسبت به خود چهارچوب رابط بیان کرد. در شکل ۷-۵، رابطهای  $i$  و  $i+1$ ، همراه با بردارهای سرعت آنها، که در چهارچوبهای رابط تعریف شده‌اند، نشان داده شده‌اند.

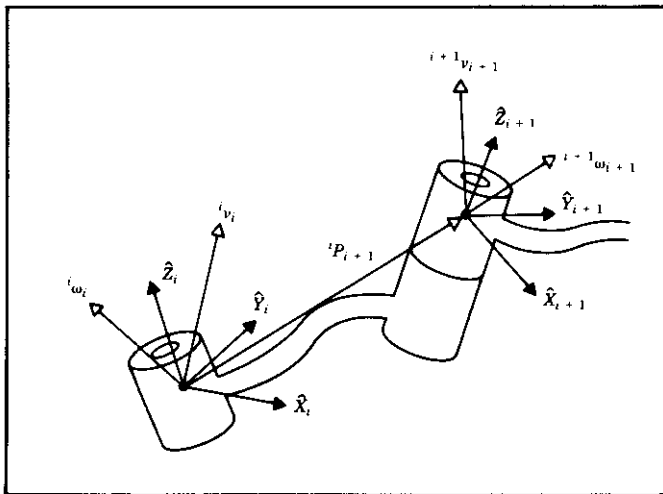
سرعتهای دورانی  $\omega$  را می‌توان، درحالتی که هر دو نسبت به یک چهارچوب نوشته می‌شوند، با یکدیگر جمع کرد. در نتیجه، سرعت زاویه‌ای رابط  $i+1$ ، همان سرعت زاویه‌ای رابط  $i$  است، به‌علاوه مؤلفه جدیدی که در نتیجه سرعت دورانی در رابط  $i+1$  پدید می‌آید. رابطه سرعتها را می‌توان نسبت به چهارچوب  $\{i\}$  چنین نوشت

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^{i+1}R \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (۴۳-۵)$$

توجه کنید که

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (۴۴-۵)$$

از ماتریس دوران ارتباط دهنده چهارچوبهای  $\{i\}$  و  $\{i+1\}$ ، برای نشان دادن مؤلفه دورانی اضافه شده بر اثر حرکت مفصل در چهارچوب  $\{i\}$ ، استفاده کرده‌ایم. ماتریس دوران، محور دوران مفصل  $i+1$  را در چهارچوب  $\{i\}$  توصیف می‌کند. بنابراین می‌توان دو مؤلفه سرعت زاویه‌ای را با هم جمع کرد!



شکل ۷-۵ بردارهای سرعت رابطهای مجاور.

با پیش ضرب (ضرب از سمت چپ) هر دو طرف معادله (۴۳-۵) در  ${}^{i+1}R$  می توان سرعت زاویه ای رابط  $i+1$  را در چهارچوب  $\{i+1\}$  چنین توصیف کرد

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \ {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (۴۵-۵)$$

سرعت خطی مبدأ چهارچوب  $\{i+1\}$  برابر است با سرعت خطی مبدأ چهارچوب  $\{i\}$ ، به علاوه مؤلفه جدیدی که بر اثر سرعت دورانی رابط  $i$  حاصل می شود. این دقیقاً همان وضعیتی است که با رابطه (۱۳-۵) توصیف شد، با این تفاوت که در اینجا، به دلیل ثابت بودن  ${}^iP_{i+1}$  در چهارچوب  $\{i\}$ ، یک جمله حذف می شود. پس داریم

$${}^iv_{i+1} = {}^iv_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1} \quad (۴۶-۵)$$

با ضرب هر دو طرف در  ${}^{i+1}R$  نتیجه می شود

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R({}^iv_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) \quad (۴۷-۵)$$

معادله های (۴۵-۵) و (۴۷-۵) را می توان مهمترین نتایج این فصل شمرد. روابط معادل با این معادله ها، در حالتی که مفصل  $i+1$  کشویی است، عبارت اند از

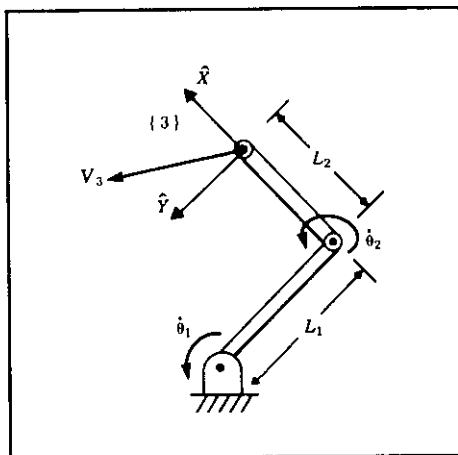
$$\begin{aligned} {}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}R \ {}^i\omega_i \\ {}^{i+1}v_{i+1} &= {}^{i+1}R({}^iv_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \end{aligned} \quad (۴۸-۵)$$

با به کار بردن این معادله ها به طور متوالی از یک رابط به رابط دیگر، می توانیم  ${}^N\omega_N$  و  ${}^Nv_N$  سرعت های زاویه ای و خطی آخرین رابط، را محاسبه کنیم. توجه کنید که این سرعتها نسبت به چهارچوب  $\{N\}$  به دست می آیند. این امر، به طوری که در آینده خواهیم دید، سودمند است. اگر بخواهیم سرعتها را در دستگاه مختصات پایه محاسبه کنیم، کافی است آنها را در ماتریس  ${}^N_R$  ضرب نماییم.

#### ■ مثال ۳-۵

در شکل ۸-۵، یک بازوی مکانیکی ماهر با مفصلهای لولایی و دو رابط، نشان داده شده است. سرعت انتهای بازو را به صورت تابعی از آهنگ تغییرات زوایای مفصلی به دست آورید. جواب را به دو صورت، در چهارچوب  $\{۳\}$  و در چهارچوب  $\{۰\}$ ، بیان کنید.

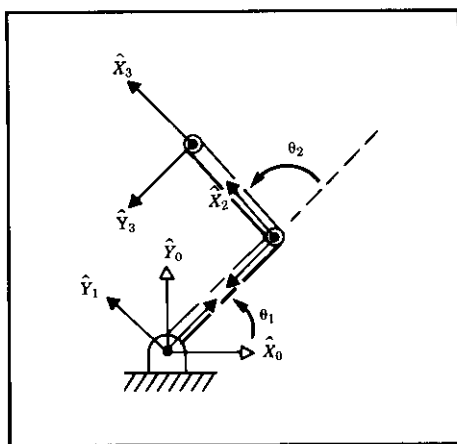
چهارچوب  $\{۳\}$ ، چنانکه در شکل ۹-۵ دیده می شود، به انتهای بازوی مکانیکی ماهر متصل شده است، و می خواهیم سرعت مبدأ این چهارچوب را در چهارچوب  $\{۳\}$  بیان کنیم. در قسمت



شکل ۸-۵ بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط.

دوم مسئله، سرعتها را در چهارچوب  $\{0\}$  نیز به دست خواهیم آورد. کار را مانند قبل با متصل کردن چهارچوبهای رابط، آغاز می‌کنیم (شکل ۹-۵).

معادله‌های (۴۵-۵) و (۴۷-۵) را برای محاسبه سرعت مبدأ هر چهارچوب به کار می‌بریم و از چهارچوب پایه  $\{0\}$  که سرعت صفر دارد، شروع می‌کنیم. چون در (۴۵-۵) و (۴۷-۵) از



شکل ۹-۵ طرز تخصیص چهارچوبها در بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط.

تبدیلهای رابط کلی استفاده می‌شود، پس این تبدیلهای کلی را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 {}^1T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^1T &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49-5) \\
 {}^2T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

توجه کنید که این معادله‌ها با بازوی مکانیکی ماهر مثال ۳-۳، که در آن مفصل ۳ همواره در زاویه صفر ثابت نگه‌داشته می‌شود، متناظرند. در نظر گرفتن تبدیل کلی نهایی بین چهارچوبهای {۲} و {۳} به صورت تبدیل رابط کلی استاندارد، ضروری نیست (اگر چه ممکن است این کار سودمند واقع شود). با به کار بردن (۴۵-۵) و (۴۷-۵) به طور متوالی از رابطی به رابط دیگر، نتیجه می‌شود

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (50-5)$$

$${}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51-5)$$

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (52-5)$$

$${}^2v_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53-5)$$

$${}^2\omega_r = {}^2\omega_r \quad (54-5)$$

$${}^2v_r = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55-5)$$

معادله (55-5) جواب مسئله است. سرعت دورانی چهارچوب {۳} نیز از معادله (54-5) به دست می آید.

برای پیدا کردن سرعتها نسبت به چهارچوب پایه ساکن، آنها را به وسیله ماتریس دوران  ${}^0R$  دوران می دهیم. این ماتریس چنین نوشته می شود

$${}^0R = {}^1R \quad {}^1R \quad {}^2R = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (56-5)$$

این دوران، سرعت را به دست می دهد

$${}^0v_r = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57-5)$$

در اینجا باید دو کاربرد مهم معادله های (45-5) و (47-5) را ذکر کنیم. کاربرد اول، استفاده از آنها برای به دست آوردن عبارتهای تحلیلی است (مانند مثال 3-5). در این حالت، معادله های نمادی را با انجام عملیات آن قدر تغییر می دهیم تا به یک صورت نهایی (مانند 55-5) برسیم. سپس با به کارگیری کامپیوتر، در برخی از موارد محاسبات را انجام خواهیم داد. کاربرد دوم، استفاده مستقیم از این معادله ها (بدون هرگونه تغییر در آنها) برای محاسبه است. این معادله ها را می توان به آسانی به صورت زیر برنامه ای نوشت و سپس برای محاسبه سرعت رابطها آن را به دفعات فراخواند. به این طریق، این معادله ها را می توان برای هر بازوی مکانیکی ماهر دلخواه به کار گرفت، بدون آنکه نیازی به به دست آوردن معادله های هر بازوی خاص باشد. اما در این صورت، جواب به دست آمده، عددی است و شکل معادله ها پنهان خواهد ماند. اغلب مایلیم جواب را به صورت عبارتی تحلیلی (مانند 55-5) در اختیار داشته باشیم. همچنین، اگر کلیه عملیات (از 5-5) تا (57-5)) را انجام دهیم، خواهیم دید که در حالت کلی تعداد محاسباتی که برای کاربرد نهایی به کامپیوتر ارجاع می شود، کمتر خواهد شد.

## ۷-۵ ژاکوبیها

ژاکوبی، صورتی چند بعدی از مشتق است. مثلاً شش تابع را در نظر بگیرید که هر کدام تابعی از شش متغیر مستقل است

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\&\vdots \\y_6 &= f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\end{aligned}\quad (58-5)$$

این معادله‌ها را می‌توان با استفاده از نمادگذاری برداری چنین نوشت

$$Y = F(X) \quad (59-5)$$

حال اگر بخواهیم دیفرانسیل  $y_i$  را به صورت تابعی از دیفرانسیل‌های  $x_j$  بنویسیم، از قاعده زنجیری استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \delta x_6 \\ \delta y_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \delta x_6 \\ &\vdots \\ \delta y_6 &= \frac{\partial f_6}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \delta x_6\end{aligned}\quad (60-5)$$

این معادله‌ها را نیز می‌توان با استفاده از نمادگذاری برداری، چنین نوشت

$$\delta Y = \frac{\partial F}{\partial X} \delta X \quad (61-5)$$

ماتریس  $6 \times 6$  شامل مشتقات جزئی در (۶۱-۵) را ژاکوبی می‌نامیم و آن را با  $J$  نمایش می‌دهیم. توجه کنید که اگر توابع  $f_1(X)$  تا  $f_6(X)$  غیر خطی باشند، آن‌گاه مشتقات جزئی تابعی

از  $x$  خواهند بود. بدین ترتیب، می‌توان نوشت

$$\delta Y = J(X) \delta X \quad (۶۲-۵)$$

با تقسیم هر دو طرف بر جزء دیفرانسیلی زمان، می‌توان ژاکوبی را به صورت نگاشت سرعت‌های  $X$  به سرعت‌های  $Y$  در نظر گرفت

$$\dot{Y} = J(X) \dot{X} \quad (۶۳-۵)$$

در هر لحظه خاص،  $X$  مقداری معین دارد، و  $J(X)$  یک تبدیل خطی کلی است. در هر لحظه جدید،  $X$  و تبدیل خطی هر دو تغییر می‌کنند. ژاکوبها، تبدیلهای خطی کلی متغیر با زمان‌اند. در رباتیک، اغلب از ژاکوبی برای مربوط ساختن سرعت مفصلها به سرعت‌های دکارتی انتهای بازو، استفاده می‌شود. مثلاً

$$\dot{\nu} = J(\Theta) \dot{\Theta} \quad (۶۴-۵)$$

که در آن  $\Theta$  بردار زوایای مفصلی بازوی مکانیکی ماهر، و  $\nu$  بردار سرعت‌های دکارتی است. در معادله (۶۴-۵)، به نماد ژاکوبی یک پیش‌زبرنویس اضافه شده است که چهارچوب توصیف کننده سرعت دکارتی برآیند را بیان می‌کند. این زبرنویس، در صورت بدیهی بودن چهارچوب، و یا بی‌اهمیتی آن در عملیات، حذف می‌شود. توجه کنید که برای هر پیکربندی مفروض بازو، آهنگ تغییرات زوایای مفصلی، یا سرعت انتهای بازو رابطه خطی دارد. این رابطه لحظه‌ای است، زیرا در لحظه بعد، ژاکوبی کمی تغییر می‌کند. برای حالت کلی رباتی با شش مفصل، ژاکوبی ماتریسی  $6 \times 6$ ،  $\dot{\Theta}$  برداری  $6 \times 1$ ، و  $\dot{\nu}$  نیز برداری  $6 \times 1$  است. بردار سرعت دکارتی  $6 \times 1$ ، با کنار هم گذاشتن بردار سرعت خطی  $3 \times 1$  و بردار سرعت دورانی  $3 \times 1$ ، به دست می‌آید

$$\dot{\nu} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \quad (۶۵-۵)$$

ژاکوبی را می‌توان با هر بعد ماتریسی (حتی غیر مربع) تعریف کرد. تعداد سطرهای ژاکوبی، متناظر با تعداد درجات آزادی در فضای دکارتی تحت بررسی، و تعداد ستونهای آن برابر با تعداد مفصلهای بازوی مکانیکی ماهر است. در بازویی صفحه‌ای، دلیلی ندارد ژاکوبی بیش از سه سطر داشته باشد، اما در بازوهای صفحه‌ای با مفصلهای زاید، ستونهای زیادی را می‌توان برای آن اختیار کرد (یک ستون برای هر مفصل).

در مورد بازویی با دو رابط، می‌توان یک ژاکوبی  $2 \times 2$  نوشت که آهنگ تغییر زوایای مفصلی را به سرعت مجری نهایی مربوط می‌سازد. این ژاکوبی، با توجه به نتیجه مثال ۵-۲ به آسانی

به دست می آید. ژاکوبی نوشته شده در چهارچوب  $\{3\}$  مطابق با معادله (۵-۵۵) چنین است

$${}^3J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (۶۶-۵)$$

و ژاکوبی نوشته شده در چهارچوب  $\{0\}$  (با استفاده از (۵-۵۷)) چنین است

$${}^0J(\Theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (۶۷-۵)$$

توجه کنید که در هر دو حالت، ترجیح داده ایم ماتریس مربعی بنویسیم که آهنگ تغییر زوایای مفصلی را به سرعت مجری نهایی ارتباط دهد. همچنین، می توان یک ژاکوبی  $3 \times 2$  را در نظر گرفت که سرعت زاویه ای مجری نهایی را نیز شامل شود.

با توجه به معادله های (۵-۵۸) تا (۵-۶۲)، که ژاکوبی را تعریف می کنند، مشاهده می شود که ژاکوبی را می توان با دیفرانسیل گیری مستقیم از معادله های سینماتیکی مکانیزم نیز به دست آورد. این عمل، برای سرعت های خطی به راحتی انجام می شود، اما در مورد سرعت زاویه ای، نمی توان یک بردار جهت گیری  $3 \times 1$  یافت که مشتق آن  $\omega$  باشد. بدین ترتیب، روشی برای به دست آوردن ژاکوبی، با استفاده متوالی از (۵-۴۵) و (۵-۴۷)، حاصل می شود. چندین روش دیگر نیز برای این کار وجود دارد (به عنوان مثال، به مرجع [۴] مراجعه کنید). یکی از این روشها، به طور خلاصه در بخش ۵-۸ معرفی خواهد شد. یکی از دلایل استفاده از روش ارائه شده در فوق برای به دست آوردن ژاکوبی، آن است که در فصل ۶ نیز برای حل معادله های دینامیکی حرکت بازوی مکانیکی ماهر، روشهایی مشابه با آن به کار خواهیم برد.

### تغییر چهارچوب مرجع ژاکوبی

ژاکوبی زیر که در چهارچوب  $\{B\}$  نوشته شده، مفروض است

$$\begin{bmatrix} {}^B v \\ {}^B \omega \end{bmatrix} = {}^B v = {}^B J(\Theta) \dot{\Theta} \quad (۶۸-۵)$$

می خواهیم عبارتی برای ژاکوبی در چهارچوب  $\{A\}$  به دست آوریم. ابتدا توجه کنید که هر بردار سرعت دکارتی  $6 \times 1$  نوشته شده در  $\{B\}$  را می توان به وسیله تبدیل کلی زیر، نسبت به  $\{A\}$  نوشت

$$\begin{bmatrix} {}^A v \\ {}^A \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & 0 \\ \hline 0 & {}^A_B R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B v \\ {}^B \omega \end{bmatrix} \quad (۶۹-۵)$$



پس می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} {}^A v \\ {}^A \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & | & 0 \\ \hline 0 & | & {}^A_B R \end{bmatrix} {}^B J(\Theta) \dot{\Theta} \quad (۷۰-۵)$$

بدین ترتیب، روشن است که تغییر در چهارچوب هر ژاکوبی، به صورت زیر انجام می‌شود

$${}^A J(\Theta) = \begin{bmatrix} {}^A_B R & | & 0 \\ \hline 0 & | & {}^A_B R \end{bmatrix} {}^B J(\Theta) \quad (۷۱-۵)$$

## ۸-۵ حالت‌های تکین

چنانچه تبدیل خطی کلی که سرعت مفصلها را به سرعت دکارتی مربوط می‌سازد، در دست داشته باشیم، می‌توانیم پرسشی منطقی را مطرح کنیم: آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ یعنی آیا این ماتریس نانکین است؟ اگر این ماتریس نانکین باشد، آن‌گاه می‌توانیم آن را وارون کنیم و سرعت‌های مفصلی را با داشتن سرعت‌های دکارتی، به دست آوریم

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta) \nu \quad (۷۲-۵)$$

این رابطه بسیار اهمیت دارد. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم دست روبات، با بردار سرعت معینی در فضای دکارتی، حرکت کند. با استفاده از (۷۲-۵)، می‌توانیم سرعت‌های مفصلی لازم در هر لحظه را در راستای مسیر، به دست آوریم. پرسش فوق را باید چنین مطرح کرد: آیا ژاکوبی به ازای همه مقادیر  $\Theta$  وارون‌پذیر است؟ اگر نه، در کجا وارون‌پذیر نیست؟

در بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر، به ازای مقداری از  $\Theta$ ، ژاکوبی تکین می‌شود. چنین وضعیتی را حالت‌های تکین مکانیزم یا به اختصار حالت‌های تکین می‌نامند. همه بازوهای مکانیکی ماهر، در مرز فضای کاری خود، و بیشتر بازوها در داخل فضای کاری خود، نقاط تکین دارند. مطالعه دقیق دسته‌بندی حالت‌های تکین، از محدوده این کتاب خارج است (برای کسب اطلاعات بیشتر در این مورد، به مرجع [۵] مراجعه کنید). در اینجا، بدون آنکه تعریف‌های بسیار دقیقی ارائه کنیم، حالت‌های تکین را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

۱. حالت‌های تکین در مرز فضای کاری، حالت‌هایی هستند که در هنگام کشیدگی کامل بازو یا خم شدن کامل بازو بر روی خود، به طوری که مجری نهایی تقریباً یا دقیقاً در مرز فضای کاری قرار گیرد، روی می‌دهند.

۲. حالت‌های تکین در داخل فضای کاری، حالت‌هایی هستند که دور از مرز فضای کاری، و در حالت کلی هنگامی که دو یا چند محور مفصلی در یک راستا قرار می‌گیرند، روی می‌دهند. هنگامی که بازوی مکانیکی ماهر در وضعیت تکین قرار می‌گیرد، یک یا چند درجه آزادی خود را در فضای دکارتی از دست می‌دهد. این بدان معناست که در فضای دکارتی، راستایی (یا زیر فضایی) وجود دارد که در آن، صرف‌نظر از آن که چه سرعت مفصلی انتخاب شود، نمی‌توان دست روبات را حرکت داد. روشن است که این امر در مرز فضای کاری روبات‌ها رخ می‌دهد.

#### ■ مثال ۴-۵

حالت‌های تکین در بازوی با دو رابط مثال ۳-۵ کدام‌اند؟ تعبیر فیزیکی این حالت‌های تکین چیست؟ آیا این حالت‌ها از نوع مرز فضای کاری هستند یا از نوع داخل فضای کاری؟ برای پیدا کردن نقاط تکین هر مکانیزم، باید دترمینان زاکوبی آن را بررسی کنیم. در صورتی که این دترمینان صفر باشد، زاکوبی رتبه کامل خود را از دست داده، تکین است.

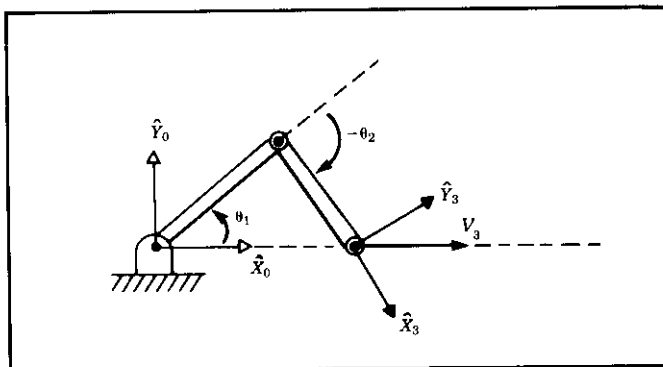
$$DET[J(\Theta)] = \begin{vmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{vmatrix} = l_1 l_2 s_2 = 0 \quad (۷۳-۵)$$

به‌روشنی دیده می‌شود که اگر  $\theta_2$  صفر یا  $۱۸۰^\circ$  درجه باشد، با تکینی مکانیزم روبه‌رو می‌شویم. از لحاظ فیزیکی، در  $\theta_2 = 0^\circ$  بازو کاملاً کشیده است. در این وضعیت، حرکت مجری نهایی تنها در راستای یک امتداد دکارتی (امتداد عمود بر بازو) ممکن خواهد بود. در نتیجه، مکانیزم یک درجه آزادی را از دست داده است. به همین ترتیب، در  $\theta_2 = ۱۸۰^\circ$ ، بازو کاملاً بر روی خودش خم شده، حرکت دست مجدداً تنها در یک امتداد دکارتی (به‌جای دو امتداد) ممکن است. این حالت‌های تکین از نوع مرز فضای کاری‌اند، زیرا در لبه فضای کاری بازو ایجاد می‌شوند. توجه کنید که زاکوبی نوشته شده در چهارچوب  $\{0\}$ ، و یا هر چهارچوب دلخواه دیگر، نیز همین نتیجه را به‌دست می‌دهد. ■

خطر استفاده از معادله (۷۲-۵) در سیستم کنترل روبات، آن است که زاکوبی وارون، در نقطه تکین، به اصطلاح «منفجر می‌شود»! این باعث می‌شود که با رسیدن به نقطه تکین، سرعت‌های مفصلی به سوی بینهایت میل کنند.

#### ■ مثال ۵-۵

روبات با دو رابط مثال ۲-۵ را در نظر بگیرید. اگر این روبات مجری نهایی خود را در راستای محور  $\hat{x}$  با سرعت  $۱/۰\text{ m/s}$  (شکل ۵-۱۰) حرکت دهد، نشان دهید که سرعت‌های مفصلی در



شکل ۵-۱۰ بازوی مکانیکی با دو رابط که در آن مجری نهایی با سرعت خطی ثابت حرکت می‌کند.

هنگام دور بودن از نقاط تکین معقول‌اند، اما با نزدیک شدن روبات به نقطه تکین  $\theta_2 = 0^\circ$  به بینهایت میل می‌کنند.

ابتدا وارون ژاکوبی را نسبت به  $\{0\}$  محاسبه می‌کنیم

$$J^{-1}(\Theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix} \quad (5-74)$$

سپس با استفاده از معادله (۵-۷۴) برای سرعت  $1 \text{ m/s}$  در جهت  $\dot{X}$ ، سرعت‌های مفصلی را به صورت تابعی از پیکربندی روبات، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{c_{12}}{l_1 s_2} \\ \dot{\theta}_2 &= -\frac{c_1}{l_2 s_2} - \frac{c_{12}}{l_1 s_2} \end{aligned} \quad (5-75)$$

به روشنی دیده می‌شود که با کشیده شدن بازو و نزدیک شدن آن به وضعیت  $\theta_2 = 0^\circ$ ، سرعت‌های مفصلی به بینهایت میل می‌کنند. ■

#### ■ مثال ۵-۶

برای بازوی مکانیکی ماهر پیوما  $56^\circ$ ، دو مثال از حالت‌های تکین ارائه دهید. هنگامی که  $\theta_2$  به نزدیکی  $-90^\circ$  درجه می‌رسد، یک حالت تکین ایجاد می‌شود. محاسبه مقدار دقیق  $\theta_2$  را به عهده خواننده می‌گذاریم (تمرین ۵-۱۴ را ببینید). در این وضعیت، رابط‌های ۲ و ۳، مانند آنچه در حالت تکین روبات با دو رابط در مثال ۵-۳ دیدیم، کاملاً به بیرون کشیده

می‌شوند. این نقطهٔ تکین، از نوع مرز فضای کاری است. هنگامی که  $\theta = 0^\circ$ ، بازو در حالت تکین دیگری قرار می‌گیرد. در این حالت، محورهای مفصلی ۴ و ۶ در یک راستا واقع می‌شوند و عملکرد هر دو محور، در مجری نهایی حرکت یکسانی را پدید می‌آورد، گویی یک درجهٔ آزادی را از دست داده است. از آنجا که این وضعیت، ممکن است در داخل پوش فضای کاری نیز رخ دهد، آن را از نوع حالت تکین داخل فضای کاری تلقی خواهیم کرد.

## ۵-۹ نیروهای استاتیکی در بازوهای مکانیکی ماهر

طبیعت زنجیری بازوهای مکانیکی ماهر، ما را بر آن می‌دارد که چگونگی «اشاعهٔ» نیروها و گشتاورها را از یک رابط به رابط بعدی، بررسی کنیم. در حالت عادی، روبات به وسیلهٔ انتهای آزاد بازوی خود (مجری نهایی)، جسمی را در محیط به جلو فشار می‌دهد و یا باری را در دست خود نگه می‌دارد. در اینجا می‌خواهیم گشتاورهایی را که برای برقرار کردن تعادل استاتیکی، باید به مفصلهای روبات وارد شوند، به دست آوریم.

به هنگام بررسی نیروهای استاتیکی در هر بازوی مکانیکی ماهر، ابتدا همهٔ مفصلهای آن را قفل می‌کنیم تا روبات به صورت یک سازه در آید. سپس هر رابط این سازه را جداگانه بررسی می‌کنیم و روابط تعادل نیرو و گشتاور را نسبت به چهارچوبهای رابط، می‌نویسیم. سرانجام، گشتاور استاتیکی را که باید حول محور مفصلی وارد شود تا در بازوی مکانیکی ماهر تعادل استاتیکی ایجاد کند، محاسبه خواهیم کرد. به این ترتیب، گشتاورهای مفصلی لازم برای اینکه روبات بتواند یک بار استاتیکی را در مجری نهایی خود تحمل کند، به دست می‌آید.

برای بیان نیرو و گشتاور اعمال شده به وسیلهٔ رابط مجاور، نمادگذاری ویژه‌ای به کار می‌بریم:

$$f_i = \text{نیروی وارد به رابط } i \text{ به وسیلهٔ رابط } i-1$$

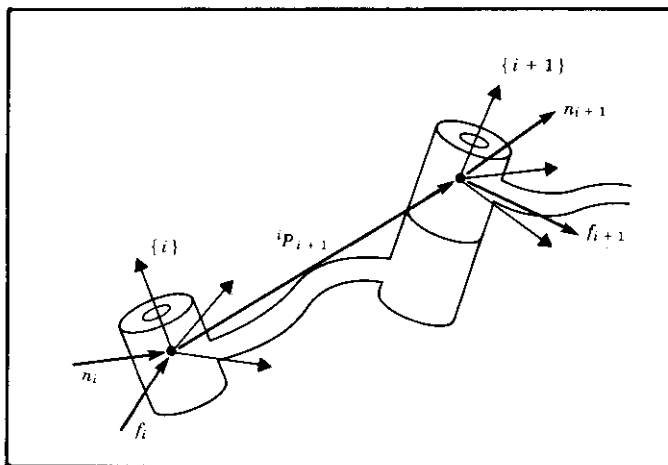
$$n_i = \text{گشتاور وارد به رابط } i \text{ به وسیلهٔ رابط } i-1$$

برای تخصیص چهارچوبهای مناسب به رابطها، از روش معمول خود استفاده خواهیم کرد. در شکل ۵-۱۱، نیروها و گشتاورهای استاتیکی وارد شده بر اتصال  $i$  نشان داده شده‌اند. با جمع نیروها و صفر قراردادن این مجموع، داریم

$${}^i f_i - {}^i f_{i+1} = 0 \quad (5-76)$$

و با صفر قراردادن مجموع گشتاورها حول مبدأ چهارچوب  $\{i\}$ ، نتیجه می‌شود

$${}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} = 0 \quad (5-77)$$



شکل ۱۱-۵ تعادل استاتیکی نیرو-گشتاور برای یک رابط.

اگر کار را با توصیف نیرو و گشتاور اعمال شده به وسیله دست روبات شروع کنیم، می‌توانیم نیرو و گشتاور اعمال شده به وسیله هر رابط را از آخرین رابط تا پایه روبات (رابط ۰) به دست آوریم. برای انجام این کار، عبارتهای نیرو-گشتاور (۵-۷۶) و (۵-۷۷) را طوری فرمولبندی می‌کنیم که در آنها تکرار از رابطهای با شماره بالاتر به رابطهای با شماره پایتتر انجام گیرد. نتیجه را می‌توان چنین نوشت

$${}^i f_i = {}^i f_{i+1} \quad (۷۸-۵)$$

$${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} \quad (۷۹-۵)$$

برای نوشتن این معادله‌ها برحسب فقط نیروها و گشتاورهای تعریف شده در محدوده چهارچوب رابط خودشان، آنها را به وسیله ماتریس دوران توصیف کننده چهارچوب  $\{i+1\}$  نسبت به چهارچوب  $\{i\}$ ، تبدیل خواهیم کرد. این امر، ما را به مهمترین نتیجه درباره «اشاعه» نیروهای استاتیکی از یک رابط به رابط دیگر، می‌رساند

$${}^i f_i = {}^{i+1}_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} \quad (۸۰-۵)$$

$${}^i n_i = {}^{i+1}_{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i \quad (۸۱-۵)$$

سرانجام، پرسش اساسی زیر مطرح می‌شود: برای متعادل ساختن نیروها و گشتاورهای واکنشی وارد بر رابطها، چه گشتاورهایی باید در مفصلها وارد کرد؟ همه مؤلفه‌های بردارهای نیرو و گشتاور،

بجز گشتاور حول محور مفصلی، به وسیله سازه خود مکانیزم خنثی می شوند. پس برای پیدا کردن گشتاور مفصلی لازم برای ایجاد تعادل استاتیکی، باید ضرب داخلی بردار محور مفصلی در بردار گشتاور وارد بر رابط، را محاسبه کرد

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (۸۲-۵)$$

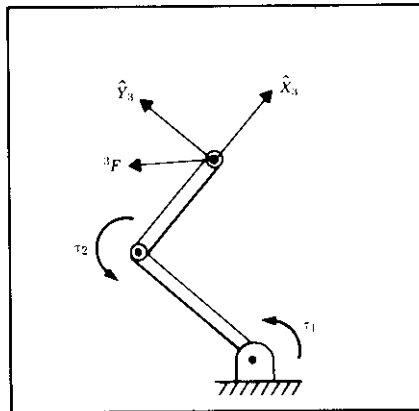
اگر مفصل  $i$  کشویی باشد، نیروی کارانداز مفصل چنین به دست می آید

$$\tau_i = {}^i f_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (۸۳-۵)$$

توجه کنید که حتی برای نیروی مفصلی خطی نیز از نماد  $\tau$  استفاده می کنیم. برطبق قرارداد، در حالت کلی جهت مثبت گشتاور مفصلی را جهتی در نظر خواهیم گرفت که با دنبال کردن آن، مفصل در جهت افزایش زاویه مفصلی حرکت داده شود. معادله های (۵-۸۰) تا (۵-۸۳)، محاسبه گشتاورهای مفصلی لازم برای اعمال هرگونه نیرو یا گشتاور به وسیله مجری نهایی روبات در حالت استاتیکی، را امکانپذیر می کنند.

#### ■ مثال ۵-۷

بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط مثال ۵-۳، به وسیله مجری نهایی خود، بردار نیروی  ${}^2F$  را اعمال می کند (نقطه اثر این نیرو را در مبدأ چهارچوب  $\{۳\}$  فرض کنید). گشتاورهای مفصلی لازم را به صورت تابعی از پیکربندی و نیروی اعمال شده، به دست آورید. شکل ۵-۱۲ را ببینید.



شکل ۵-۱۲ بازوی مکانیکی با دو رابط در حال اعمال نیرو در انتهای آزاد خود.

معادله‌های (۵-۸۰) تا (۵-۸۲) را به ترتیب از رابط آخر تا پایه روبات، به کار می‌بریم

$${}^2f_r = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۵-۸۴)$$

$${}^2n_r = l_r \hat{X}_r \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_r f_y \end{bmatrix} \quad (۵-۸۵)$$

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_r & -s_r & 0 \\ s_r & c_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r f_x - s_r f_y \\ s_r f_x + c_r f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۵-۸۶)$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_r f_y \end{bmatrix} + l_1 \hat{X}_1 \times {}^1f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_r f_x + l_1 c_r f_y + l_r f_y \end{bmatrix} \quad (۵-۸۷)$$

پس داریم

$$\tau_1 = l_1 s_r f_x + (l_r + l_1 c_r) f_y \quad (۵-۸۸)$$

$$\tau_r = l_r f_y \quad (۵-۸۹)$$

این رابطه را می‌توان به صورت عملگری ماتریسی، چنین نوشت

$$\tau = \begin{bmatrix} l_1 s_r & l_r + l_1 c_r \\ 0 & l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (۵-۹۰)$$

یکی بودن این ماتریس با ترانهادة ماتریس ژاکوبی در معادله (۵-۶۶) اتفاق نیست!

## ۵-۱۰ ژاکوبیها در حوزه نیرو

پیش از این گشتاورهای مفصلی را که نیروهای وارد بر دست را در وضعیت استاتیکی خنثی می‌کنند، به دست آوردیم. هنگامی که نیروهایی بر یک مکانیزم وارد شوند، فقط در صورتی که مکانیزم جابه‌جا شود است که می‌گوییم کار (به مفهوم فنی آن) انجام می‌شود. کار بر طبق تعریف، حاصل ضرب نیرو در فاصله اعمال نیروست و کمیتی اسکالر بایکای انرژی است. با استفاده از اصل کار مجازی، می‌توانیم به وسیله اعمال جابه‌جاییهای بینهایت کوچک، نتایج سودمندی درباره وضعیت استاتیکی بیان کنیم. چون کار همان یکای انرژی را دارد، در هر دستگاه مختصات تعمیم یافته‌ای

یکسان اندازه‌گیری خواهد شد. به‌ویژه می‌توان کار انجام شده در مختصات دکارتی را با کار انجام شده در فضای مفصلی برابر قرار داد. در حالت چند بعدی، کار عبارت است از حاصل ضرب داخلی بردار نیرو یا گشتاور در بردار جابه‌جایی، یعنی

$$\mathcal{F} \cdot \delta \mathcal{X} = \tau \cdot \delta \Theta \quad (91-5)$$

که در آن  $\mathcal{F}$  بردار  $1 \times 6$  نیرو-گشتاور دکارتی است که در مجری نهایی وارد می‌شود.  $\delta \mathcal{X}$  بردار  $1 \times 6$  جابه‌جاییهای بینهایت کوچک دکارتی در مجری نهایی،  $\tau$  بردار  $1 \times 6$  گشتاورهای مفصلی، و سرانجام  $\delta \Theta$  نیز بردار  $1 \times 6$  جابه‌جاییهای مفصلی بینهایت کوچک است. عبارت (91-5) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$\mathcal{F}^T \delta \mathcal{X} = \tau^T \delta \Theta \quad (92-5)$$

تعریف ژاکوبی عبارت است از

$$\delta \mathcal{X} = J \delta \Theta \quad (93-5)$$

پس می‌توان نوشت

$$\mathcal{F}^T J \delta \Theta = \tau^T \delta \Theta \quad (94-5)$$

که باید برای کلیه مقادیر  $\delta \Theta$  برقرار باشد. در نتیجه

$$\mathcal{F}^T J = \tau^T \quad (95-5)$$

با ترانزاده کردن هر دو طرف نتیجه می‌شود

$$\tau = J^T \mathcal{F} \quad (96-5)$$

معادله (96-5) مطلبی را که در مورد خاص روبات با دو رابط مثال 5-6 دیدیم، در حالت کلی اثبات می‌کند: ترانزاده ژاکوبی، نیروهای دکارتی وارد بر دست را بر گشتاورهای مفصلی معادل می‌نگارد. هنگامی که ژاکوبی نسبت به چهارچوب  $\{^0\}$  نوشته می‌شود، بردارهای نیروی نوشته شده در  $\{^0\}$  را می‌توان به‌صورت زیر تبدیل کرد

$$\tau = {}^0 J^T {}^0 \mathcal{F} \quad (97-5)$$

هنگامی که ژاکوبی رتبه کامل خود را از دست می‌دهد، جهت‌های معینی وجود دارند که در آنها، مجری نهایی نمی‌تواند نیروهای استاتیکی را به شیوه مورد نظر اعمال کند. به عبارت دیگر، اگر در



(۵-۹۷) ژاکوبی تکین شود،  $\mathcal{F}$  را می‌توان در جهتهایی خاص افزایش یا کاهش داد، بدون آنکه بر مقدار محاسبه شده برای  $\tau$  تأثیری گذاشته شود (جهتهایی که در فوق به آنها اشاره شد، جهتهای تعریف کننده فضای صفر ژاکوبی‌اند. به مرجع [۶] مراجعه کنید). این بدان معناست که در نزدیکی حالت‌های تکین، مزیت مکانیکی به‌سوی بینهایت میل می‌کند، به‌گونه‌ای که با اعمال گشتاورهای مفصلی کوچک، می‌توان در مجری نهایی نیروهای بزرگی ایجاد کرد.<sup>۱</sup> به این ترتیب، حالت‌های تکین علاوه بر حوزه مکان، خود را در حوزه نیرو نیز نشان می‌دهند.

توجه کنید که (۵-۹۷) رابطه‌ای بسیار جالب است، زیرا به ما اجازه می‌دهد بدون محاسبه توابع سینماتیکی وارون، یک کمیت دکارتی را به کمیتی در فضای مفصلی تبدیل کنیم. در هنگام بررسی مسئله کنترل در فصل‌های آینده، از این نکته سود خواهیم جست.

## ۵-۱۱ تبدیل دکارتی سرعتها و نیروهای استاتیکی

در برخی موارد، می‌خواهیم سرعت کلی یک جسم را به‌صورت بردار  $6 \times 1$  به شکل زیر نمایش دهیم

$$\nu = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (۵-۹۸)$$

به همین ترتیب، می‌توان بردارهای نیرو را در حالت کلی با بردار  $6 \times 1$  چنین نشان داد

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix} \quad (۵-۹۹)$$

که در آن  $F$  بردار نیرویی  $3 \times 1$  و  $N$  بردار گشتاوری  $3 \times 1$  است. پس طبیعی است که تبدیلهای کلی  $6 \times 6$  را برای نگاشت این کمیتها از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر مطرح کنیم. در واقع این کار را با در نظر گرفتن اشاعه سرعتها و نیروها از رابطی به رابط دیگر، قبلاً انجام داده‌ایم. در اینجا (۵-۴۵) و (۵-۴۷) را به‌صورت عملگری ماتریسی برای تبدیل بردارهای سرعت کلی از چهارچوب  $\{A\}$  به توصیف‌های متناظر آنها در چهارچوب  $\{B\}$  می‌نویسیم. چون چهارچوب‌های مورد بحث در اینجا به‌طور صلب به یکدیگر متصل‌اند،  $\theta_{i+1}$  که در رابطه (۵-۴۵) ظاهر می‌شود، در اینجا صفر خواهد شد

$$\begin{bmatrix} {}^B v_B \\ {}^B \omega_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B_A R & -{}^B_A R {}^A P_{BORG} \times \\ 0 & {}^B_A R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A v_A \\ {}^A \omega_A \end{bmatrix} \quad (۵-۱۰۰)$$

۱. بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با دو رابط را در نظر بگیرید که در آن بازو تقریباً به‌طور کامل کشیده شده، مجری نهایی با سطح کاری (واکنشی) در تماس است. در این وضعیت، با اعمال گشتاورهای کوچک در مفصلها، می‌توان نیروهایی به اختیار بزرگ را ایجاد کرد.

که در آن علامت ضرب خارجی، معادل با عملگر ماتریسی زیر است

$$P \times = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰۱-۵)$$

رابطه (۱۰۰-۵) سرعتهای یک چهارچوب را به سرعتها در چهارچوب دیگر مربوط می‌سازد و به همین دلیل، این عملگر  $6 \times 6$  را تبدیل کلی سرعت می‌نامیم و نماد  $T_v$  را برای آن در نظر می‌گیریم. در این مورد خاص، این عملگر یک تبدیل کلی سرعت است که سرعتهای  $\{A\}$  را به سرعتهای  $\{B\}$  نگاشت می‌کند. به همین دلیل از نمادگذاری زیر برای بیان خلاصه (۱۰۰-۵) استفاده می‌کنیم

$${}^B v_B = {}^B T_v {}^A v_A \quad (۱۰۲-۵)$$

می‌توان (۱۰۰-۵) را به منظور محاسبه سرعتهای  $\{A\}$  با داشتن سرعتهای  $\{B\}$ ، وارون کرد و نوشت

$$\begin{bmatrix} {}^A v_A \\ {}^A \omega_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & {}^A P_{BORG} \times {}^A R \\ 0 & {}^A R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B v_B \\ {}^B \omega_B \end{bmatrix} \quad (۱۰۳-۵)$$

یا

$${}^A v_A = {}^A T_v {}^B v_B \quad (۱۰۴-۵)$$

توجه کنید که نگاشت‌های سرعت از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر، به  ${}^A T$  (یا وارون آن) بستگی دارند و در نتیجه باید آنها را نتایج لحظه‌ای در نظر گرفت، مگر آنکه رابطه بین دو چهارچوب ثابت بماند. به همین ترتیب، با استفاده از (۸۰-۵) و (۸۱-۵)، می‌توان ماتریس  $6 \times 6$  را که بردارهای نیروی کلی را از چهارچوب  $\{B\}$  به  $\{A\}$  تبدیل می‌کند، چنین به دست آورد

$$\begin{bmatrix} {}^A F_A \\ {}^A N_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & 0 \\ {}^A P_{BORG} \times {}^A R & {}^A R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B F_B \\ {}^B N_B \end{bmatrix} \quad (۱۰۵-۵)$$

و یا به طور خلاصه

$${}^A \mathcal{F}_A = {}^A T_f {}^B \mathcal{F}_B \quad (۱۰۶-۵)$$

که  $T_f$  برای نشان دادن تبدیل کلی نیرو-گشتاور به کار می‌رود.

تبدیل‌های سرعت و نیرو شبیه زاکوبیها هستند، زیرا سرعتها و نیروها در چهارچوبهای مختلف را به یکدیگر مربوط می‌کنند. همانند زاکوبیها، داریم

$${}^A T_B = {}^A T_U {}^U T_B \quad (۱۰۷-۵)$$

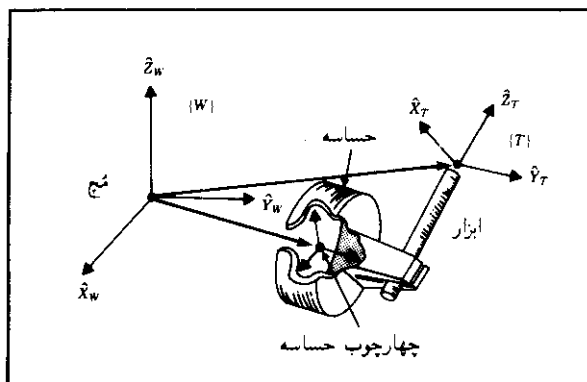
درستی رابطه فوق را می‌توان با توجه به (۱۰۵-۵) و (۱۰۳-۵) تحقیق کرد.

### ■ مثال ۸-۵

شکل ۱۳-۵، یک مجری نهایی را نشان می‌دهد که ابزاری را نگه‌داشته است. در نقطه اتصال مجری نهایی به بازو، یک میج حساس در برابر نیرو قرار داده شده است. از این وسیله برای اندازه‌گیری نیروها و گشتاورهای اعمال شده به آن، استفاده می‌شود.

خروجی این حساسه را به صورت برداری  $۱ \times ۶$  به نام  ${}^S \mathcal{F}$ ، که متشکل از سه نیرو و سه گشتاور توصیف شده در چهارچوب حساسه،  $\{S\}$ ، است در نظر بگیرید. هدف اصلی ما دانستن نیروها و گشتاورهای اعمال شده در انتهای ابزار،  ${}^T \mathcal{F}$ ، است. ماتریس تبدیل کلی  $۶ \times ۶$  را که بردار نیرو-گشتاور را از چهارچوب  $\{S\}$  به چهارچوب ابزار  $\{T\}$  منتقل می‌کند، به دست آورید. تبدیل مربوط کننده  $\{T\}$  به  $\{S\}$ ، یعنی  ${}^S T_T$ ، معلوم است. (توجه کنید که در اینجا  $\{S\}$  برخلاف معمول، چهارچوب حساسه است و نه چهارچوب ایستگاه).

این مسئله، کاربرد معادله (۱۰۶-۵) است. ابتدا وارون  ${}^S T_T$  را محاسبه می‌کنیم و آن را  ${}^T T_S$  می‌نامیم. این ماتریس وارون از  ${}^T R_S$  و  ${}^T P_{SORG}$  تشکیل می‌شود. سپس با استفاده از (۱۰۶-۵)



شکل ۱۳-۵ چهارچوبهای به کار رفته در حساسهٔ نیرو.

نتیجه می‌شود

$${}^T\mathcal{F}_T = {}^T_S T_f {}^S\mathcal{F}_S \quad (۱۰۸-۵)$$

که در آن

$${}^T_S T_f = \begin{bmatrix} {}^T_S R & 0 \\ {}^T P_{SORG} \times {}^T_S R & {}^T_S R \end{bmatrix} \quad (۱۰۹-۵)$$

■

## مراجع

- [1] K. Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, 1978.
- [2] K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, 1971.
- [3] I. Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1967.
- [4] D. Orin and W. Schrader, "Efficient Jacobian Determination for Robot Manipulators," in *Robotics Research: The First International Symposium*, M. Brady and R. P. Paul, Editors, MIT Press, 1984.
- [5] B. Gorla and M. Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.
- [6] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1969.
- [7] J.K. Salisbury and J. Craig, *Articulated Hands: Kinematic and Force Control Issues*, *International Journal of Robotics Research*, Vol.1, No. 1, Spring 1982.

## تمرینها

- ۱-۵ [۱۰] مثال ۴-۵ را برای حالتی که ژاکوبی در چهارچوب  $\{0\}$  نوشته شده است، حل کنید. آیا نتایج به دست آمده با نتایج قبلی مثال ۴-۵ برابرند؟
- ۲-۵ [۲۵] ژاکوبی بازوی مکانیکی ماهر یا سه درجه آزادی را در تمرین ۳ از فصل ۳ به دست آورید و آن را برحسب چهارچوب  $\{4\}$  که در انتهای دست واقع، و جهتگیری آن همان جهتگیری چهارچوب  $\{3\}$  است، بنویسید.

۳-۵ [۳۵] ژاکوبی بازوی مکانیکی ماهر با سه درجه آزادی را در تمرین ۳ از فصل ۳ به دست آورید و آن را برحسب چهارچوب {۴} که در انتهای دست واقع، و جهتگیری آن همان جهتگیری چهارچوب {۳} است، بنویسید. ژاکوبی را از سه روش پیدا کنید: اشاعه سرعت از پایه به انتها، اشاعه نیروی استاتیکی از انتها به پایه، و دیفرانسیلگیری مستقیم از معادله‌های سینماتیکی.

۴-۵ [۸] ثابت کنید که حالت‌های تکین در حوزه نیرو، در همان پیکربندیهای حالت‌های تکین در حوزه مکان رخ می‌دهند.

۵-۵ [۳۹] ژاکوبی پیوما ۵۶۰ را در چهارچوب {۶} محاسبه کنید.

۶-۵ [۴۷] آیا درست است که بگوییم هر مکانیزم با سه مفصل لولایی و طول رابط‌های غیرصفر، باید مکانی هندسی از نقاط تکین در داخل فضای کاری خود داشته باشد؟

۷-۵ [۷] مکانیزمی با سه درجه آزادی رسم کنید که ژاکوبی سرعت خطی آن، در کلیه پیکربندیهای بازو، برابر با ماتریس همانی  $3 \times 3$  باشد. سینماتیک مسئله را در یک یا دو جمله شرح دهید.

۸-۵ [۱۸] مکانیزمها در حالت کلی ممکن است در پیکربندی‌هایی خاص به نام «نقاط یکروند» قرار گیرند که در آنها ستون‌های ژاکوبی متعامد، و مقدار آنها مساوی می‌شود [۷]. در بازوی با دو رابط مثال ۳-۵، وجود نقاط یکروند را تحقیق کنید. راهنمایی: آیا برای  $l_1$  و  $l_2$  شرطی وجود دارد؟

۹-۵ [۵۰] شرایط لازم برای وجود نقاط یکروند را در بازوی مکانیکی ماهر با شش درجه آزادی، در حالت کلی به دست آورید (تمرین ۸-۵ را ببینید).

۱۰-۵ [۷] برای بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط مثال ۳-۵، تبدیلی کلی را مشخص کنید که گشتاورهای مفصلی را بر یک بردار نیروی  $1 \times 2$  در دست روبات، به نام بردار  ${}^2F$ ، بنگارد.

۱۱-۵ [۱۴] می‌دانیم

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.1866 & -0.500 & 0.1000 & 1.070 \\ 0.1500 & 0.1866 & 0.1000 & 0.1 \\ 0.1000 & 0.1000 & 1.0000 & 0.570 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر بردار سرعت خطی در مبدأ  $\{A\}$  چنین نوشته شود

$$A_v = \begin{bmatrix} 0/0 \\ 2/0 \\ -3/0 \\ 1/414 \\ 1/414 \\ 0/0 \end{bmatrix}$$

بردار سرعت  $1 \times 6$  را که نقطه مرجع آن بر مبدأ  $\{B\}$  منطبق است، پیدا کنید.

۱۲-۵ [۱۵] برای بازوی مکانیکی ماهر تمرین ۳-۳، مجموعه‌ای از زوایای مفصلی به دست آورید که به‌ازای آنها بازو در حالت تکین در مرز فضای کاری قرار گیرد. مجموعه زوایای دیگری نیز برای حالت تکین در داخل فضای کاری پیدا کنید.

۱۳-۵ [۹] ژاکوبی یک بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط، چنین است

$${}^0J(\Theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

با صرف نظر کردن از نیروی گرانی زمین، گشتاورهای مفصلی لازم را برای اینکه بازو بتواند بردار نیروی استاتیکی  ${}^0F = 10\hat{X}$  را وارد کند، به دست آورید.

۱۴-۵ [۱۸] اگر پارامتر رابط  $a_2$  در پیما  $56^\circ$  صفر شود، در  $\theta_2 = -90/0^\circ$  حالت تکین از نوع مرز فضای کاری رخ خواهد داد. عبارتی کلی برای مقدار  $\theta_2$  که به‌ازای آن حالت تکین روی می‌دهد، به دست آورید، و نشان دهید این عبارت در هنگام صفر شدن مقدار  $a_2$  اندازه  $\theta_2$  را برابر با  $-90/0^\circ$  محاسبه می‌کند. راهنمایی: در این پیکربندی، از محورهای مفصلی ۲، ۳، و نقطه تقارب محورهای ۴، ۵، و ۶ می‌توان یک خط راست گذراند.

۱۵-۵ [۲۴] برای بازوی مکانیکی ماهر مثال ۳-۴ از فصل ۳، ژاکوبی  $3 \times 3$  را که سرعت خطی انتهای ابزار را با داشتن آهنگ تغییر زوایای مفصلی محاسبه می‌کند، به دست آورید. ژاکوبی را در چهارچوب  $\{0\}$  بنویسید.

۱۶-۵ [۲۰] یک بازوی مکانیکی ماهر  ${}^3R$ ، معادله‌های سینماتیکی دقیقاً متناظر با مجموعه زوایای اویلر Z-Y-Z دارد (یعنی معادله‌های سینماتیکی مستقیم آن با رابطه (۲-۷۲) به‌ازای  $\theta_1 = \alpha$ ،  $\theta_2 = \beta$ ، و  $\theta_3 = \gamma$  داده شده است). ژاکوبی مربوط کننده سرعت‌های مفصلی و سرعت زاویه‌ای رابط آخر را به دست آورید.

۱۷-۵ [۳۱] تجسم کنید که در حالت کلی، برای روباتی با شش درجه آزادی،  $\hat{Z}_i$  و  ${}^0P_{iorg}$  به‌ازای کلیه مقادیر  $i$  وجود دارند. به عبارت دیگر، مقادیر بردارهای یک  $Z$  از هر چهارچوب

رابط را برحسب چهارچوب پایه، و همچنین مکان نقاط مبدأ کلیه چهارچوبهای رابط را برحسب چهارچوب پایه، در دست داریم. می‌خواهیم سرعت را در نقطه قرارگیری ابزار (که نسبت به رابط  $n$  ثابت است) به دست آوریم، و  $P_{tool}$  را نیز می‌دانیم. پس برای هر مفصل لولایی، سرعت انتهای ابزار، ناشی از سرعت مفصل  $i$ ، چنین خواهد بود

$$\dot{v}_i = \dot{\theta}_i \cdot \hat{Z}_i \times (\dot{P}_{tool} - \dot{P}_{iorg}) \quad (۱۱۰-۵)$$

و سرعت زاویه‌ای رابط  $n$ ، ناشی از سرعت این مفصل، چنین است

$$\dot{\omega}_i = \dot{\theta}_i \cdot \hat{Z}_i \quad (۱۱۱-۵)$$

سرعت کل خطی و زاویه‌ای ابزار، با جمع کردن  $\dot{v}_i$  و  $\dot{\omega}_i$  به دست می‌آید. معادله‌هایی مانند (۱۱۰-۵) و (۱۱۱-۵) را برای حالتی که مفصل  $i$  کشویی است، پیدا کنید و ماتریس ژاکوبی  $6 \times 6$  را برای بازوی ماهری با شش درجه آزادی دلخواه، برحسب  $\hat{Z}_i$ ،  $P_{iorg}$  و  $P_{tool}$  بنویسید.

[۱۸] معادله‌های سینماتیکی روباتی  $3R$  به صورت زیر داده شده است

(۱۸-۵)

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$J(\Theta)$  را طوری به دست آورید که پس از آنکه در بردار سرعت مفصلی ضرب شد، سرعت خطی مبدأ چهارچوب  $\{3\}$  را نسبت به چهارچوب  $\{0\}$  به دست دهد.

[۱۵] مکان مبدأ رابط ۲ در یک بازوی مکانیکی ماهر  $RP$  چنین داده شده است

(۱۹-۵)

$${}^0P_{TORG} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 - d_2 s_1 \\ a_1 s_1 + d_2 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ژاکوبی  $2 \times 2$  را طوری به دست آورید که دو سرعت مفصلی را به سرعت خطی مبدأ چهارچوب  $\{2\}$  مربوط کند. مقداری از  $\Theta$  را که به‌ازای آن بازو در حالت تکیه قرار می‌گیرد، تعیین کنید.

(۲۰-۵)

[۲۰] توضیح دهید منظور از جمله زیر چیست: «هر بازوی مکانیکی ماهر با  $n$  درجه آزادی قرار گرفته در نقطه‌ای تکیه را می‌توان مانند بازویی زاید در فضای  $n-1$  بعدی در نظر گرفت.»

## تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۵)

۱. دو چهارچوب  $\{A\}$  و  $\{B\}$  را در نظر بگیرید که نسبت به یکدیگر حرکتی ندارند، یعنی  ${}^A_B T$  ثابت است. در این حالت خاص، سرعت چهارچوب  $\{A\}$  را چنین تعریف می‌کنیم

$${}^A \nu_A = \begin{bmatrix} {}^A \dot{x}_A \\ {}^A \dot{y}_A \\ {}^A \dot{\theta}_A \end{bmatrix}$$

زیر برنامه‌ای بنویسید که با داشتن  ${}^A \nu_A$  و بردار  ${}^B \nu_B$  را پیدا کند. راهنمایی: این حالت، صورت صفحه‌ای معادله (۵-۱۰۰) است. برنامه خود را چنین آغاز کنید:

Procedure Veltrans (VAR brela: frame; VAR vrela, vrelb: vec3);

که در آن “vrela” سرعت نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  (همان  ${}^A \nu_A$ ) و “vrelb” خروجی زیر برنامه (سرعت نسبت به چهارچوب  $\{B\}$  یا  ${}^B \nu_B$ ) است.

۲. ژاکوبی  $3 \times 3$  را برای بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با سه رابط (در مثال ۳-۳)، به دست آورید. برای این کار، باید از تحلیل اشاعه سرعت (مانند مثال ۵-۲)، یا تحلیل نیروی استاتیکی (مانند مثال ۵-۶)، استفاده کنید. عملیات انجام شده برای رسیدن به ژاکوبی را به‌طور کامل بنویسید.

زیر برنامه‌ای برای محاسبه ژاکوبی در چهارچوب  $\{3\}$ ، که  $J(\Theta)$  نامیده می‌شود، به صورت تابعی از زوایای مفصلی بنویسید. توجه کنید که چهارچوب  $\{3\}$  چهارچوب رابط استاندارد است که مبدأ آن بر محور مفصل ۳ قرار دارد. زیر برنامه را چنین آغاز کنید:

Procedure Jacobian (VAR theta: vec3; Var Jac: mat33);

داده‌های بازو عبارت‌اند از  $l_1 = l_2 = 0.5$  (برحسب متر).

۳. استفاده کننده‌ای چهارچوب ابزار و چهارچوب ایستگاه را برای انجام کاری خاص، به صورت زیر تعریف می‌کند (یکاهای متر و درجه‌اند)

$${}^W_T T = [x \ y \ \theta] = [0.1 \ 0.2 \ 30.0]$$

$${}^B_S T = [x \ y \ \theta] = [0.0 \ 0.0 \ 0.0]$$

در لحظه‌ای خاص، انتهای ابزار در مکان زیر قرار دارد

$${}^S_T T = [x \ y \ \theta] = [0.6 \ -0.3 \ 45.0]$$



تمرینها ۲۰۷

در همان لحظه، آهنگ تغییر زوایای مفصلی (برحسب deg/sec) چنین اندازه‌گیری می‌شود

$$\dot{\Theta} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3] = [20/^\circ \quad -10/^\circ \quad 12/^\circ]$$

سرعت خطی و زاویه‌ای انتهای ابزار،  ${}^T\nu_T$ ، را نسبت به چهارچوب خودش محاسبه کنید. در صورت وجود بیش از یک جواب، کلیه جوابهای ممکن را به‌دست آورید.





## دینامیک بازوهای مکانیکی ماهر

### ۱-۶ مقدمه

تاکنون مطالعه بازوهای مکانیکی ماهر را صرفاً بر اساس ملاحظات سینماتیکی انجام داده‌ایم. مکانهای استاتیکی، نیروهای استاتیکی، و سرعتها را بررسی کرده‌ایم؛ اما هرگز نیروهای لازم برای ایجاد حرکت را در نظر نگرفته‌ایم. در این فصل، معادله‌های حرکت یک بازوی مکانیکی ماهر را بررسی می‌کنیم. این معادله‌ها، چگونگی ایجاد حرکت در روبات را به وسیله گشتاورهای اعمال شده توسط کاراندازها، یا اعمال نیروهای خارجی بر روبات نشان می‌دهد.

در باره دینامیک مکانیزمها، کتابهای زیادی نوشته شده است و به راسی مطالعه این رشته به سالها وقت نیاز دارد. روشن است که در اینجا نمی‌توانیم این زمینه را به طور کامل، آنچنان که شایسته آن است، بررسی کنیم. اما برخی روشهای به دست آمده در دینامیک، کاربردی بسیار مناسب در روباتیک دارند، به ویژه روشهایی که در آنها به ماهیت زنجیری بازوهای مکانیکی ماهر توجه شده است. طبیعتاً ما در این فصل این روشها را مطالعه می‌کنیم.

می‌خواهیم دو مسئله را در ارتباط با دینامیک بازوهای مکانیکی ماهر حل کنیم. در مسئله اول، با داشتن مشخصات  $\Theta$ ،  $\dot{\Theta}$ ، و  $\ddot{\Theta}$  مربوط به یک نقطه از مسیر، می‌خواهیم بردار گشتاورهای مفصلی  $T$  را به دست آوریم. رابطه‌های دینامیکی به کار رفته برای حل این مسئله، در کنترل بازوهای مکانیکی ماهر (فصل ۱۰) سودمند خواهند بود. در مسئله دوم، چگونگی حرکت مکانیزم روبات در نتیجه اعمال مجموعه‌ای از گشتاورهای مفصلی، محاسبه خواهد شد. به عبارت دیگر، با داشتن بردار گشتاور  $T$ ، مقادیر  $\Theta$ ،  $\dot{\Theta}$ ، و  $\ddot{\Theta}$  محاسبه می‌شوند. حل این مسئله، برای شبیه‌سازی روبات سودمند است.

## ۲-۶ شتاب جسم صلب

در اینجا با تعمیم تحلیل‌های خود از جسم صلب، شتاب آن را مطالعه می‌کنیم. در هر لحظه، بردارهای سرعت خطی و زاویه‌ای مشتق‌هایی دارند که به ترتیب شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر دو رابطه زیر را داریم

$${}^B\dot{V}_Q = \frac{d}{dt} {}^B V_Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B V_Q(t + \Delta t) - {}^B V_Q(t)}{\Delta t} \quad (۱-۶)$$

و

$${}^A\dot{\Omega}_B = \frac{d}{dt} {}^A \Omega_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A \Omega_B(t + \Delta t) - {}^A \Omega_B(t)}{\Delta t} \quad (۲-۶)$$

مانند آنچه در مورد سرعتها دیدیم، در اینجا نیز هنگامی که چهارچوب مرجع در مشتق‌گیری، چهارچوب مرجع عام  $\{U\}$  باشد، نمادگذاری زیر را به کار خواهیم برد

$$\dot{v}_A = {}^U\dot{V}_{AORG} \quad (۳-۶)$$

و

$$\dot{\omega}_A = {}^U\dot{\Omega}_A \quad (۴-۶)$$

## شتاب خطی

ابتدا نتیجه‌ای مهم از فصل ۵، یعنی معادله (۵-۱۲) را، که سرعت بردار  ${}^B Q$  را از دید ناظری در چهارچوب  $\{A\}$  (برای حالتی که دو مبدأ مختصات بر یکدیگر منطبق‌اند) بیان می‌کند، مجدداً مورد توجه قرار می‌دهیم

$${}^A V_Q = {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q \quad (۵-۶)$$

طرف چپ این معادله، چگونگی تغییر  ${}^A Q$  را با گذشت زمان بیان می‌کند. چون مبدأ چهارچوبها برهم منطبق است، می‌توان (۵-۶) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dt} ({}^A_B R {}^B Q) = {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q \quad (۶-۶)$$

این صورت از معادله در هنگام به دست آوردن معادله شتاب متناظر با آن، سودمند خواهد بود. با مشتق‌گیری از معادله (۵-۶)، رابطه زیر برای شتاب  ${}^B Q$  از دید ناظر  $\{A\}$ ، زمانی که مبدأهای

$\{A\}$  و  $\{B\}$  برهم منطبق اند، به دست خواهد آمد

$${}^A\dot{V}_Q = \frac{d}{dt}({}^A_B R {}^B V_Q) + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_B R {}^B Q + {}^A\Omega_B \times \frac{d}{dt}({}^A_B R {}^B Q) \quad (۷-۶)$$

حال رابطه (۶-۶) را دوبار، یکبار برای جمله اول و یکبار برای جمله آخر، به کار می بریم. پس طرف راست معادله (۷-۶) چنین نوشته می شود

$$\begin{aligned} & {}^A_B R {}^B \dot{V}_Q + {}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_B R {}^B Q \\ & + {}^A\Omega_B \times ({}^A_B R {}^B V_Q + {}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q) \end{aligned} \quad (۸-۶)$$

از ترکیب دو جمله، نتیجه می شود

$${}^A_B R {}^B \dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_B R {}^B Q + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q) \quad (۹-۶)$$

سرانجام، برای تعمیم روابط فوق به حالتی که در آن دو مبدأ بر یکدیگر منطبق نیستند، جمله ای را که نشان دهنده شتاب خطی مبدأ چهارچوب  $\{B\}$  است، به معادله (۹-۶) اضافه می کنیم. پس معادله در حالت کلی چنین به دست می آید

$$\begin{aligned} & {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A_B R {}^B \dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B V_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_B R {}^B Q \\ & + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q) \end{aligned} \quad (۱۰-۶)$$

حالتی خاص و قابل ذکر از معادله (۱۰-۶)، هنگامی رخ می دهد که  ${}^B Q$  ثابت باشد، یا

$${}^B V_Q = {}^B \dot{V}_Q = 0 \quad (۱۱-۶)$$

در این صورت (۱۰-۶) چنین ساده می شود

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B Q) + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_B R {}^B Q \quad (۱۲-۶)$$

این نتیجه را در محاسبه شتاب خطی رابطهای بازوی مکانیکی ماهر با مفصلهای لولایی به کار خواهیم برد. برای حالتی که یک مفصل کشویی موجود است، باید از صورت کلی معادله (۱۰-۶) استفاده شود.

### شتاب زاویه ای

حالتی را در نظر بگیرید که در آن  $\{B\}$  نسبت به  $\{A\}$  با سرعت  ${}^A\Omega_B$  و  $\{C\}$  نسبت به  $\{B\}$  با سرعت  ${}^B\Omega_C$  دوران می کند. برای محاسبه  ${}^A\Omega_C$ ، بردارها را در چهارچوب  $\{A\}$  با هم جمع

می‌کنیم

$${}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A_B R {}^B\Omega_C \quad (۱۳-۶)$$

پس از مشتقگیری، نتیجه می‌شود

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + \frac{d}{dt}({}^A_B R {}^B\Omega_C) \quad (۱۴-۶)$$

حال معادله (۶-۶) را در مورد آخرین جمله رابطه (۱۴-۶) به‌کار می‌بریم

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A_B R {}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_B R {}^B\Omega_C \quad (۱۵-۶)$$

از این نتیجه، برای محاسبه شتاب زاویه‌ای رابطهای بازوی مکانیکی ماهر استفاده خواهیم کرد.

### ۳-۶ توزیع جرم

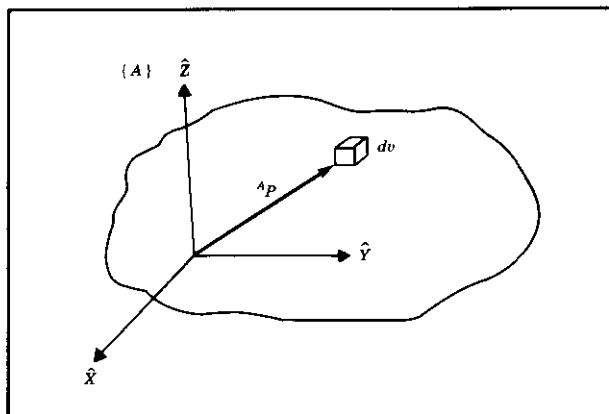
در سیستمهای با یک درجه آزادی، غالباً درباره جرم جسم صلب بحث می‌شود. در حرکت دورانی حول محوری ثابت نیز مفهوم لنگر لختی برابمان آشناست. در حالتی که جسم صلب آزادانه در سه بعد حرکت می‌کند، تعداد محورهای دوران ممکن، بینهایت است. در مورد دوران حول محوری دلخواه، باید چگونگی توزیع جرم در جسم صلب را کاملاً مشخص کنیم. در اینجا تانسور لختی را، که می‌توان آن را تعمیم لنگر لختی اسکالری یک جسم در نظر گرفت، معرفی می‌کنیم.

حال مجموعه‌ای از کمیتها را که درباره توزیع جرم جسم صلب نسبت به چهارچوب مرجع، اطلاعاتی به‌دست می‌دهند، تعریف می‌کنیم. شکل ۱-۶ جسمی صلب را نشان می‌دهد که به آن چهارچوبی متصل است. اگرچه تانسورهای لختی را می‌توان نسبت به هر چهارچوب دلخواه تعریف کرد، اما در اینجا همواره تانسوری را که نسبت به چهارچوب متصل به جسم صلب تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. در صورت لزوم، چهارچوب مرجع هر تانسور لختی مفروض را با یک پیش‌زبرنویس نشان می‌دهیم. تانسور لختی نسبت به چهارچوب  $\{A\}$  را به‌صورت ماتریسی  $3 \times 3$  چنین نمایش می‌دهیم

$${}^A I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (۱۶-۶)$$

که در آن عنصرهای اسکالر عبارت‌اند از

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dv$$



شکل ۶-۱ تانسور لختی هر جسم، چگونگی توزیع جرم را در آن نشان می‌دهد. در اینجا بردار  $A P$  مکان جزء دیفرانسیلی حجم،  $dv$ ، را مشخص می‌کند.

$$\begin{aligned}
 I_{yy} &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dv \\
 I_{zz} &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv \\
 I_{xy} &= \iiint_V xy \rho dv \\
 I_{xz} &= \iiint_V xz \rho dv \\
 I_{yz} &= \iiint_V yz \rho dv
 \end{aligned} \tag{۱۷-۶}$$

در روابط (۱۷-۶)، جسم صلب از جزءهای دیفرانسیلی حجم،  $dv$ ، که چگالی ماده آنها  $\rho$  است، تشکیل می‌شود. مکان هر جزء حجم با بردار  $A P = [x \ y \ z]^T$ ، به صورت نشان داده شده در شکل ۶-۱، تعیین می‌شود.

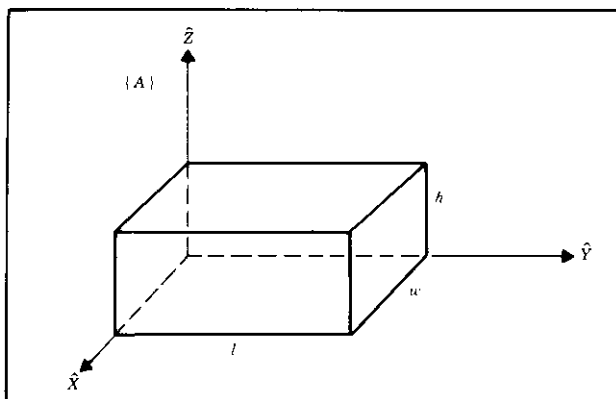
عنصرهای  $I_{xx}$ ،  $I_{yy}$  و  $I_{zz}$  را لنگرهای لختی جرم می‌نامند. توجه کنید که ما در هر یک از این سه حالت، انتگرال حاصل ضرب جزء جرم  $\rho dv$  را در مربع فاصله قائم آن از محور موردنظر، محاسبه کرده‌ایم. عنصرهای دارای زیرنویسهای ناهمگون را حاصلضربهای لختی جرم می‌نامند. این مجموعه شش عضوی از کمیت‌های مستقل، برای هر جسم صلب، به مکان و جهتگیری چهارچوبی که جسم نسبت به آن تعریف شده است، بستگی دارد. اگر در انتخاب جهتگیری چهارچوب مرجع آزاد باشیم، می‌توان طوری عمل کرد که حاصلضربهای لختی صفر

شوند. محورهایی از چهارچوب مرجع را که در آنها حاصلضربهای لختی صفر می‌شوند، محورهای اصلی و لنگرهای جرم متناظر با آنها را لنگرهای لختی اصلی می‌نامند.

■ مثال ۶-۱

تانسور لختی جسم مستطیل شکل نشان داده شده در شکل ۶-۲ را که چگالی آن یکنواخت و برابر با  $\rho$  است، نسبت به دستگاه مختصات مشخص شده در شکل، به دست آورید. ابتدا  $I_{xx}$  را محاسبه می‌کنیم. با به کار بردن جزء حجم  $dv = dx \, dy \, dz$ ، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_0^h \int_0^l (y^2 + z^2) w \rho \, dy \, dz \\
 &= \int_0^h \left( \frac{l^3}{3} + z^2 l \right) w \rho \, dz \quad (۶-۱۸) \\
 &= \left( \frac{hl^3 w}{3} + \frac{h^3 l w}{3} \right) \rho \\
 &= \frac{m}{3} (l^2 + h^2)
 \end{aligned}$$



شکل ۶-۲ جسمی با چگالی یکنواخت.



که در آن  $m$  جرم کل جسم است.  $I_{yy}$  و  $I_{zz}$  را می‌توان بدون محاسبه و تنها با جایگشت جمله‌ها، چنین به‌دست آورد

$$I_{yy} = \frac{m}{12}(w^2 + h^2) \quad (۱۹-۶)$$

$$I_{zz} = \frac{m}{12}(l^2 + w^2) \quad (۲۰-۶)$$

حال  $I_{xy}$  را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy \rho dx dy dz \\ &= \int_0^h \int_0^l \frac{w^2}{12} y \rho dy dz \\ &= \int_0^h \frac{w^2 l^2}{12} \rho dz \\ &= \frac{m}{12} wl \end{aligned} \quad (۲۱-۶)$$

با جایگشت جمله‌ها نتیجه می‌شود

$$I_{xz} = \frac{m}{12} hw \quad (۲۲-۶)$$

و

$$I_{yz} = \frac{m}{12} hl \quad (۲۳-۶)$$

پس تانسور لختی این جسم چنین است

$${}^A I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(l^2 + h^2) & -\frac{m}{12}wl & -\frac{m}{12}hw \\ -\frac{m}{12}wl & \frac{m}{12}(w^2 + h^2) & -\frac{m}{12}hl \\ -\frac{m}{12}hw & -\frac{m}{12}hl & \frac{m}{12}(l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (۲۴-۶)$$

چنانکه گفته شد، تانسور لختی تابعی از مکان و جهتگیری چهارچوب مرجع است. قضیهٔ محوره‌های موازی، یکی از راه‌های شناخته شده برای محاسبهٔ میزان تغییر تانسور لختی بر اثر انتقال یک دستگاه مختصات مرجع است. قضیهٔ محوره‌های موازی، تانسور لختی توصیف شده در چهارچوب مرجعی که مبدأ آن بر مرکز جرم جسم قرار دارد، را با تانسور لختی توصیف شده در چهارچوب مرجعی دیگر، مربوط می‌سازد. اگر چهارچوب  $\{C\}$  در مرکز جرم جسم و  $\{A\}$

پهناچوبی دلخواه و انتقال یافته باشد، این قضیه را می‌توان چنین بیان کرد [۱]

$$\begin{aligned} {}^A I_{zz} &= {}^C I_{zz} + m(x_c^2 + y_c^2) \\ {}^A I_{xy} &= {}^C I_{xy} - m x_c y_c \end{aligned} \quad (۲۵-۶)$$

که در آن  $P_c = [x_c, y_c, z_c]^T$  مکان مرکز جرم را نسبت به پهناچوب  $\{A\}$  بیان می‌کند. سایر لنگرها و حاصلضربهای لختی را می‌توان با جایگشت  $x, y, z$  در رابطه (۲۵-۶) محاسبه کرد. قضیه را به صورت برداری-ماتریسی می‌توان چنین نوشت

$${}^A I = {}^C I + m[P_c^T P_c I_T - P_c P_c^T] \quad (۲۶-۶)$$

که در آن  $I_T$  ماتریس همانی  $3 \times 3$  است.

#### ■ مثال ۲-۶

تانسور لختی را برای جسم صلب نشان داده شده در شکل ۲-۶، این بار نسبت به دستگاه مختصاتی که مبدأ آن روی مرکز جرم جسم قرار دارد، به دست آورید. از قضیه محوره‌های موازی (معادله (۲۵-۶)) استفاده می‌کنیم که در آن

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} w \\ l \\ h \end{bmatrix}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} {}^C I_{zz} &= \frac{m}{\sqrt{3}}(w^2 + l^2) \\ {}^C I_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (۲۷-۶)$$

عضوهای دیگر ماتریس، با توجه به تقارن مسئله، محاسبه می‌شوند و تانسور لختی نسبت به پهناچوب واقع در مرکز جرم چنین به دست می‌آید

$${}^C I = \begin{bmatrix} \frac{m}{\sqrt{3}}(h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{\sqrt{3}}(w^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{\sqrt{3}}(l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (۲۸-۶)$$

چون این ماتریس قطری است، محوره‌های پهناچوب  $\{C\}$ ، محوره‌های اصلی این جسم صلب‌اند. ■

در زیر، برخی از ویژگیهای دیگر مربوط به تانسورهای لختی، بیان شده است:

۱. اگر دو محور از چهارچوب مرجع، تشکیل یک صفحه تقارن برای توزیع جرم در جسم بدهند، آن‌گاه حاصلضربهای لختی که یک زیرنویس آنها مختصی عمود بر صفحه تقارن است، صفر خواهند بود.

۲. لنگرهای لختی همواره مثبت‌اند، اما حاصلضربهای لختی ممکن است مثبت یا منفی باشند.

۳. مجموع سه لنگر لختی همواره ثابت است و به جهتگیری چهارچوب مرجع بستگی ندارد.

۴. مقادیر ویژه تانسور لختی هر جسم، لنگرهای لختی اصلی آن جسم‌اند. بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر نیز محورهای اصلی جسم‌اند.

بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر رابطهای با هندسه و ترکیبی نسبتاً پیچیده دارند و به همین دلیل، کاربرد رابطه (۶-۱۷) برای آنها، در عمل دشوار است. عملاً به جای محاسبه لنگرهای لختی، می‌توان آنها را با استفاده از یک وسیله اندازه‌گیری (مثلاً آونگ لختی)، برای هر رابط، اندازه‌گیری کرد.

## ۴-۶ معادله نیوتن-معادله اوایلر

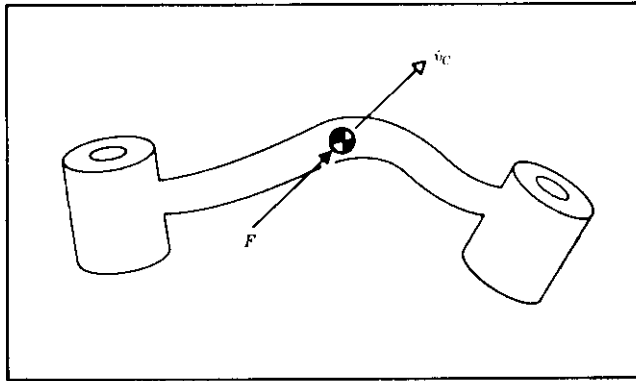
هر رابط از بازوی مکانیکی ماهر را جسمی صلب در نظر خواهیم گرفت. اگر مکان مرکز جرم و تانسور لختی رابط معلوم باشد، آن‌گاه چگونگی توزیع جرم در آن کاملاً مشخص می‌شود. برای حرکت دادن رابطها، باید به آنها شتاب (افزاینده یا کاهنده) بدهیم. نیروهای لازم برای چنین حرکتی، تابعی از شتاب مورد نظر، و توزیع جرم در رابطهایند. معادله نیوتن همراه با همتای دورانی آن معادله اوایلر، رابطه بین نیروها، لنگرهای لختی، و شتابها را در یک جسم صلب، بیان می‌کنند.

### معادله نیوتن

در شکل ۳-۶ جسمی صلب که مرکز جرم آن با شتاب افزایشده  $\dot{v}_C$  در حرکت است، نشان داده شده است. در چنین حالتی، نیروی  $F$ ، که به مرکز جرم جسم وارد می‌شود، از معادله نیوتن به دست می‌آید

$$F = m\dot{v}_C \quad (۲۹-۶)$$

که در آن  $m$  جرم کل جسم است.



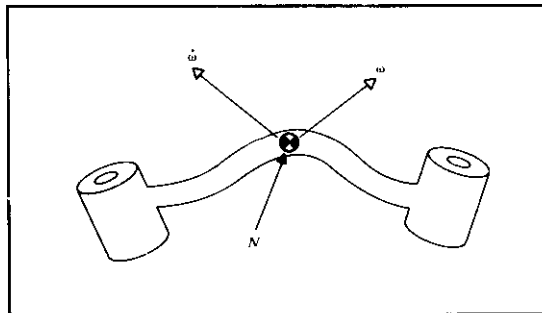
شکل ۳-۶ نیروی  $F$  وارد شده به مرکز جرم یک جسم، به جسم شتاب  $\dot{v}_C$  می‌دهد.

### معادلهٔ اوایلر

در شکل ۴-۶، جسمی صلب که با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  و شتاب زاویه‌ای  $\dot{\omega}$  دوران می‌کند، نشان داده شده است. در این حالت، گشتاور  $N$  که باید بر جسم وارد شود تا چنین حرکتی را ایجاد کند، از معادلهٔ اوایلر به دست می‌آید

$$N = {}^C I \dot{\omega} + \omega \times {}^C I \omega \quad (۳۰-۶)$$

که در آن  ${}^C I$  تانسور لختی جسم نسبت به چهارچوب  $\{C\}$  است، که مبدأ آن بر مرکز جرم جسم قرار دارد.



شکل ۴-۶ گشتاور  $N$  بر جسم صلب وارد می‌شود و جسم با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  و شتاب زاویه‌ای  $\dot{\omega}$  دوران می‌کند.

## ۵-۶ محاسبات دینامیکی تکراری نیوتن - اوایلر

در این بخش، محاسبه گشتاورهای متناظر با مسیری مفروض برای بازوی مکانیکی ماهر را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم مکان، سرعت، و شتاب مفصلها  $(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta})$  را می‌دانیم. با این دانسته‌ها و با داشتن اطلاعات سینماتیکی و توزیع جرم در روبات، می‌توانیم گشتاورهای مفصلی لازم برای ایجاد این حرکت را محاسبه کنیم. الگوریتم ارائه شده در اینجا، مبتنی بر روشی است که لوه<sup>۱</sup>، واکر<sup>۲</sup>، و پال<sup>۳</sup> در مرجع [۲] ارائه کرده‌اند.

### محاسبات تکراری بیرونی برای یافتن سرعتها و شتابها

به منظور محاسبه نیروهای لختی وارد بر رابطها، باید در هر لحظه سرعت دورانی، و شتاب خطی و دورانی مرکز جرم هر رابط بازوی مکانیکی را به دست آورد. این محاسبات، ماهیتی تکراری دارد و از رابط ۱ آغاز، و به ترتیب از رابطی به رابط دیگر، «به طرف بیرون» ادامه می‌یابد و به رابط  $n$  منتهی می‌شود.

«اشاعه» سرعت دورانی از رابطی به رابط دیگر که در فصل ۵ بررسی شد، برای مفصل لولایی  $i + 1$ ، چنین است

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \ {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (31-6)$$

با استفاده از رابطه (۶-۱۵)، معادله تبدیل شتاب زاویه‌ای از رابطی به رابط دیگر را چنین به دست می‌آوریم

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R \ {}^i\dot{\omega}_i + {}^{i+1}R \ {}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \ {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (32-6)$$

اگر مفصل  $i + 1$  کشویی باشد، این معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R \ {}^i\dot{\omega}_i \quad (33-6)$$

شتاب خطی مبدأ هر چهارچوب رابط، با کاربرد رابطه (۶-۱۲) چنین به دست می‌آید

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R [{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i] \quad (34-6)$$

که چنانچه مفصل  $i + 1$  کشویی باشد، این رابطه (با استفاده از معادله (۶-۱۰)) به صورت زیر

درمی آید

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \left( {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i \right) + {}^{2i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}\hat{d}_{i+1} + {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}\hat{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (۳۵-۶)$$

همچنین، به شتاب خطی مرکز جرم هر رابط نیز نیاز داریم که با استفاده از رابطه (۱۲-۶) چنین به دست می آید

$${}^i\dot{v}_{C_i} = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{C_i} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{C_i}) + {}^i\dot{v}_i \quad (۳۶-۶)$$

در این رابطه، چهارچوب  $\{C_i\}$  متصل به هر رابط فرض می شود و مبدأ آن بر مرکز جرم رابط منطبق است. جهتگیری این چهارچوب با جهتگیری چهارچوب رابط  $\{i\}$  یکسان است. معادله (۳۶-۶) به هیچ وجه با حرکت مفصلها ارتباطی ندارد و در نتیجه برای هر دو حالت لولایی یا کشویی بودن مفصل ۱ +  $i$ ، برقرار است.

توجه کنید که کاربرد این معادله ها برای رابط ۱ بسیار ساده است، زیرا داریم  ${}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0$ .

### نیرو و گشتاور وارد بر یک رابط

پس از محاسبه شتابهای خطی و زاویه ای مرکز جرم هر رابط، که در بخش قبل انجام شد، با استفاده از معادله های نیوتن-اولر (بخش ۴-۶) می توانیم نیرو و گشتاور لختی وارد بر مرکز جرم هر رابط را محاسبه کنیم. پس داریم

$$F_i = m\dot{v}_{C_i}$$

$$N_i = {}^{C_i}I\dot{\omega}_i + \omega_i \times {}^{C_i}I\omega_i \quad (۳۷-۶)$$

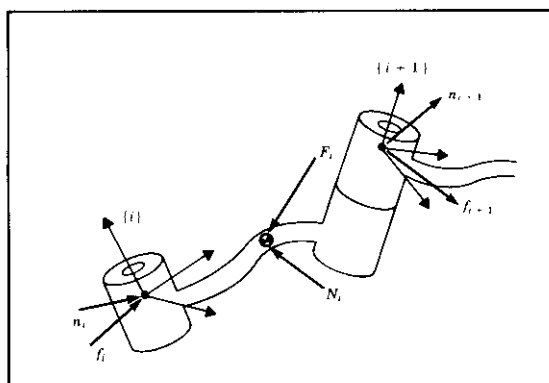
که در آن مبدأ  $\{C_i\}$  بر مرکز جرم رابط منطبق است و جهتگیری آن با جهتگیری چهارچوب رابط  $\{i\}$  یکسان است.

### محاسبات تکراری درونی برای یافتن نیروها و گشتاورها

پس از آنکه نیروها و گشتاورهای اعمال شده به هر رابط را محاسبه کردیم، باید گشتاورهای مفصلی را که باعث اعمال آنها به هر رابط شده اند، نیز به دست آوریم.

این کار را می توان با نوشتن معادله تعادل نیروها و گشتاورها با توجه به نمودار پیکر آزاد هر رابط (شکل ۵-۶ را ببینید) انجام داد. به هر رابط نیروها و گشتاورهایی از رابطهای مجاور آن، همراه با یک نیرو و گشتاور لختی، وارد می شود. در فصل ۵، برای نمایش نیرو و گشتاور وارد از سوی رابط مجاور، نمادهای ویژه زیر را در نظر گرفتیم:

$f_i$  = نیرویی که رابط ۱ -  $i$  بر رابط  $i$  وارد می کند.



شکل ۵-۶ تعادل نیروها، از جمله نیروهای لختی، برای یک رابط از بازوی مکانیکی ماهر.

$n_i$  = گشتاوری که رابط  $i - 1$  بر رابط  $i$  وارد می‌کند.

با جمع کردن نیروهای وارد بر رابط  $i$ ، به رابطه تعادل نیروی زیر می‌رسیم

$${}^i F_i = {}^i f_i - {}^{i+1}_i R {}^{i+1} f_{i+1} \quad (38-6)$$

با جمع کردن گشتاورهای وارد حول مرکز جرم و مساوی با صفر قرار دادن آنها، نیز معادله تعادل گشتاور زیر به دست می‌آید

$${}^i N_i = {}^i n_i - {}^i n_{i+1} + (-{}^i P_{C_i}) \times {}^i f_i - ({}^i P_{i+1} - {}^i P_{C_i}) \times {}^i f_{i+1} \quad (39-6)$$

با استفاده از نتیجه حاصل از رابطه (۳۸-۶) و اضافه کردن چند ماتریس دوران، می‌توان (۳۹-۶) را به صورت زیر نوشت

$${}^i N_i = {}^i n_i - {}^{i+1}_i R {}^{i+1} n_{i+1} - {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i - {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1}_i R {}^{i+1} f_{i+1} \quad (40-6)$$

سرانجام، می‌توان معادله‌های نیرو و گشتاور را طوری مرتب کرد که به صورت روابط تکراری از همسایه با شماره بالاتر، به همسایه با شماره پایین‌تر، درآیند

$${}^i f_i = {}^{i+1}_i R {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad (41-6)$$

$${}^i n_i = {}^i N_i + {}^{i+1}_i R {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1}_i R {}^{i+1} f_{i+1} \quad (42-6)$$

این معادله‌ها، از رابط  $n$  آغاز شده، رابط به رابط، به طرف داخل پیش می‌روند تا به پایه روایت برسند. این روابط تکراری درونی نیرو، با روابط تکراری به دست آمده برای نیروی استاتیکی در

فصل ۵ مشابهاند، با این تفاوت که در اینجا برای هر رابط، نیروها و گشتاورهای لختی در نظر گرفته شده‌اند.

مانند حالت استاتیکی، در اینجا نیز گشتاورهای مفصلی مورد نظر، با انتخاب مؤلفه  $\hat{Z}$  گشتاور وارد از یک رابط به رابط مجاور آن، به دست می‌آیند

$$\tau_i = {}^i n_i^T \quad {}^i \hat{Z}_i \quad (۴۳-۶)$$

اگر مفصل  $i + 1$  کشویی باشد، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\tau_i = {}^i f_i^T \quad {}^i \hat{Z}_i \quad (۴۴-۶)$$

که در آن نماد  $\tau$  نشان‌دهنده نیروی خطی کارانداز است.

توجه داشته باشید، هنگامی که روباتی در فضای آزاد حرکت می‌کند،  ${}^{N+1} f_{N+1}$  و  ${}^{N+1} n_{N+1}$  برابر با صفر قرار داده می‌شوند، و در نتیجه اولین کاربرد این معادله‌ها برای رابط  $n$ ، بسیار ساده خواهد بود. اگر روبات با محیط تماس پیدا کند، نیروها و گشتاورهای حاصل از این تماس، با در نظر گرفتن مقادیر غیر صفر برای  ${}^{N+1} f_{N+1}$  و  ${}^{N+1} n_{N+1}$ ، در معادله‌های تعادلی نیرو و گشتاور منظور می‌شوند.

### الگوریتم دینامیکی تکراری نیوتن-اولر

الگوریتم کامل محاسبه گشتاورهای مفصلی با استفاده از حرکت مفصلها از دو قسمت تشکیل شده است. در قسمت اول، سرعتها و شتابهای رابطها با استفاده از روابط تکراری، از رابط ۱ تا رابط  $n$  محاسبه، و معادله‌های نیوتن-اولر برای هر رابط نوشته می‌شوند. در قسمت دوم، نیروها و گشتاورهای بین رابطها، و گشتاورهای کارانداز مفصل، به‌طوری‌دری از رابط  $n$  به رابط ۱، محاسبه می‌شوند. معادله‌های فوق، در حالتی که کلیه مفصلها لولایی هستند، به شرح زیر خلاصه می‌شوند:

محاسبات تکراری بیرونی:  $5 \rightarrow 0 : i$

$${}^{i+1} \omega_{i+1} = {}^{i+1} R \quad {}^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \quad {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (۴۵-۶)$$

$${}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1} R \quad {}^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1} R \quad {}^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} \quad {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \quad {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (۴۶-۶)$$

$${}^{i+1} \dot{v}_{i+1} = {}^{i+1} R \quad ({}^i \dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) + {}^i \dot{v}_i) \quad (۴۷-۶)$$

$$\begin{aligned} {}^{i+1} \dot{v}_{C_{i+1}} = & {}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1} P_{C_{i+1}} + {}^{i+1} \omega_{i+1} \times ({}^{i+1} \omega_{i+1} \times {}^{i+1} P_{C_{i+1}}) \\ & + {}^{i+1} \dot{v}_{i+1} \end{aligned} \quad (۴۸-۶)$$

$${}^{i+1} F_{i+1} = m_{i+1} \quad {}^{i+1} \dot{v}_{C_{i+1}} \quad (۴۹-۶)$$

$${}^{i+1} N_{i+1} = {}^{C_{i+1}} I_{i+1} \quad {}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1} \omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}} I_{i+1} \quad {}^{i+1} \omega_{i+1} \quad (۵۰-۶)$$



محاسبات تکراری درونی:  $i: 6 \rightarrow 1$ 

$${}^i f_i = {}^{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad (51-6)$$

$$\begin{aligned} {}^i n_i = & {}^i N_i + {}^{i+1} R {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i \\ & + {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} \end{aligned} \quad (52-6)$$

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (53-6)$$

### شمول نیروهای گرانی در الگوریتم دینامیکی

تأثیر بارگذاری گرانی بر رابطها را می‌توان به‌سادگی با قراردادن  $\dot{v}_0 = G$  در نظر گرفت، که در آن  $G$  بردار گرانی است. در این صورت، می‌توان فرض کرد که پایهٔ روبات با شتاب  $1G$  به‌سوی بالا حرکت می‌کند. این شتاب فرضی به‌سوی بالا، اثری دقیقاً همانند تأثیر گرانی بر رابطها دارد. بدین ترتیب، بدون هیچ‌گونه محاسبهٔ اضافی، می‌توان اثر گرانی را در نظر گرفت.

## ۶-۶ معادله‌های تکراری و معادله‌های به شکل بسته

معادله‌های (۴۵-۶) تا (۵۳-۶)، یک طرح محاسباتی به‌دست می‌دهند که در آن با داشتن مکانها، و سرعتها و شتابهای مفصلها، می‌توان گشتاورهای مفصلی را به‌دست آورد. از این روابط نیز، مانند معادله‌های به‌کار رفته برای محاسبهٔ ژاکوبی در فصل ۵، می‌توان به‌دو صورت استفاده کرد: به‌صورت یک الگوریتم محاسباتی عددی، و یا به‌صورت الگوریتمی تحلیلی برای به‌دست آوردن معادله‌های نمادین.

کاربرد معادله‌ها به‌صورت الگوریتم محاسباتی عددی، از آن نظر اهمیت دارد که این معادله‌ها، برای هر روبات دلخواه صادق‌اند. کافی است تانسورهای لختی، جرم رابطها، بردارهای  $P_{C_i}$  و ماتریسهای  ${}^{i+1} R$  برای یک بازوی مکانیکی ماهر خاص، مشخص شوند تا بتوان معادله‌ها را مستقیماً برای محاسبهٔ گشتاورهای مفصلی مربوط به هر حرکت دلخواه، به‌کار برد.

اما در اغلب موارد، می‌خواهیم دیدی بهتر از ساختار معادله‌ها داشته باشیم. مثلاً می‌خواهیم بدانیم شکل عبارتهای مربوط به گرانی چگونه است، و یا میزان اثرات گرانی در مقایسه با میزان اثرات لختی، به‌چه نسبتی است. برای دانستن این نکات و برخی نکات دیگر، معادله‌های دینامیکی را به شکل بسته می‌نویسیم. این معادله‌های بسته را می‌توان با کاربرد پی‌درپی معادله‌های نمادین نیوتن-اولر برای  $\Theta$ ،  $\dot{\Theta}$ ، و  $\ddot{\Theta}$ ، به‌دست آورد. این عمل معادل است با آنچه در فصل ۵ برای پیدا کردن صورت نمادین ژاکوبی، انجام دادیم.

## ۶-۷ مثالی از معادله‌های دینامیکی بسته

در اینجا معادله‌های دینامیکی بسته را برای بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط، که در شکل ۶-۶ نشان داده شده است، به دست می‌آوریم. برای سادگی مسئله، فرض می‌کنیم توزیع جرم بینهایت ساده است و کل جرم در انتهای هر رابط متمرکز است. این جرمهای متمرکز را  $m_1$  و  $m_2$  می‌نامیم. ابتدا مقدار کمیت‌های گوناگونی را که در معادله‌های بازگشتی نیوتن-اوایلر ظاهر می‌شوند، تعیین می‌کنیم. بردارهای نشان‌دهنده مکان مرکز جرم برای هر رابط، چنین‌اند

$${}^1P_{C_1} = l_1 \hat{X}_1$$

$${}^2P_{C_2} = l_2 \hat{X}_2$$

چون جرم متمرکز (نقطه‌ای) فرض شده است، تانسور لختی نوشته شده در مرکز جرم، برای هر رابط برابر با ماتریس صفر است

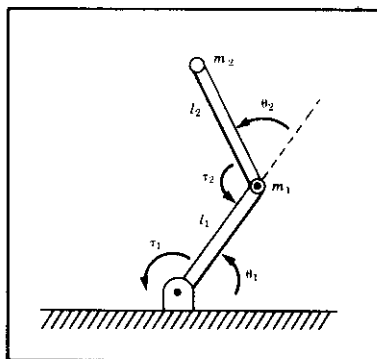
$${}^{C_1}I_1 = 0$$

$${}^{C_2}I_2 = 0$$

بر مجری نهایی نیرویی وارد نمی‌شود، پس داریم

$$f_2 = 0$$

$$n_2 = 0$$



شکل ۶-۶ بازو با ۲ رابط با جرم متمرکز در انتهای هر رابط.

پایهٔ روبات دوران نمی‌کند، و بنابراین

$$\omega_z = 0$$

$$\dot{\omega}_z = 0$$

به منظور شمول نیروهای گرانی در معادله‌ها، می‌نویسیم

$${}^0\dot{v}_z = g\hat{Y}_z$$

دوران چهارچوبهای رابط پایایی نسبت به یکدیگر، از رابطه‌های زیر به دست می‌آید

$${}^i_{i+1}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0/0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0/0 \\ 0/0 & 0/0 & 1/0 \end{bmatrix}$$

$${}^{i+1}_iR = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0/0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0/0 \\ 0/0 & 0/0 & 1/0 \end{bmatrix}$$

حال معادله‌های (۴۵-۶) تا (۵۳-۶) را به کار می‌بریم.  
محاسبات تکراری بیرونی برای رابط ۱ چنین‌اند

$${}^1\omega_1 = \dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۵۴-۶) «الف تا «د»

$${}^1F_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۵۴-۵) \text{ تا «و»}$$

محاسبات تکراری بیرونی برای رابط ۲ عبارت‌اند از

$${}^r\omega_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_r \end{bmatrix}$$

$${}^r\dot{\omega}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r \end{bmatrix}$$

$${}^r\dot{v}_r = \begin{bmatrix} c_r & s_r & 0 \\ -s_r & c_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + g s_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + g c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s_r - l_1 \dot{\theta}_1^2 c_r + g s_{1r} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c_r + l_1 \dot{\theta}_1^2 s_r + g c_{1r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^r\dot{v}_{C_r} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_r(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_r(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_r)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s_r - l_1 \dot{\theta}_1^2 c_r + g s_{1r} \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c_r + l_1 \dot{\theta}_1^2 s_r + g c_{1r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^rF_r = \begin{bmatrix} m_r l_1 \ddot{\theta}_1 s_r - m_r l_1 \dot{\theta}_1^2 c_r + m_r g s_{1r} - m_r l_r(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_r)^2 \\ m_r l_1 \ddot{\theta}_1 c_r + m_r l_1 \dot{\theta}_1^2 s_r + m_r g c_{1r} + m_r l_r(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^rN_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۵۵-۵) \text{ «الف» تا «و»}$$

محاسبات تکراری درونی برای رابط ۲ عبارت‌اند از

$${}^r f_r = {}^r F_r \quad (۵۶-۵) \text{ «الف»}$$

$${}^r n_r = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ m_r l_1 l_r c_r \ddot{\theta}_1 + m_r l_1 l_r s_r \dot{\theta}_1^2 + m_r l_r g c_{1r} + m_r l_r^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) \end{bmatrix} \quad (6-56 \text{ «ب»})$$

محاسبات تکراری درونی برای رابط ۱ چنین‌اند

$$\begin{aligned} {}^1 f_1 &= \begin{bmatrix} c_r & -s_r & \circ \\ s_r & c_r & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_r l_1 s_r \ddot{\theta}_1 - m_r l_1 c_r \dot{\theta}_1^2 + m_r g s_{1r} - m_r l_r (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_r)^2 \\ m_r l_1 c_r \ddot{\theta}_1 + m_r l_1 s_r \dot{\theta}_1^2 + m_r g c_{1r} + m_r l_r (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) \\ \circ \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ \circ \end{bmatrix} \\ {}^1 n_1 &= \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ m_r l_1 l_r c_r \ddot{\theta}_1 + m_r l_1 l_r s_r \dot{\theta}_1^2 + m_r l_r g c_{1r} + m_r l_r^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c_1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ m_r l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_r l_1 l_r s_r (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_r)^2 + m_r l_1 g s_{1r} \\ + m_r l_1 l_r c_r (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) + m_r l_r g c_{1r} \end{bmatrix} \quad (6-57 \text{ «الف» و «ب»}) \end{aligned}$$

با بیرون آوردن مؤلفه‌های  $\hat{Z}$  از  ${}^i n_i$ ، گشتاورهای مفصلی به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_r l_r^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) + m_r l_1 l_r c_r (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) + (m_1 + m_r) l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\ &\quad - m_r l_1 l_r s_r \dot{\theta}_1^2 - 2m_r l_1 l_r s_r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_r + m_r l_r g c_{1r} + (m_1 + m_r) l_1 g c_1 \\ \tau_r &= m_r l_1 l_r c_r \ddot{\theta}_1 + m_r l_1 l_r s_r \dot{\theta}_1^2 + m_r l_r g c_{1r} + m_r l_r^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_r) \end{aligned} \quad (6-58 \text{ «الف» و «ب»})$$

معادله‌های (۶-۵۸)، گشتاور ایجاد شده در کاراندازها را به‌صورت تابعی از مکان، سرعت، و شتاب

مفصل به دست می‌دهند. توجه کنید که این توابع نسبتاً پیچیده برای یکی از ساده‌ترین بازوهای مکانیکی ماهر قابل تصور، حاصل شده‌اند. روشن است که معادله‌های بسته برای بازویی با شش درجه آزادی، بسیار پیچیده است.

## ۸-۶ ساختار معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر

در اغلب موارد بیان معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر به صورت معادله‌ای تنها مورد نظر است، که در آن برخی جزئیات حذف می‌شوند، اما در عوض ساختار معادله‌ها نشان داده می‌شود.

### معادله فضای حالت

هنگامی که معادله‌های نیوتن-اولر به طور نمادین برای بازویی ارزیابی می‌شوند، معادله‌ای دینامیکی به دست می‌آید که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (59-6)$$

در این معادله،  $M(\Theta)$  ماتریس جرم  $n \times n$  مربوط به بازوی مکانیکی،  $V(\Theta, \dot{\Theta})$  بردار  $n \times 1$  نشان‌دهنده جمله‌های گریز از مرکز و کوریولیس، و  $G(\Theta)$  بردار  $n \times 1$  شامل جمله‌های مربوط به گرانی است. ما اصطلاح معادله فضای حالت را به دلیل وابستگی جمله  $V(\Theta, \dot{\Theta})$ ، که در رابطه (۵۹-۶) ظاهر می‌شود، به هر دو کمیت مکان و سرعت، به کار می‌بریم [۳].

هر عنصر  $M(\Theta)$  و  $G(\Theta)$ ، تابعی پیچیده و وابسته به  $\Theta$ ، مکان کلیه مفصلهای بازوی مکانیکی ماهر، است. هر عنصر  $V(\Theta, \dot{\Theta})$  نیز تابعی پیچیده از  $\Theta$  و  $\dot{\Theta}$  است. می‌توانیم انواع گوناگون عبارتهای ظاهر شده در معادله‌های دینامیکی را از یکدیگر جدا کنیم و ماتریس جرم بازو، بردار گریز از مرکز و کوریولیس، و بردار گرانی را تشکیل دهیم.

### ■ مثال ۳-۶

برای بازوی مکانیکی ماهر نشان داده شده در شکل ۶-۶ در بخش قبل،  $M(\Theta)$ ،  $V(\Theta, \dot{\Theta})$ ، و  $G(\Theta)$  را به دست آورید.

معادله (۵۹-۶) ماتریس جرم بازوی مکانیکی،  $M(\Theta)$ ، را تعریف می‌کند. این ماتریس از همه جمله‌هایی تشکیل می‌شود که مضرب  $\ddot{\Theta}$  اند، و خود تابعی از  $\Theta$  است. بنابراین داریم

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} I_1^* m_2 + 2l_1 l_2 m_2 c_2 + I_1^* (m_1 + m_2) & I_1^* m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ I_1^* m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & I_1^* m_2 \end{bmatrix} \quad (60-6)$$

ماتریس جرم بازوی مکانیکی ماهر، همواره متقارن و معین مثبت، و بنابراین همواره وارون پذیر است. جمله سرعت،  $V(\Theta, \dot{\Theta})$  شامل کلیه جمله‌هایی است که به سرعت مفصلها بستگی دارند. پس داریم

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (61-6)$$

جمله‌ای چون  $-m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2$  بر اثر نیروی گریز از مرکز ایجاد می‌شود، زیرا به مجذور سرعت مفصل بستگی دارد. جمله‌ای چون  $-2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$  بر اثر نیروی کوریولیس پدید می‌آید و همواره شامل حاصلضرب دو سرعت مفصلی متفاوت است. جمله گرانی،  $G(\Theta)$ ، کلیه جمله‌هایی را در بر می‌گیرد که در آنها  $g$ ، ثابت گرانی، ظاهر می‌شود. پس داریم

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \quad (62-6)$$

■ توجه کنید که جمله گرانی فقط به  $\Theta$  بستگی دارد، نه به مشتقات آن.

### معادله فضای پیکربندی

با نوشتن جمله وابسته به سرعت،  $V(\Theta, \dot{\Theta})$ ، می‌توانیم معادله‌های دینامیکی را به صورتی دیگر، چنین به دست آوریم

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + B(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta) \quad (63-6)$$

که در آن  $B(\Theta)$  ماتریسی به ابعاد  $n \times n(n-1)/2$  از ضرایب کوریولیس است، و  $[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]$  برداری  $1 \times n(n-1)/2$  از حاصلضرب سرعتهای مفصلی که به صورت زیر داده می‌شود

$$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \dots \dot{\theta}_{n-1} \dot{\theta}_n]^T \quad (64-6)$$

همچنین،  $C(\Theta)$  ماتریسی  $n \times n$  از ضرایب گریز از مرکز، و  $[\dot{\Theta}^2]$  برداری  $1 \times n$  به صورت زیر است

$$[\dot{\Theta}^2] = [\dot{\theta}_1^2 \quad \dot{\theta}_2^2 \quad \dots \quad \dot{\theta}_n^2]^T \quad (65-6)$$

معادله (۶۳-۶) را معادله فضای پیکربندی می‌نامیم، زیرا ماتریسهای آن فقط تابع مکان بازوی مکانیکی ماهرند [۳].

در این روش ارائه معادله‌های دینامیکی، پیچیدگی محاسبات در محاسبه پارامترهای گوناگونی که تابعی از مکان بازوی مکانیکی،  $\Theta$ ، هستند، ظاهر می‌شود. این موضوع، در کاربردهایی چون کنترل کامپیوتری بازو، که در آن معادله‌های دینامیکی باید با حرکت بازو روزآمد شوند، اهمیت دارد. (معادله (۶۳-۶) شکلی را ارائه می‌دهد که در آن پارامترها فقط تابع مکان مفصله‌ایند، و این معادله را می‌توان همگام با سرعت تغییر پیکربندی بازو تغییر داد). این صورت از معادله را در فصل ۱۰ به هنگام بررسی کنترل بازوی مکانیکی ماهر، دوباره مورد توجه قرار خواهیم داد.

#### ■ مثال ۴-۶

برای بازوی مکانیکی ماهر نشان داده شده در شکل ۶-۶ در بخش قبل،  $B(\Theta)$  و  $C(\Theta)$  (از معادله (۶۳-۶)) را به دست آورید.  
برای این بازوی ساده با دو رابط، داریم

$$\begin{aligned} [\dot{\Theta}\dot{\Theta}] &= [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \\ [\dot{\Theta}^2] &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۶۶-۶)$$

پس دیده می‌شود که

$$B(\Theta) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۶۷-۶)$$

$$C(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۸-۶)$$

## ۹-۶ روش لاگرانژ در به دست آوردن معادله‌های دینامیکی بازوهای مکانیکی

رهیافت نیوتن-اولیر، بر فرمولهای مقدماتی (۶-۲۹) و (۶-۳۰) در دینامیک، و بر تحلیل نیروها و گشتاورهای بین رابطها، استوار است. در این بخش، به طور خلاصه روش دیگری را برای به دست آوردن معادله‌های دینامیکی، به نام فرمولبندی دینامیکی لاگرانژ، معرفی خواهیم کرد. رهیافت روش نیوتن-اولیر با دینامیک را می‌توان از نوع «تعادل نیرو» در نظر گرفت، در صورتی که روش لاگرانژ، رهیافتی بر پایه «انرژی» دارد. البته برای بازوهای مکانیکی ماهر یکسان، هر دو روش به یک نتیجه خواهند رسید. بررسی ما از دینامیک لاگرانژی مختصر و مربوط به حالت خاص یک بازوی



مکانیکی ماهر رنجیری با رابطهای صلب خواهد بود. برای بررسی کاملتر در حالت کلی، مرجع [۴] را ببینید.

ابتدا عبارتی برای انرژی جنبشی بازوی مکانیکی ماهر به دست می‌آوریم. انرژی جنبشی رابط  $\dot{\theta}_i$ ،  $k_i$ ، را می‌توان چنین نوشت

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_i^T C_i I_i \dot{\theta}_i \quad (۶۹-۶)$$

که در آن جمله اول، انرژی جنبشی حاصل از سرعت خطی مرکز جرم رابط، و جمله دوم، انرژی جنبشی ناشی از سرعت دورانی رابط است. انرژی جنبشی کل بازو برابر با مجموع انرژیهای جنبشی هر یک از رابطهاست. یعنی

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (۷۰-۶)$$

چون جمله‌های  $v_{C_i}$  و  $\dot{\theta}_i$  در (۶۹-۶) تابعی از  $\Theta$  و  $\dot{\Theta}$  هستند، انرژی جنبشی هر بازوی مکانیکی ماهر را می‌توان با عبارتی اسکالر به صورت تابعی از مکان و سرعت مفصلها،  $k(\Theta, \dot{\Theta})$ ، بیان کرد. بدین ترتیب، انرژی جنبشی بازو را می‌توان چنین نوشت

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T M(\Theta) \dot{\Theta} \quad (۷۱-۶)$$

که در آن  $M(\Theta)$  ماتریس جرم  $n \times n$  است که در بخش ۶-۸ معرفی شد. عبارتی به صورت رابطه (۷۱-۶) را صورت درجه دوم [۵] می‌نامند، زیرا معادله اسکالر حاصل از بسط آن، صرفاً از جمله‌هایی تشکیل می‌شود که وابستگی آنها به  $\dot{\theta}_i$  از درجه دوم است. همچنین، چون انرژی جنبشی کل همواره مثبت است، ماتریس جرم بازوی مکانیکی ماهر باید ماتریسی معین مثبت باشد. ماتریسهای معین مثبت، ماتریسهایی هستند که صورت درجه دوم آنها همواره کمیتی اسکالر و مثبت است. دیده می‌شود که معادله (۷۱-۶) را می‌توان با عبارت آشنای انرژی جنبشی یک جرم نقطه‌ای، قیاس کرد

$$k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (۷۲-۶)$$

معین مثبت بودن ماتریس جرم بازو را نیز می‌توان با همواره مثبت بودن جرم اسکالر، قیاس کرد. انرژی پتانسیل رابط  $\dot{\theta}_i$ ،  $u_i$ ، را می‌توان چنین نوشت

$$u_i = -m_i \cdot g^T \cdot P_{C_i} + u_{ref_i} \quad (۷۳-۶)$$

که در آن  $g$  بردار  $3 \times 1$  گرانی، و  $P_{C_i}$  بردار نشان‌دهنده مکان مرکز جرم رابط  $\dot{\theta}_i$ ، و  $u_{ref_i}$

ثابتی است که برای صفر شدن مقدار مینیم  $u_i$  در نظر گرفته می‌شود.<sup>۱</sup> انرژی پتانسیل کل ذخیره شده در بازو برابر با مجموع انرژیهای پتانسیل هر یک از رابطهاست

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \quad (۷۴-۶)$$

چون  $P_{C_i}$  در (۷۳-۶) تابعی از  $\Theta$  هستند، انرژی پتانسیل بازو را می‌توان به صورت تابعی اسکالر از مکان مفصل،  $u(\Theta)$ ، توصیف کرد.

روش دینامیکی لاگرانژ، ابزاری را برای به دست آوردن معادله‌های حرکت از تابعی اسکالر به نام لاگرانژین، که به صورت اختلاف بین انرژیهای پتانسیل و جنبشی یک سیستم مکانیکی تعریف شده است، فراهم می‌آورد. مطابق با نمادگذاری ما، لاگرانژین هر بازوی مکانیکی ماهر چنین خواهد بود

$$\mathcal{L}(\Theta, \dot{\Theta}) = k(\Theta, \dot{\Theta}) - u(\Theta) \quad (۷۵-۶)$$

پس معادله‌های حرکت بازو نیز چنین به دست می‌آیند

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = \tau \quad (۷۶-۶)$$

که در آن  $\tau$  برداری  $n \times 1$  از گشتاورهای کارانداز است. در مورد بازوی مکانیکی ماهر، این معادله چنین بیان می‌شود

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau \quad (۷۷-۶)$$

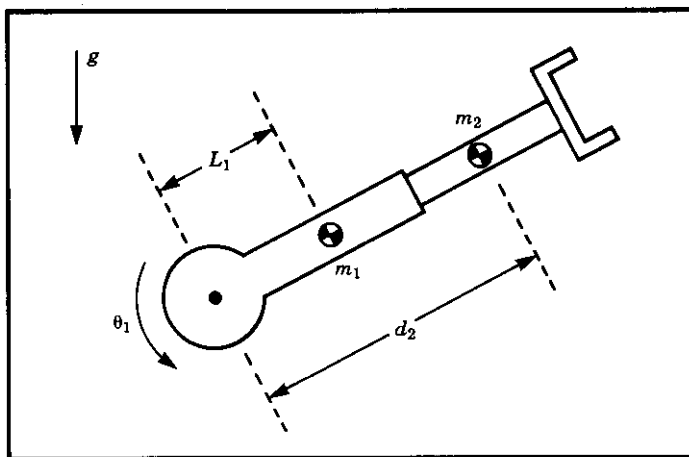
که در آن شناسه‌های  $k(\cdot)$  و  $u(\cdot)$ ، به منظور رعایت اختصار، حذف شده‌اند.

#### ■ مثال ۵-۶

رابطهای بازوی مکانیکی ماهر RP، که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است، دارای تانسورهای لختی زیر هستند

$${}^{C_1}I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

۱. در واقع، چون تنها مشتق جزئی انرژی پتانسیل نسبت به  $\Theta$  در معادله‌های دینامیکی ظاهر می‌شود، این ثابت اختیاری خواهد بود. این متناظر با تعریف انرژی پتانسیل نسبت به ارتفاع مرجع صفر دلخواه است.



شکل ۶-۷ بازوی مکانیکی ماهر RP، مثال ۶-۵.

$${}^C I_r = \begin{bmatrix} I_{xxr} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yyr} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzr} \end{bmatrix} \quad (78-6)$$

جرم کل رابطها نیز برابر با  $m_1$  و  $m_2$  است. چنانکه در شکل ۶-۷ دیده می‌شود، مرکز جرم رابط ۱ در فاصله  $l_1$  از محور مفصلی ۱، و مرکز جرم رابط ۲ در فاصله متغیر  $d_2$  از محور مفصلی ۱، قرار دارد. با استفاده از دینامیک لاگرانژی، معادله حرکت این بازو را به‌دست آورید. با به‌کارگیری معادله (۶۹-۶)، انرژی جنبشی رابط ۱ را چنین می‌نویسیم

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz1} \dot{\theta}_1^2 \quad (79-6)$$

و انرژی جنبشی رابط ۲ عبارت است از

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 (d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2) + \frac{1}{2} I_{zz2} \dot{\theta}_1^2 \quad (80-6)$$

پس انرژی جنبشی کل برابر خواهد بود با

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 \quad (81-6)$$

با استفاده از (۶-۷۳)، انرژی پتانسیل رابط ۱ چنین به دست می آید

$$u_1 = m_1 l_1 g \sin(\theta_1) + m_1 l_1 g \quad (۶-۸۲)$$

و انرژی پتانسیل رابط ۲ به صورت زیر نوشته می شود

$$u_2 = m_2 g d_2 \sin(\theta_1) + m_2 g d_{2max} \quad (۶-۸۳)$$

که در آن  $d_{2max}$  حداکثر کشیدگی مفصل ۲ است. پس انرژی پتانسیل کل چنین است

$$u(\Theta) = g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \sin(\theta_1) + m_1 l_1 g + m_2 g d_{2max} \quad (۶-۸۴)$$

حال مشتقات جزئی مورد نیاز برای (۶-۷۷) را محاسبه می کنیم

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1 \\ m_2 d_2 \end{bmatrix} \quad (۶-۸۵)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (۶-۸۶)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \cos(\theta_1) \\ g m_2 \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (۶-۸۷)$$

سرانجام، با جایگزین کردن این مقادیر در (۶-۷۷)، نتیجه می شود

$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) \quad (۶-۸۸)$$

$$\tau_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin(\theta_1)$$

با توجه به (۶-۸۸) می بینیم که

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2) & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (۶-۸۹)$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos(\theta_1) \\ m_2 g \sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

## ۶-۱۰ به دست آوردن معادله‌های دینامیکی بازوهای مکانیکی در فضای دکارتی

معادله‌های دینامیکی را برحسب مکان و مشتقات زمانی زوایای مفصلی بازو، یعنی در فضای مفصلی با شکل کلی زیر به دست آوردیم

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (۹۰-۶)$$

ما این معادله را در فضای مفصلی پی‌ریزی کردیم، زیرا بدین طریق می‌توانستیم در به دست آوردن معادله‌ها، از ماهیت زنجیری مکانیزم استفاده کنیم. در این بخش، طریقه به دست آوردن معادله‌های دینامیکی که شتاب مجری نهایی در فضای دکارتی را به نیروها و گشتاورهای دکارتی وارد به آن مربوط می‌کنند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

### معادله فضای حالت دکارتی

همان‌طورکه در فصلهای ۱۰ و ۱۱ توضیح داده می‌شود، گاهی ممکن است بخواهیم معادله دینامیکی یک بازوی مکانیکی ماهر را نسبت به متغیرهای دکارتی به صورت کلی زیر بنویسیم [۶]:

$$\mathcal{F} = M_x(\Theta)\ddot{\mathcal{X}} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \quad (۹۱-۶)$$

که در آن  $\mathcal{F}$  بردار نیرو-گشتاوری است که بر مجری نهایی روبات وارد می‌شود، و  $\mathcal{X}$  بردار دکارتی مناسب برای نمایش مکان و جهتگیری مجری نهایی [۷] است. نظیر کمیت‌های فضای مفصلی،  $M_x(\Theta)$  ماتریس جرم دکارتی،  $V_x(\Theta, \dot{\Theta})$  بردار شامل جمله‌های وابسته به سرعت در فضای دکارتی، و  $G_x(\Theta)$  بردار شامل جمله‌های وابسته به گرانی در فضای دکارتی است. توجه کنید که نیروهای فرضی  $\mathcal{F}$  وارد بر مجری نهایی، می‌توانند در حقیقت توسط کاراندازهای واقع در مفصلها، با کاربرد رابطه زیر، اعمال شوند

$$\tau = J^T(\Theta) \mathcal{F} \quad (۹۲-۶)$$

که در آن ژاکوبی  $J(\Theta)$  نیز در همان چهارچوب  $\mathcal{F}$  و  $\ddot{\mathcal{X}}$ ، که معمولاً چهارچوب ابزار  $\{T\}$  است، نوشته شده است.

می‌توانیم رابطه بین جمله‌های معادله (۹۰-۶) و (۹۱-۶) را به صورت زیر بنویسیم. ابتدا (۹۰-۶) را از سمت چپ در وارون ترانهادۀ ژاکوبی ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$J^{-T}\tau = J^{-T} M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T} V(\Theta, \dot{\Theta}) + J^{-T} G(\Theta) \quad (۹۳-۶)$$

$$\mathcal{F} = J^{-T} M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T} V(\Theta, \dot{\Theta}) + J^{-T} G(\Theta) \quad (۹۴-۶)$$

سپس رابطه‌ای بین شتاب در فضای مفصلی و شتاب دکارتی پی‌ریزی می‌کنیم. برای این کار، از تعریف ژاکوبی شروع می‌کنیم

$$\dot{\mathcal{X}} = J\dot{\Theta} \quad (۹۵-۶)$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق، نتیجه می‌شود

$$\ddot{\mathcal{X}} = \dot{J}\dot{\Theta} + J\ddot{\Theta} \quad (۹۶-۶)$$

معادله (۹۶-۶) را حل می‌کنیم و شتاب فضای مفصلی را به دست می‌آوریم

$$\ddot{\Theta} = J^{-1}\ddot{\mathcal{X}} - J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} \quad (۹۷-۶)$$

با جایگزین کردن (۹۷-۶) در (۹۴-۶)، داریم

$$\mathcal{F} = J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\ddot{\mathcal{X}} - J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta, \dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta) \quad (۹۸-۶)$$

از این رابطه، عبارتهایی برای جمله‌های معادله دینامیکی در فضای دکارتی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M_x(\Theta) &= J^{-T}(\Theta) M(\Theta) J^{-1}(\Theta) \\ V_x(\Theta, \dot{\Theta}) &= J^{-T}(\Theta) \left( V(\Theta, \dot{\Theta}) - M(\Theta) J^{-1}(\Theta) \dot{J}(\Theta) \dot{\Theta} \right) \\ G_x(\Theta) &= J^{-T}(\Theta) G(\Theta) \end{aligned} \quad (۹۹-۶)$$

ژاکوبی در رابطه (۹۹-۶) در همان چهارچوبی که  $\mathcal{F}$  و  $\mathcal{X}$  در رابطه (۹۱-۶) بیان شده‌اند، نوشته می‌شود، اگر چه این چهارچوب می‌تواند به دلخواه انتخاب شده باشد.<sup>۱</sup> توجه کنید که با نزدیک شدن بازو به نقطه‌ای تکین، برخی کمیتها در معادله‌های دینامیکی به بینهایت میل می‌کنند.

#### ■ مثال ۶-۶

معادله‌های دینامیکی فضای دکارتی را برای بازوی صفحه‌ای با دو رابط در شکل ۶-۶ از بخش ۷-۶، به دست آورید. این معادله‌ها را نسبت به چهارچوب متصل به انتهای رابط دوم بنویسید. برای این بازو تاکنون معادله‌های دینامیکی (در بخش ۷-۶) و ژاکوبی (معادله (۵-۶۶)) را

۱. انتخاب برخی چهارچوبهای خاص، محاسبات را آسان‌تر می‌کند.

نوشته‌ایم. چنانکه دیدیم، ژاکوبی چنین به دست آمد

$$J(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (۱۰۰-۶)$$

ابتدا وارون ژاکوبی را محاسبه می‌کنیم

$$J^{-1}(\Theta) = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 & 0 \\ -l_1 c_2 - l_2 & l_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (۱۰۱-۶)$$

و سپس مشتق زمانی آن را به دست می‌آوریم

$$\dot{J}(\Theta) = \begin{bmatrix} l_1 c_2 \dot{\theta}_2 & 0 \\ -l_1 s_2 \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰۲-۶)$$

با استفاده از (۹۹-۶) و نتایج بخش ۶-۷، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} M_x(\Theta) &= \begin{bmatrix} m_2 + \frac{m_1}{s_2^2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ V_x(\Theta, \dot{\Theta}) &= \begin{bmatrix} -(\dot{m}_2 l_1 c_2 + m_2 l_2) \dot{\theta}_2^2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 - (2m_2 l_2 + m_2 l_1 c_2 + m_1 l_1 \frac{c_2}{s_2^3}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + l_1 m_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ G_x(\Theta) &= \begin{bmatrix} m_1 g \frac{c_2}{s_2} + m_2 g s_{12} \\ m_2 g c_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۰۳-۶)$$

هنگامی که  $s_2 = 0$ ، بازو در نقطه‌ای تکین قرار می‌گیرد و برخی از جمله‌های دینامیکی آن به بینهایت میل می‌کنند. مثلاً، هنگامی که  $\theta_2 = 0$  (بازو تا آخرین حد کشیده شده است)، همان‌طور که انتظار می‌رود، جرم دکارتی مؤثر مجری نهایی در جهت  $\hat{X}_2$  از چهارچوب متصل به انتهای رابط ۲، بینهایت می‌شود. در حالت کلی، در پیکربندی تکین، جهتی معین به نام جهت تکین وجود دارد که در آن حرکت غیر ممکن است، اما حرکت کلی در زیر فضای «عمود» بر این جهت، امکانپذیر است [۸].

### معادله گشتاور فضای پیکربندی دکارتی

با ترکیب معادله‌های (۹۱-۶) و (۹۲-۶)، می‌توان گشتاورهای مفصلی معادل را با استفاده از دینامیک بیان شده در فضای دکارتی چنین نوشت

$$\tau = J^T(\Theta) \left( M_x(\Theta) \ddot{X} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \right) \quad (۱۰۴-۶)$$

نوشتن این معادله به صورت زیر، سودمند خواهد بود

$$\tau = J^T(\Theta)M_x(\Theta)\ddot{\mathcal{X}} + B_x(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C_x(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta) \quad (۱۰۵-۶)$$

که در آن  $B_x(\Theta)$  ماتریسی به ابعاد  $n \times n(n-1)/2$  از ضرایب کوریولیس است و  $[\dot{\Theta}\dot{\Theta}]$  برداری به ابعاد  $1 \times n(n-1)/2$  از حاصلضرب سرعتهای مفصلی است که از رابطه زیر به دست می آید

$$[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \dots \dot{\theta}_{n-1} \dot{\theta}_n]^T \quad (۱۰۶-۶)$$

$C_x(\Theta)$  ماتریسی  $n \times n$  متشکل از ضرایب گریز از مرکز، و  $[\dot{\Theta}^2]$  برداری  $1 \times n$  است که

به صورت زیر داده می شود

$$[\dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2^2 \dots \dot{\theta}_n^2]^T \quad (۱۰۷-۶)$$

توجه کنید که در (۱۰۵-۶)،  $G(\Theta)$  همان مقدار به دست آمده در معادله فضای مفصلی را دارد، اما در حالت کلی  $B(\Theta) \neq C(\Theta)$  و  $B_x(\Theta) \neq C_x(\Theta)$ .

#### ■ مثال ۶-۷

برای بازوی مکانیکی ماهر نشان داده شده در شکل ۶-۶ در بخش ۶-۷،  $B_x(\Theta)$  و  $C_x(\Theta)$  را (از معادله (۱۰۵-۶)) به دست آورید.

اگر حاصل ضرب  $J^T(\Theta)V_x(\Theta, \dot{\Theta})$  را تشکیل دهیم، در می یابیم که

$$B_x(\Theta) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 \frac{c_1}{s_1^2} - m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \end{bmatrix} \quad (۱۰۸-۶)$$

$$C_x(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰۹-۶)$$

■

## ۱۱-۶ شمول اثرات جسم غیر صلب

درک این مسئله اهمیت دارد که معادله های دینامیکی به دست آمده تاکنون، کلیه اثرات اعمال شده بر یک بازوی مکانیکی ماهر را در بر نمی گیرند، بلکه تنها شامل نیروهایی هستند که از مکانیک اجسام صلب حاصل می شوند. مهمترین منبع نیروهایی که در نظر گرفته نشده اند، اصطکاک است. البته، کلیه مکانیزمها تحت تأثیر نیروهای اصطکاکی قرار دارند. در روباتهای کنونی که از



چرخنده استفاده می‌کنند، نیروهای اصطکاکی ممکن است بسیار بزرگ باشند، و شاید در حدود ۲۵٪ از گشتاور لازم برای به حرکت درآوردن بازو را در وضعیتهای معمولی به خود اختصاص دهند. برای منطبق کردن معادله‌های دینامیکی بر واقعیت، باید مدلی از این نیروهای اصطکاکی را (دستکم به‌طور تقریبی) در نظر گرفت. مدلی بسیار ساده برای اصطکاک، اصطکاک ویسکوز است که در آن گشتاور حاصل از اصطکاک، با سرعت حرکت مفصل متناسب است. بدین ترتیب، داریم

$$\tau_{friction} = v\dot{\theta} \quad (۱۱۰-۶)$$

که در آن  $v$  ثابت اصطکاک ویسکوز است. مدل ساده دیگر برای اصطکاک، که گاهی به‌کار می‌رود، اصطکاک خشک است. مقدار اصطکاک خشک ثابت است، اما علامت آن به سرعت مفصل بستگی دارد

$$\tau_{friction} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (۱۱۱-۶)$$

که در آن  $c$  ثابت اصطکاک خشک است. مقدار  $c$  هنگامی که  $\dot{\theta} = 0$  است، ضریب اصطکاک استاتیکی، و زمانی که  $\dot{\theta} \neq 0$  باشد، کوچک‌تر بوده، ضریب اصطکاک جنبشی (دینامیکی) خوانده می‌شود. ویسکوز یا خشک بودن اصطکاک در هر مفصل خاص از بازوی مکانیکی ماهر، مسئله پیچیده‌ای است و به روغنکاری و دیگر اثرات بستگی دارد. مدلی مناسب است که هر دو نوع اصطکاک را در برگیرد، زیرا هر دو اثر محتمل‌اند

$$\tau_{friction} = c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + v\dot{\theta} \quad (۱۱۲-۶)$$

در بسیاری از مفصلهای بازوهای مکانیکی ماهر، مقدار اصطکاک به مکان مفصل نیز بستگی دارد. دلیل اصلی این امر را می‌توان کاملاً دایره‌ای نبودن چرخنده‌ها دانست که بر اثر آن انحراف از مرکز ایجاد می‌شود و اصطکاک بر اساس مکان مفصل تغییر می‌کند. پس مدلی نسبتاً پیچیده برای اصطکاک چنین است

$$\tau_{friction} = f(\theta, \dot{\theta}) \quad (۱۱۳-۶)$$

این مدل‌های اصطکاک را به جمله‌های دینامیکی دیگر به‌دست آمده از مدل جسم صلب اضافه می‌کنند، تا مدل کاملتر زیر به‌دست آید

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (۱۱۴-۶)$$

اثرات دیگری نیز وجود دارند که در این مدل نادیده گرفته شده‌اند. مثلاً فرض صلب بودن رابط‌ها بدان معناست که اثرات خمش (که باعث ایجاد تشدید می‌شوند) در معادله حرکت نادیده گرفته

شده‌اند. اما این اثرات مدل‌هایی بسیار پیچیده دارند و بررسی آنها خارج از محدوده این کتاب است (مراجع [۱۰، ۹] را ببینید).

## ۱۲-۶ شبیه‌سازی دینامیکی

برای شبیه‌سازی دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر، باید از مدل دینامیکی، مانند آنچه در بخش قبل در نظر گرفتیم، استفاده کنیم. با داشتن معادله‌های دینامیکی بسته (معادله (۶-۵۹))، برای شبیه‌سازی باید معادله دینامیکی شتاب را حل کنیم

$$\ddot{\Theta} = M^{-1}(\Theta) [\tau - V(\Theta, \dot{\Theta}) - G(\Theta) - F(\Theta, \dot{\Theta})] \quad (۱۱۵-۶)$$

سپس می‌توانیم هر یک از روشهای انتگرالگیری عددی را برای انتگرال گرفتن از شتاب، و به دست آوردن مکانها و سرعتهای بعدی، به کار گیریم. با داشتن شرایط اولیه حرکت بازو که معمولاً به شکل زیر داده می‌شود

$$\Theta(0) = \Theta.$$

$$\dot{\Theta}(0) = 0 \quad (۱۱۶-۶)$$

می‌توان از (۱۱۵-۶) در فاصله‌های زمانی  $\Delta t$ ، به صورت عددی انتگرال گرفت. روشهای بسیاری برای انتگرالگیری عددی، وجود دارند [۱۱]. در اینجا ساده‌ترین روش انتگرالگیری عددی، به نام روش انتگرالگیری اویلر را که به صورت زیر انجام می‌شود، ارائه می‌کنیم: از لحظه  $t = 0$  آغاز، و عبارتهای زیر را به روش تکرار محاسبه می‌کنیم

$$\dot{\Theta}(t + \Delta t) = \dot{\Theta}(t) + \ddot{\Theta}(t)\Delta t$$

$$\Theta(t + \Delta t) = \Theta(t) + \dot{\Theta}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\Theta}(t)\Delta t^2 \quad (۱۱۷-۶)$$

در هر تکرار، معادله (۱۱۵-۶) برای محاسبه  $\ddot{\Theta}$  حل می‌شود. بدین ترتیب مکان سرعت، و شتاب بازو، که بر اثر اعمال تابع گشتاور ورودی معین ایجاد شده‌اند، به صورت عددی محاسبه خواهند شد. اگر چه روش اویلر مفهومی ساده دارد، اما روشهای انتگرالگیری پیچیده‌تری موجودند که برای به دست آوردن جوابهای دقیق با بازده بالا توصیه می‌شوند [۱۱]. انتخاب مقدار  $\Delta t$  مسئله‌ای مورد بحث است.  $\Delta t$  را باید آن قدر کوچک انتخاب کرد که شکستن زمان (که پیوسته است) به این فاصله‌های کوچک، تقریبی قابل قبول به دست دهد و از سوی دیگر،  $\Delta t$  باید آن قدر بزرگ باشد که کامپیوتر برای محاسبه یک شبیه‌سازی، زمان محاسباتی زیادی صرف نکند.

## ۱۳-۶ ملاحظات محاسباتی

نظر به پیچیده بودن معادله‌های دینامیکی بازوهای مکانیکی ماهر، در نظر گرفتن مسائل محاسباتی آنها حائز اهمیت است. در این بخش، تنها به دینامیک فضای مفصلی توجه خواهیم کرد. برخی از مسائل مهم بازده محاسباتی دینامیک دکارتی، در مراجع [۷، ۸] بررسی شده‌اند.

### نکته‌ای تاریخی درباره بازده

شمارش تعداد اعمال ضرب و جمع در معادله‌های (۶-۴۵) تا (۶-۵۳) هنگامی که اولین محاسبه ساده بیرونی، و آخرین محاسبه ساده درونی نیز در نظر گرفته شوند، چنین نتیجه می‌دهد:

$$\text{تعداد عملهای ضرب: } 126n - 99$$

$$\text{تعداد عملهای جمع: } 106n - 92$$

که در آن  $n$  تعداد رابطها (حداقل دو رابط) است. اگرچه این فرمولبندی هنوز تا حدی پیچیده است، اما در مقایسه با برخی از فرمولبندیهای پیشنهاد شده قبلی برای دینامیک بازوهای مکانیکی ماهر، کارایی بسیار دارد. نخستین فرمولبندی معادله‌های دینامیکی برای بازوی مکانیکی ماهر [۱۲، ۱۳]، با استفاده از روش لاگرانژ، نسبتاً ساده انجام گرفت و تعداد محاسبات آن تقریباً از این قرار بود [۱۴]

$$\text{تعداد عملهای ضرب: } 32n^2 + 86n^2 + 171n^2 + 53n - 128$$

$$\text{تعداد عملهای جمع: } 25n^2 + 66n^2 + 129n^2 + 42n - 96$$

در حالت معمول  $n = 6$ ، بازده روش تکراری نیوتن-اولیور تقریباً  $10^6$  برابر روش لاگرانژ است! البته هر دو روش باید به معادله‌های یکسان منتهی شوند، و محاسبات عددی نیز دقیقاً به یک نتیجه می‌رسند، اما ساختار معادله‌ها در دو حالت کاملاً متفاوت است. این بدان معنا نیست که روش لاگرانژ قادر به ایجاد معادله‌هایی با بازده خوب نیست، بلکه این مقایسه نشان می‌دهد که در فرمولبندی طرح محاسباتی برای حل این مسئله، باید به بازده توجه کرد. بازده نسبی روش پیشنهاد شده، از آنجا ناشی می‌شود که اولاً در آن محاسبات از رابطی به رابط دیگر تکرار می‌شوند، و ثانیاً کمیت‌های گوناگون در آن به گونه‌ای خاص معرفی شده‌اند [۱۵].

رنو [۱۶]، و لگوا<sup>۲</sup> و همکارانش [۱۷]، درباره فرمولبندی چگونگی توزیع جرم در رابطها، مطالبی بیان کرده‌اند. استیانکو<sup>۳</sup> و ووکوبراتوویچ<sup>۴</sup> [۱۸] نیز در هنگام مطالعه مدلسازی ماهیچه‌های دست و پای انسان، تحقیق درباره روش «نیوتن-اولیور»، به جای روش سنتی تر لاگرانژ، را آغاز کردند. اورین<sup>۵</sup> و همکارانش [۱۹] در کاربرد این روش در پاهای روباتهای راه رونده، از لحاظ بازده تجدید نظر کردند. اورین و همکارانش همچنین بازده را از طریق نوشتن نیروها و گشتاورها در چهارچوبهای رابط مرجع محلی به جای چهارچوب لختی، تا حدودی افزایش دادند. آنها ماهیت دنباله‌ای محاسبات را از یک رابط به رابط دیگر نیز مورد توجه قرار دادند، و امکان وجود یک

فرمولبندی تکراری با بازده بالا را حدس زدند. آرمسترانگ<sup>۱</sup> [۲۰] و لوه<sup>۲</sup>، واکر<sup>۳</sup>، و پال<sup>۴</sup> [۲] به جزئیات بازده پرداختند و الگوریتمی منتشر کردند که در پیچیدگی از درجه  $O(n)$  است. این الگوریتم از تنظیم محاسبات به صورتی تکراری به دست آمده است و در آن سرعتها و شتابهای رابطها در چهارچوبهای محلی رابط بیان شده‌اند. هالرباخ<sup>۵</sup> [۱۴] و سیلور<sup>۶</sup> [۱۵] نیز الگوریتمهای محاسباتی گوناگونی را مورد کاوش قرار داده‌اند. هالرباخ<sup>۷</sup> و سحر<sup>۸</sup> [۲۱] نشان دادند که برای هندسه‌های خاص و معین، از پیچیدگی این الگوریتم کاسته می‌شود.

### مقایسه بازده روش بسته و روش تکراری

اگر چه روش تکراری ارائه شده در این فصل، به منزله روشی کلی برای محاسبه دینامیکی هرگونه بازوی مکانیکی ماهر، بازده خوبی دارد، اما معادله‌های بسته به دست آمده برای بازویی خاص، معمولاً بازده بهتری دارند. بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با دو رابط در بخش ۶-۷ را در نظر بگیرید. با قرار دادن  $n = 2$  در روابط بخش ۶-۱۳، خواهیم دید که در روش تکراری، برای حل معادله‌های دینامیکی بازویی با دو رابط، در حالت کلی به ۱۵۳ عمل ضرب و ۱۲۰ عمل جمع نیاز خواهیم داشت. اما بازوی در نظر گرفته شده در اینجا بسیار ساده است، زیرا صفحه‌ای است و جرم رابطهای آن نیز نقطه‌ای فرض شده‌اند. پس اگر معادله‌های بسته به دست آمده در بخش ۶-۷ را در نظر بگیریم، خواهیم دید که محاسبات دینامیکی در این حالت، به حدود ۳۰ عمل ضرب و ۱۳ عمل جمع نیازمند است. این حالتی فرین<sup>۹</sup> است، زیرا بازوی در نظر گرفته شده بسیار ساده است، اما با این حال نشان می‌دهد که معادله‌های بسته نمادین می‌توانند بهترین بازده را در فرمولبندی دینامیکی داشته باشند. مقاله‌های بسیاری منتشر شده است و در آنها نشان داده‌اند که بازده روش دینامیکی بسته برای بازویی خاص، از بازده حتی بهترین روشهای عمومی نیز بالاتر است. [۲۲-۲۷].

بدین ترتیب، اگر بازوهای مکانیکی ماهر از لحاظ سینماتیکی و دینامیکی ساده طراحی شوند، معادله‌های دینامیکی ساده‌ای خواهند داشت. بازوی مکانیکی ساده از لحاظ سینماتیکی را می‌توان بازویی در نظر گرفت که در آن زاویه پیچش چندین رابط (یا کلیه رابطها) برابر با  $90^\circ$ ، یا  $-90^\circ$ ، و طول و انحراف بسیاری از رابطها برابر با صفر باشد. بازوی مکانیکی ساده از لحاظ دینامیکی نیز بازویی است که تانسور لختی هر رابط آن در چهارچوب  $\{C_i\}$  قطری باشد.

تنها عیب به دست آوردن معادلات به شکل بسته، آن است که در حال حاضر این کار به نیروی انسانی قابل توجهی نیاز دارد. از سوی دیگر، برنامه‌های کامپیوتری نمادین که قادرند معادله‌های بسته حرکت را برای هر مکانیزم به دست آورند، به طور خودکار از عبارتهای مشترک فاکتورگیری کنند، و جایگزینیهای مثلثاتی را انجام دهند، نیز نوشته شده‌اند [۲۵، ۲۸-۳۰].

1. Armstrong    2. Luh    3. Walker    4. Paul    5. Hollerbach    6. Silver  
7. Sahar    8. extreme

## دینامیک با بازده بالا برای شبیه‌سازی

هنگامی که معادله‌های دینامیکی به منظور شبیه‌سازی عددی یک بازوی مکانیکی ماهر حل می‌شوند، هدف به دست آوردن شتاب مفصلها با داشتن مکان، سرعت، و گشتاورهای ورودی به بازوست. بنابراین باید از یک روش محاسباتی با بازده بالا برای حل معادله‌های دینامیکی مطالعه شده در این فصل استفاده کرد، و همچنین روشهایی با بازده بالا را برای انتگرالگیری عددی و حل معادلات (برای به دست آوردن شتاب مفصلها) مورد توجه قرار داد. در مرجع [۳۱] چندین روش با بازده بالا برای شبیه‌سازی دینامیکی بازوهای مکانیکی ماهر، ارائه شده است.

## روشهای استفاده از حافظه کامپیوتر

در هر روش محاسباتی، می‌توان موازنه‌ای بین میزان محاسبات و استفاده از حافظه کامپیوتر، پدید آورد. در هنگام حل معادله دینامیکی یک بازوی مکانیکی ماهر (معادله ۶-۵۹)، به طور ضمنی فرض شده است که هر مقدار مورد نیاز  $\tau$ ، به طور همزمان و به سرعت از کمیت‌های  $\Theta$ ،  $\dot{\Theta}$ ، و  $\ddot{\Theta}$  قابل محاسبه است. در صورت تمایل، می‌توانیم به جای انجام این کار سنگین محاسباتی، از حافظه‌ای فوق‌العاده بزرگ استفاده کنیم و کلیه مقادیر ممکن  $\Theta$ ،  $\dot{\Theta}$ ، و  $\ddot{\Theta}$  را که قبلاً محاسبه شده‌اند، در آن ذخیره نماییم. سپس در هنگام نیاز به اطلاعات دینامیکی، جواب را از جدول تشکیل شده در این حافظه، به دست آوریم.

مقدار حافظه مورد نیاز برای این حالت، بسیار زیاد است. فرض کنید گستره حرکتی هر زاویه مفصلی به ده قطعه منقطع تقسیم شده است. به همین ترتیب فرض کنید سرعتها و شتابها نیز هر یک به ده گستره تقسیم (کوانتیده) شده‌اند. برای یک بازوی مکانیکی ماهر شش مفصله، تعداد سلولها در فضای کوانتیده  $(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta})$  برابر با  $(10 \times 10 \times 10)^6$  است. در هر یک از این سلولها، شش مقدار برای گشتاور وجود دارد. با فرض آنکه هر مقدار گشتاور به یک «کلمه» کامپیوتری نیاز داشته باشد، اندازه حافظه برابر  $6 \times 10^{18}$  کلمه خواهد بود! همچنین، مقادیر از قبل محاسبه شده جدول فوق، باید به ازای تغییر جرم بار، دوباره محاسبه شوند (یا می‌توان برای در نظر گرفتن کلیه بارهای ممکن، یک بعد (دیمانسیون) اضافی در نظر گرفت).

روشهای حل میانی بسیاری موجودند که به طرق مختلف بین حافظه و سایر محاسبات، موازنه برقرار می‌کنند. مثلاً اگر ماتریسهای موجود در معادله (۶-۶۳) از قبل محاسبه شوند، این جدول بر حسب  $\Theta$  تنها یک بعد (به جای سه بعد) خواهد داشت. پس از آنکه توابع  $\Theta$  در جدول جستجو شدند، تعدادی محاسبه (بر اساس معادله ۶-۶۳) انجام می‌شود. برای کسب اطلاعات بیشتر، و آشنا شدن با سایر روشهای پارامتری کردن این مسئله، مرجعهای [۳] و [۶] را ببینید.

## مراجع

- [1] I. Shames, *Engineering Mechanics*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1967.

- [2] J.Y.S. Luh, M.W. Walker, and R.P. Paul, "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators," *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1980.
- [3] M. Raibert, "Mechanical Arm Control Using a State Space Memory," SME paper MS77-750, 1977.
- [4] K.R. Symon, *Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.
- [5] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1969.
- [6] O. Khatib, "Commande Dynamique dans L'Espace Operationnel des Robots Manipulateurs en Presence d'Obstacles," These de Docteur-Ingenieur. Ecole Nationale Superieure de l'Aeronautique et de L'Espace (ENSAE). Toulouse.
- [7] O. Khatib, "Dynamic Control of Manipulators in Operational Space," Sixth IFTOMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms, New Delhi, December 15-20, 1983.
- [8] O. Khatib, "The Operational Space Formulation in Robot Manipulator Control," 15th ISIR, Tokyo, September 11-13, 1985.
- [9] E. Schmitz, "Experiments on the End-Point Position Control of a Very Flexible One-Link Manipulator," Unpublished Ph.D. Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, SUDAAR No. 547, June 1985.
- [10] W. Book, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, 1984.
- [11] S. Conte and C. DeBoor, *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1972.
- [12] J. Uicker, "On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using  $4 \times 4$  Matrices," Unpublished Ph.D dissertation, Northwestern University, Evanston, Ill., 1965.

- [13] J. Uicker, "Dynamic Behaviour of Spatial Linkages," *ASME Mechanisms*, Vol. 5, No. 68, pp. 1-15.
- [14] J. M. Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity," in *Robot Motion*, M. Brady et al., Editors, MIT Press, 1983.
- [15] W. Silver, "On the Equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 2, pp. 60-70.
- [16] M. Renaud, "Contribution à l'Etude de la Modélisation et de la Commande des Systèmes Mécaniques Articulés" Thèse de Docteur Ingénieur. Université Paul Sabatier, Toulouse, December 1975.
- [17] A. Liegeois, W. Khalil, J.M. Dumas, and M. Renaud, "Mathematical and Models of Interconnected Mechanical Systems," Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators, Poland, 1976.
- [18] Y. Stepanenko and M. Vukobratovic, "Dynamics of Articulated Open-Chain Active Mechanisms," *Math-Biosciences* Vol. 28, 1976, pp. 137-170.
- [19] D.E. Orin et al, "Kinematic and Kinetic Analysis of Open-Chain Linkages Utilizing Newton-Euler Methods," *Math-Biosciences* Vol. 43, 1979, pp. 107-130.
- [20] W.W. Armstrong, "Recursive Solution to the Equations of Motion of an N-Link Manipulator," *Machines and Mechanisms*, Montreal, July 1979.
- [21] J.M. Hollerbach and G. Sahar, "Wrist-Partitioned Inverse Accelerations and Manipulator Dynamics," MIT AI Memo No. 717, April 1983.
- [22] T.K. Kanade, P.K. Khosla, and N. Tanaka, "Real-Time Control of the CMU Direct Drive Arm II Using Customized Inverse Dynam-

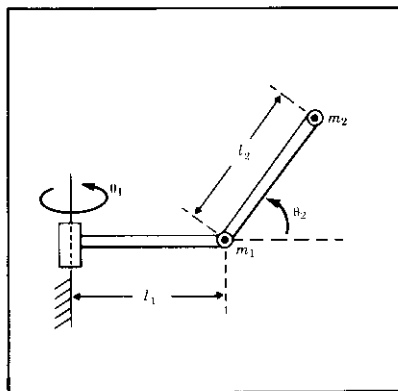
- ics, " *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, December 1984.
- [23] A. Izaguirre and R.P. Paul, "Computation of the Inertial and Gravitational Coefficients of the Dynamic Equations for a Robot Manipulator with a Load," *Proceedings of the 1985 International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1024-1032, St. Louis, March 1985.
- [24] B. Armstrong, O. Khatib, and J. Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm," *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, April 1983, p. 510-518.
- [25] J.W. Burdick, "An Algorithm for Generation of Efficient Manipulator Dynamic Equations," *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, April 7-11, 1986, pp. 212-218.
- [26] T.R. Kane, and D.A. Levinson, "The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 2, No. 3, Fall 1983, pp. 3-20.
- [27] M. Renaud, "An Efficient Iterative Analytical Procedure for Obtaining a Robot Manipulator Dynamic Model," First International Symposium of Robotics Research, N.H., August 1983.
- [28] W. Schiehlen, "Computer Generation of Equations of Motion" in *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, E.J. Haug, Editor, Springer-Verlag, 1984.
- [29] G. Cesareo, F. Nicolo and S. Nicosia, "DYMIR: A Code for Generating Dynamic Model of Robots," in *Advanced Software in Robotics*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1984.
- [30] J. Murray, and C. Neuman, "ARM: An Algebraic Robot Dynamic Modelling Program," IEEE International Conference on Robotics, Atlanta, March 1984.



- [31] M. Walker and D. Orin, "Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 104, 1982.

## تمرینها

- ۱-۶ [۱۲] تانسور لختی را برای استوانه‌ای قائم و همگن (با چگالی یکنواخت) نسبت به چهارچوبی که مبدأ آن در مرکز جرم استوانه است، به دست آورید.
- ۲-۶ [۳۲] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط در بخش ۶-۷ را، در حالتی که هر رابط به صورت مکعب مستطیلی توپر با چگالی یکنواخت مدل‌سازی می‌شود، تعیین کنید. ابعاد هر رابط  $l_i$ ،  $w_i$  و  $h_i$ ، و جرم کل آن  $m_i$  است.
- ۳-۶ [۴۳] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر با ۳ رابط در تمرین ۳-۳ از فصل ۳ را به دست آورید. هر رابط را به صورت مکعب مستطیلی توپر و همگن با ابعاد  $l_i$ ،  $w_i$  و  $h_i$ ، و جرم کل  $m_i$  در نظر بگیرید.
- ۴-۶ [۱۳] مجموعه معادله‌های متناظر با معادلات (۶-۴۵) تا (۶-۵۳) را برای حالتی که مکانیزم ممکن است مفصلهای کشویی داشته باشد، بنویسید.
- ۵-۶ [۳۰] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر غیر صفحه‌ای با دو رابط را که در شکل ۸-۶ نشان داده شده است، تعیین کنید. فرض کنید کل جرم هر رابط را می‌توان به صورت نقطه‌ای در انتهای آن رابط در نظر گرفت. جرم رابطها  $m_1$  و  $m_2$  و طول آنها  $l_1$  و  $l_2$  است. این بازوی مکانیکی مانند دو رابط اول بازوی مکانیکی تمرین ۳-۳ است. فرض



شکل ۸-۶ بازوی با دو رابط و جرمهای نقطه‌ای در انتهای هر رابط.

- کنید در هر مفصل اصطکاک و یسکوز با ضریبهای  $v_1$  و  $v_2$  اعمال می‌شود.
- ۶-۶ [۳۲] شکل فضای دکارتی معادله‌های دینامیکی بازوی صفحه‌ای با دو رابط را، که در بخش ۶-۷ معرفی شد، برحسب چهارچوب پایه آن به‌دست آورید. راهنمایی: مثال ۵-۶ را ببینید، اما از ژاکوبی نوشته شده در چهارچوب پایه استفاده کنید.
- ۷-۶ [۱۸] برای ذخیره معادله‌های دینامیکی یک بازو با سه رابط عمومی در یک جدول، چند خانه حافظه لازم است؟ مکان، سرعت، و شتاب هر مفصل را به شازده گستره تقسیم‌بندی کنید و هر فرضی را که لازم می‌دانید، در نظر بگیرید.
- ۸-۶ [۳۲] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط نشان داده شده در شکل ۴-۶ را به‌دست آورید. تانسور لختی رابط ۱ چنین است

$$c_1 I = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

فرض کنید  $m_2$ ، کل جرم رابط ۲، در نقطه‌ای واقع بر مجری نهایی قرار دارد و نیروی گرانی در خلاف جهت  $\hat{Z}_1$  و به سمت پایین است.

- ۹-۶ [۳۷] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر با سه رابط و یک مفصل کشویی را که در شکل ۹-۳ نشان داده شده است، به‌دست آورید. تانسور لختی رابط ۱ چنین است

$$c_1 I = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

$m_2$ ، جرم رابط ۲، به‌صورت نقطه‌ای در مبدأ چهارچوب آن رابط قرار دارد. تانسور لختی رابط ۳ نیز چنین است

$$c_3 I = \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix}$$

فرض کنید نیروی گرانی در خلاف جهت  $\hat{Z}_1$  وارد می‌شود، و در هر مفصل اصطکاک و یسکوز با ضریب اصطکاک  $v_i$  عمل می‌کند.

- ۱۰-۶ [۳۵] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهرترین ۸-۶ را در فضای دکارتی به‌دست آورید. این معادله‌ها را در چهارچوب  $\{2\}$  بنویسید.

۱۱-۶ [۲۰] تانسور لغتی یک بازوی مکانیکی ماهر با یک رابط چنین است

$$C_{\lambda I} = \begin{bmatrix} I_{xx\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\lambda} \end{bmatrix}$$

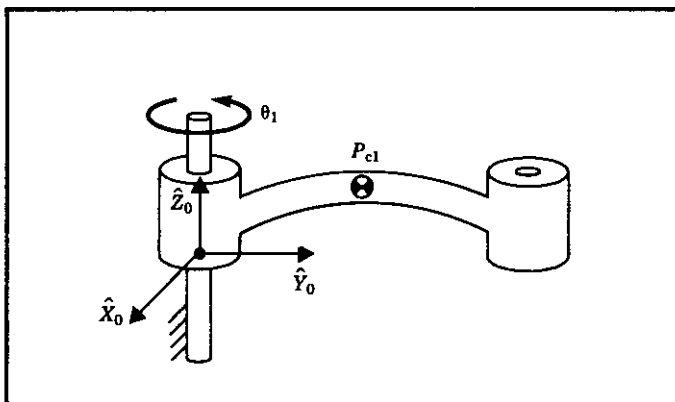
فرض کنید که این فقط لغتی خود رابط است. اگر لنگر لغتی آرمیچر موتور  $I_m$ ، و نسبت (ضریب) چرخنده برابر با ۱۰۰ باشد، لنگر لغتی کل از دید ناظر واقع بر محور موتور چقدر است [۱]؟

۱۲-۶ [۲۰] بازوی مکانیکی ماهر با یک درجه آزادی در شکل ۹-۶، جرمی برابر با  $m = ۱$  دارد و مرکز جرم آن در نقطه زیر است

$${}^1P_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تانسور لغتی این بازو چنین است

$${}^C I_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



شکل ۹-۶ بازوی مکانیکی ماهر با یک رابط (تمرین ۱۲-۶).

زاویه مفصلی  $\theta_1$ ، که در  $t = 0$  در حال سکون است، طبق تابع زمانی زیر برحسب رادیان تغییر می‌کند

$$\theta_1(t) = bt + ct^2$$

شتاب زاویه‌ای رابط و شتاب خطی مرکز جرم آن را برحسب چهارچوب  $\{1\}$  به صورت تابعی از  $t$  به دست آورید.

۱۳-۶ [۴۰] معادله‌های دینامیکی دکارتی بازوی مکانیکی ماهر غیرصفحه‌ای با دو رابط را، که در شکل ۸-۶ نشان داده شده است، تعیین کنید. فرض کنید کل جرم هر رابط را می‌توان متمرکز در انتهای آن در نظر گرفت. جرم رابطها  $m_1$  و  $m_2$ ، و طول آنها  $l_1$  و  $l_2$  است. این بازو را می‌توان معادل با دو رابط اول در بازوی تمرین ۳-۳ در نظر گرفت. همچنین، فرض کنید در هر دو رابط اصطکاک ویسکوز با ضرایب اصطکاک  $v_1$  و  $v_2$  عمل می‌کند. معادله‌های دینامیکی دکارتی را نسبت به چهارچوب  $\{3\}$ ، که مبدأ آن در نوک بازوی مکانیکی قرار دارد، و جهت آن با جهت چهارچوب رابط  $\{2\}$  یکسان است، بنویسید.

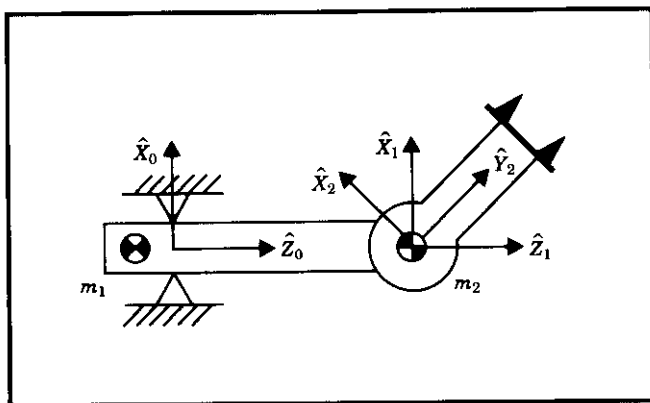
۱۴-۶ [۱۸] معادله‌های زیر برای بازوی مکانیکی ماهری با دو درجه آزادی از نوع RP به دست آمده است. اما برخی از جمله‌ها آشکارا نادرست‌اند. جمله‌های نادرست را مشخص کنید

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_1(d_1^2 + d_2)\ddot{\theta}_1 + m_2 d_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_1 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 \\ &\quad + g \cos(\theta_1) [m_1(d_1 + d_2 \dot{\theta}_1) + m_2(d_2 + \dot{d}_2)] \\ \tau_2 &= m_1 \dot{d}_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ddot{d}_2 - m_1 d_1 \dot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2(d_2 + 1)g \sin(\theta_1)\end{aligned}$$

۱۵-۶ [۲۸] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر RP در مثال ۵-۶ را با استفاده از روش نیوتن-اولر به جای روش لاگرانژ، به دست آورید.

۱۶-۶ [۲۵] معادله‌های حرکت بازوی مکانیکی ماهر PR نشان داده شده در شکل ۱۰-۶ را به دست آورید. از اصطکاک صرف نظر کنید، اما گرانی را در نظر بگیرید (در اینجا  $\hat{X}$  به طرف بالاست). تانسورهای لختی رابطها قطری، و لنگرهای لختی  $I_{xx1}$ ،  $I_{yy1}$ ،  $I_{zz1}$  و  $I_{xx2}$ ،  $I_{yy2}$ ،  $I_{zz2}$  هستند. مرکز جرم هر رابط، چنین داده شده است:

$${}^1P_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_1 \end{bmatrix}$$



شکل ۶-۱۰ بازی مکانیکی ماهر PR در تمرین ۶-۱۶.

$${}^r P_{C_i} = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

۱۷-۶ [۴۰] جمله‌های مربوط به سرعت را، که در معادله دینامیکی بازی مکانیکی ماهر ظاهر می‌شوند، می‌توان به صورت حاصل ضرب یک ماتریس در یک بردار به صورت زیر نوشت

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = V_m(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta}$$

که در آن زیرنویس  $m$  به معنی «صورت ماتریسی» است. نشان دهید که بین مشتق زمانی ماتریس جرم بازو و  $V_m(\cdot)$  رابطه زیر وجود دارد

$$\dot{M}(\Theta) = 2V_m(\Theta, \dot{\Theta}) - S$$

که در آن  $S$  ماتریسی پاد متقارن است.

۱۸-۶ [۱۵] دو ویژگی را که هر مدل اصطکاکی معقول (یعنی جمله  $F(\Theta, \dot{\Theta})$  در معادله (۱۱۴-۶)) باید دارا باشد، بیان کنید.

۱۹-۶ [۲۸] تمرین ۵-۶ را با استفاده از معادله‌های لاگرانژ تکرار کنید.

۲۰-۶ [۲۸] معادله‌های دینامیکی بازی مکانیکی ماهر با دو درجه آزادی در بخش ۶-۷ را با استفاده از روش لاگرانژ، به دست آورید.

## تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۶)

۱. معادله‌های دینامیکی حرکت بازوی مکانیکی ماهر با ۳ رابط (در مثال ۳-۳) را به دست آورید. به عبارت دیگر، بخش ۶-۷ را به حالت بازوی با ۳ رابط، تعمیم دهید. مقادیر عددی زیر، بازو را توصیف می‌کنند

$$l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m},$$

$$m_1 = 4.6 \text{ Kg}$$

$$m_2 = 2.3 \text{ Kg}$$

$$m_3 = 1.0 \text{ Kg}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

در دو رابط اول، فرض می‌کنیم جرم در انتهای رابط متمرکز شده است. در رابط ۳، فرض می‌کنیم مرکز جرم در مبدأ چهارچوب {۳}، یعنی در ابتدای رابط، قرار دارد. تانوسور لختی رابط ۳ چنین است

$${}^0I = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ Kg m}^2$$

بردارهای نشان‌دهنده مکان مرکز جرم نسبت به چهارچوب هر رابط، عبارت‌اند از

$${}^1P_{C_1} = l_1 \hat{X}_1$$

$${}^2P_{C_2} = l_2 \hat{X}_2$$

$${}^3P_{C_3} = 0$$

۲. برای بازوی مکانیکی ماهر با ۳ رابط، یک شبیه‌سازنده (برنامه‌ای کامپیوتری برای شبیه‌سازی) بنویسید. برای محاسبه انتگرالهای عددی، از روش ساده‌ی اویلر استفاده کنید (بخش ۶-۱۲) را ببینید). برای اینکه برنامه به صورت واحدهای مستقل (مدولار) باقی بماند، زیربرنامه زیر را تعریف کنید

Procedure UPDATE (VAR tau: vec3; VAR period: real; VAR theta, thetadot: vec3);

که در آن "tau" دستورگشتاور داده شده به بازوست (در اینجا همواره صفر است)، "period" مدت زمانی است که می‌خواهید زمان را پیش ببرید (برحسب ثانیه)، و

“theta” و “thetadot” نشان دهنده حالت بازوی مکانیکی ماهرند. با هر بار فراخواندن UPDATE، متغیرهای theta و thetadot به اندازه “period” ثانیه تغییر می کنند، و مقادیر جدیدی به خود می گیرند. توجه کنید که “period” معمولاً از فاصله زمانی  $\Delta t$  (فاصله انتگرالگیری به کار رفته) طولانی تر است. مثلاً ممکن است فاصله  $\Delta t$  را برابر با ۰/۰۰۱ ثانیه در نظر بگیرید، در حالی که می خواهید مکان و سرعت بازو را فقط در هر ۰/۱ ثانیه چاپ کنید.

به منظور امتحان درستی شبیه سازی خود، دستورات گشتاور را برای تمام لحظات، برابر با صفر قرار دهید و سه آزمون زیر را به عمل آورید

الف) مکان اولیه بازو را چنین فرض کنید

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [-90 \ 0 \ 0]$$

برای چند ثانیه برنامه شبیه سازی را اجرا کنید. آیا حرکت بازو همان حرکتی است که انتظار دارید؟

ب) مکان اولیه بازو را چنین فرض کنید

$$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3] = [30 \ 30 \ 10]$$

برای چند ثانیه برنامه شبیه سازی را اجرا کنید. آیا حرکت بازو همان حرکتی است که انتظار دارید؟

ج) در هر مفصل بازوی مکانیکی، اصطکاک را ویسکوز در نظر بگیرید. به عبارت دیگر، به معادله دینامیکی هر مفصل، عبارتی جدید به شکل  $\tau_f = v\dot{\theta}$ ، که در آن  $v = 5/^\circ$  نیوتن-متر-ثانیه است، بیفزایید. سپس آزمون (ب) را دوباره تکرار کنید. آیا حرکت حاصل با آنچه انتظار دارید، یکی است؟







## تولید مسیر

### ۷-۱ مقدمه

در این فصل، روشهای محاسبه یک مسیر در فضای چند بعدی را، که توصیف کننده حرکت مطلوب بازوی مکانیکی ماهر است، بررسی می‌کنیم. در اینجا منظور از مسیر، مکان، سرعت، و شتاب مربوط به هر درجه آزادی در زمانی معین است.

تولید مسیر چگونگی مشخص کردن یک مسیر در فضا توسط انسان را نیز شامل می‌شود. چنانچه خواهیم توصیف حرکت بازوی مکانیکی را برای شخص استفاده کننده از سیستم رباتی ساده کنیم، نباید از وی انتظار نوشتن توابع پیچیده‌ای از فضا و زمان را داشته باشیم، بلکه باید از او تنها قابلیت تولید مسیرهای مشخص را با توصیفهایی ساده از حرکت مورد نظر خواستار شویم، و جزئیات انجام کار را به عهده سیستم رباتی بگذاریم. مثلاً ممکن است استفاده کننده تنها مکان هدف مورد نظر و موقعیت مجری نهایی را مشخص کند، و تصمیم‌گیری درباره شکل دقیق مسیر، زمان لازم برای رسیدن به هدف، منحنی تغییرات سرعت، و دیگر جزئیات را به عهده سیستم رباتی بگذارد.

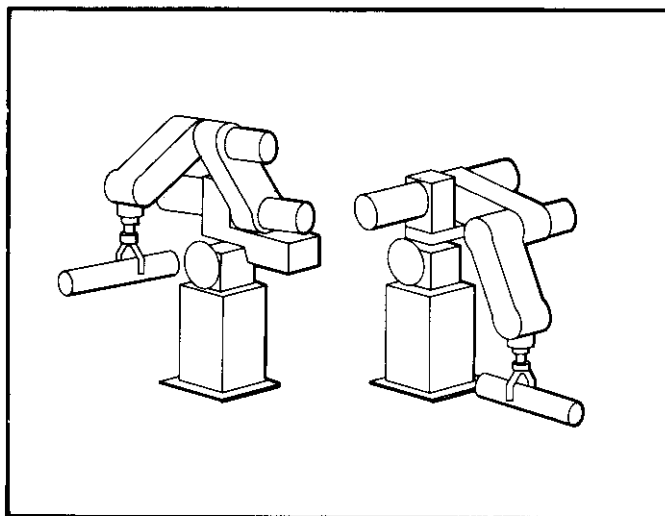
در این فصل پس از تعیین مسیرها، چگونگی نمایش آنها در کامپیوتر را بررسی خواهیم کرد، و سپس مسئله محاسبه مسیر، با توجه به چگونگی نمایش آن در داخل کامپیوتر، یا مسئله تولید مسیر حل خواهد شد. تولید مسیر همزمان با اجرای برنامه کامپیوتری انجام می‌گیرد، و در کلیترین حالت، مکان، سرعت، و شتاب محاسبه می‌شود. از آنجا که محاسبه مسیرها به وسیله کامپیوترهای رقمی (دیجیتال) صورت می‌گیرد، نقاط مسیر با آهنگی معین به نام آهنگ روزآمد کردن مسیر محاسبه خواهند شد. در سیستمهای بازوی مکانیکی معمولی، این آهنگ بین  $20^\circ$  و  $200^\circ \text{ Hz}$  است.

## ۲-۷ ملاحظات کلی درباره توصیف و تولید مسیر

در بیشتر حالتها، حرکات بازوی مکانیکی ماهر را به صورت حرکت چهارچوب ابزار  $\{T\}$  نسبت به چهارچوب ایستگاه  $\{S\}$  در نظر می‌گیریم. این در واقع همان ترتیبی است که استفاده کننده نهایی از سیستم نیز در ذهن خود رعایت می‌کند. طراحی یک سیستم توصیف و تولید مسیر، چند مزیت مهم دارد.

هنگامی که مسیرها را به صورت حرکت چهارچوب ابزار نسبت به چهارچوب ایستگاه بیان می‌کنیم، توصیف حرکت را مستقل از هر گونه روبات، مجری نهایی، یا قطعه کار خاص در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب، انعطاف‌پذیری سیستم افزایش می‌یابد، و می‌توان توصیف مسیری یکسان را برای روباتهای مختلف، یا برای روباتهای یکسان با اندازه ابزار متفاوت، به کار برد. همچنین، می‌توان حرکتها را نسبت به یک چهارچوب ایستگاه متحرک (مانند تسمه نقاله) نیز بیان کرد. این کار، چنانکه پیش از این گفته شد، با توصیف حرکتها نسبت به چهارچوب ایستگاه، و با در نظر گرفتن تغییر  $\{S\}$  نسبت به زمان، همزمان با اجرای برنامه انجام‌پذیر است.

چنانکه در شکل ۱-۷ دیده می‌شود، مسئله اساسی، حرکت دادن بازوی مکانیکی ماهر از مکان اولیه به مکان نهایی مورد نظر است. به عبارت دیگر، می‌خواهیم چهارچوب ابزار را از محل فعلی آن،  $\{T_{initial}\}$ ، به محل نهایی مورد نظر،  $\{T_{final}\}$ ، حرکت دهیم. توجه کنید که این حرکت، در حالت کلی هم تغییر مکان و هم تغییر جهتگیری ابزار را نسبت به ایستگاه در بر می‌گیرد. گاهی



شکل ۱-۷ در حرکت از مکان اولیه به سوی هدف مطلوب، بازوی مکانیکی ماهر باید مسیری هموار را دنبال کند.

تعیین پیکربندی نهایی به تنهایی کافی نیست، و لازم است حرکت با جزئیات بسیار بیشتر مشخص شود. یکی از راههای بیان جزئیات بیشتر در توصیف مسیر، وارد کردن نقاط بینابینی با ترتیب خاص، بین مکانهای اولیه و نهایی است. بدین ترتیب، چهارچوب ابزار، در پیمودن مسیر خود باید از مکانها و جهتگیریهایی تعریف شده به وسیله نقاط بینابینی، بگذرد. هر یک از این نقاط بینابینی، در واقع چهارچوبی است که مکان و جهتگیری ابزار را نسبت به ایستگاه بیان می کند. از این پس، نام نقاط مسیر را برای اشاره به کلیه نقاط بینابینی، شامل نقاط اولیه و نهایی، به کار می بریم. به خاطر داشته باشید که اگر چه غالباً از واژه «نقاط» استفاده می کنیم، اما در واقع هر نقطه چهارچوبی با مکان و جهتگیری معین را نشان می دهد. استفاده کننده ممکن است مایل باشد علاوه بر این قیدهای فضایی، عوامل زمانی حرکت را نیز مشخص کند. مثلاً می توان زمان لازم برای رسیدن از یک نقطه بینابینی به نقطه بینابینی دیگر را در توصیف مسیر مشخص کرد.

معمولاً حرکت بازوی مکانیکی ماهر باید هموار باشد. در اینجا منظور از تابع هموار، تابعی پیوسته با مشتق اولیه پیوسته است. گاهی باید مشتق دوم تابع نیز پیوسته باشد. حرکتهای خشن و ناگهانی، باعث سایدگی مکانیزم می شود و با ایجاد حالت تشدید، در آن ارتعاشات زیان آور پدید می آورد. برای اطمینان از هموار بودن مسیر، باید در آن نوعی قید فضایی و زمانی را در بین نقاط بینابینی در نظر گرفت.

در این مرحله، انتخابهای متعددی وجود دارد، و می توان مسیرها را به روشهای گوناگون مشخص کرد. هر تابع همواری از زمان که از نقاط بینابینی بگذرد، می تواند برای تعیین شکل دقیق مسیر به کار رود. در این فصل، درباره تعدادی از این توابع ساده بحث می کنیم. در مرجعهای [۱]، [۲]، و [۱۹-۱۳] می توان رهیافتهای دیگری را یافت.

### ۳-۷ روشهای فضای مفصلی

در این بخش، روشهایی را برای تولید مسیر در نظر می گیریم که شکل مسیر را (در فضا و زمان) برحسب توابعی از زاویه های مفصلی توصیف می کنند.

هر نقطه از مسیر، معمولاً برحسب مکان و جهتگیری مطلوب برای چهارچوب ابزار  $\{T\}$  نسبت به چهارچوب ایستگاه  $\{S\}$ ، مشخص می شود. سپس هر یک از این نقاط بینابینی، با استفاده از معادله های سینماتیکی وارون، به مجموعه ای از زوایای مفصلی مورد نظر، «تبدیل» می شود. در مرحله بعد، برای هر یک از  $n$  مفصل، باید تابعی هموار پیدا کرد که از نقاط بینابینی گذشته، به نقطه هدف ختم شود. زمان لازم برای پیمودن هر قطعه از مسیر، برای کلیه مفصلها یکسان است، به طوری که همه آنها همزمان به نقطه بینابینی می رسند و مکان دکارتی مورد نظر برای  $\{T\}$  را در هر نقطه بینابینی به دست می دهند. تعیین تابع زاویه مفصلی دلخواه برای مفصلی خاص، به تابعهای مفصلهای دیگر بستگی ندارد، و تنها مدت زمان مشخص شده برای هر مفصل یکسان است.

بدین ترتیب، روشهای فضای مفصلی، مکان و جهتگیری مورد نظر را در نقاط بینابینی فراهم

می‌آورند. شکل مسیر در بین نقاط بینابینی، اگر چه در فضای مفصلی ساده است، اما چنانچه در فضای دکارتی توصیف شود، پیچیده خواهد شد. معمولاً روشهای فضای مفصلی، از لحاظ محاسباتی ساده‌ترین روشهایند، و چون بین فضای مفصلی و فضای دکارتی هیچ‌گونه تناظر یک‌به‌یک پیوسته‌ای برقرار نمی‌سازیم، نقاط تکین مکانیزم اشکالی پدید نخواهند آورد.

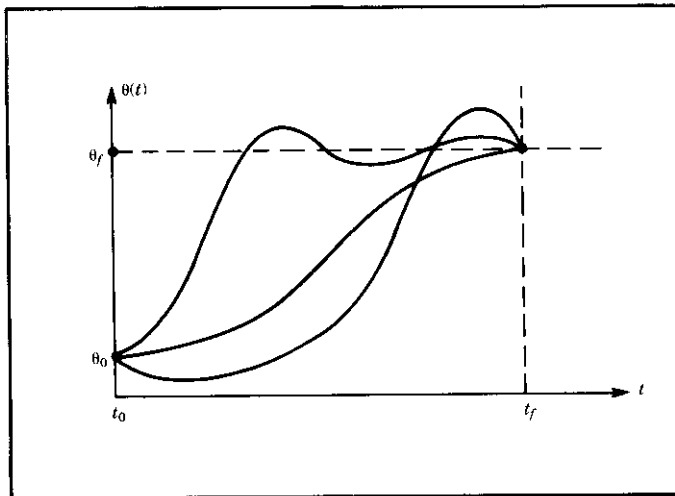
### چند جمله‌ایهای درجه سوم

می‌خواهیم چهارچوب ابزار را از مکان اولیه آن، در مدت زمانی مشخص، به مکان نهایی ببریم. با حل معادله‌های سینماتیکی وارون، می‌توان زوایای مفصلی متناظر با مکان و جهتگیری هدف را محاسبه کرد. مکان اولیه بازوی مکانیکی ماهر نیز، به صورت مجموعه‌ای از زوایای مفصلی، معلوم است. در اینجا هدف یافتن تابعی برای هر مفصل است که مقدار آن در  $t$  برابر با مکان اولیه مفصل، و در  $t_f$  برابر با مکان هدف مورد نظر برای مفصل باشد. چنانکه در شکل ۷-۲ دیده می‌شود، می‌توان برای درونیایی مقدار زاویه مفصلی، از تابعهای هموار گوناگون  $\theta(t)$  استفاده کرد. برای ایجاد حرکتی هموار و یگانه، حداقل چهار قید روشن برای  $\theta(t)$  وجود دارند. دو قید مربوط به مقادیر اولیه و نهایی تابع اند

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(t_f) = \theta_f \quad (7-1)$$

و دو قید دیگر، مربوط به پیوسته بودن تابع سرعت اند، که در اینجا به مفهوم صفر بودن سرعت



شکل ۷-۲ چند مسیر ممکن برای یک مفصل.

اولیه و سرعت نهایی است

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= 0\end{aligned}\quad (2-7)$$

این چهار قید را می‌توان به وسیله یک تابع چندجمله‌ای حداقل از درجه سوم، ارضا کرد. با توجه به اینکه هر چندجمله‌ای درجه سوم چهارضرب دارد، می‌توان قیده‌های (۱-۷) و (۲-۷) را در آن منظور کرد. این قیده‌ها چندجمله‌ای درجه سوم خاص و یکتایی را مشخص می‌کنند. شکل کلی هر چندجمله‌ای درجه سوم چنین است

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (3-7)$$

پس تابعهای سرعت و شتاب مفصل در امتداد این مسیر عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t\end{aligned}\quad (4-7)$$

با ترکیب معادله‌های (۳-۷) و (۴-۷) و چهار قید مورد نظر، چهار معادله با چهار مجهول به شکل زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2\end{aligned}\quad (5-7)$$

با حل این دستگاه معادلات، جوابهای  $a_i$  حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)\end{aligned}\quad (6-7)$$

با به کار بردن رابطه (۶-۷)، می‌توان چندجمله‌ای درجه سوم را تعریف کرد که هر مکان زاویه مفصلی اولیه را به هر مکان نهایی مطلوب برای آن مربوط سازد. این تابع، برای حالتی به دست

آمده است که در آن سرعت اولیه و سرعت نهایی مفصل صفر است.

### ■ مثال ۷-۱

روباتی با یک رابط، و مفصل لولایی، در وضعیت  $\theta = ۱۵^\circ$  درجه ساکن است. می‌خواهیم مفصل آن را، در مدت ۳ ثانیه، در مسیری هموار به وضعیت  $\theta = ۷۵^\circ$  درجه حرکت دهیم. ضریبهای چندجمله‌ای درجه سوم را به‌دست آورید که این حرکت را انجام دهد، و بازو را در نقطه هدف به حالت سکون در آورد. منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب مفصل را به‌صورت تابعی از زمان رسم کنید.

با قرار دادن مقادیر معلوم در رابطه‌های (۷-۶)، می‌توان ضریبها را چنین محاسبه کرد

$$\begin{aligned} a_0 &= ۱۵/^\circ \\ a_1 &= 0/^\circ \\ a_2 &= ۲۰/^\circ \\ a_3 &= -۴/۴۴ \end{aligned} \quad (۷-۷)$$

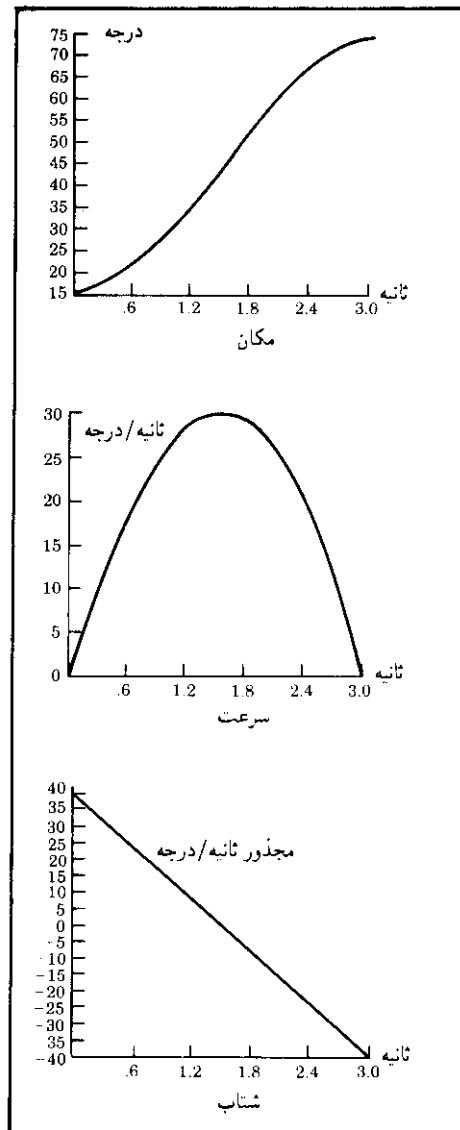
با استفاده از (۷-۳) و (۷-۴)، داریم

$$\begin{aligned} \theta(t) &= ۱۵/^\circ + ۲۰/^\circ t^2 - ۴/۴۴ t^3 \\ \dot{\theta}(t) &= ۴۰/^\circ t - ۱۳/۳۳ t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= ۴۰/^\circ - ۲۶/۶۶ t \end{aligned} \quad (۸-۷)$$

شکل ۷-۳ منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب این حرکت را که با بسامد  $۴۰ \text{ Hz}$  نمونه‌برداری شده است نشان می‌دهد. توجه کنید که منحنی تغییرات سرعت برای هر تابع درجه سوم به شکل سهمی، و منحنی تغییرات شتاب به شکل خط راست است. ■

### چندجمله‌ایهای درجه سوم برای مسیری با نقاط بینابینی

تاکنون حرکتی را که به‌وسیله مدت زمان مطلوب و نقطه هدف نهایی توصیف می‌شدند، در نظر گرفته‌ایم. در حالت کلی، می‌خواهیم مسیرهایی را که شامل نقاط بینابینی هستند، مشخص و بررسی کنیم. اگر بازوی مکانیکی در هر نقطه بینابینی به حال سکون در آید، آن‌گاه می‌توانیم حل درجه سوم به‌دست آمده در بخش ۷-۳ را برای آن به‌کار ببریم. اما معمولاً هدف آن است که بدون توقف از نقاط بینابینی بگذریم. پس باید روشی کلیتر را برای یافتن چندجمله‌ایهای درجه سوم که قیدهای مسیر را شامل می‌شوند، ارائه کنیم.



شکل ۳-۷ منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب برای قطعه‌ای از مسیر درجه سوم که از حالت سکون آغاز می‌شود و در حالت سکون پایان می‌یابد.

مانند نقطه هدف، هر نقطه بینابینی نیز برحسب مکان و جهتگیری مطلوب چهارچوب ابزار نسبت به چهارچوب ایستگاه، مشخص می‌شود. هر یک از این نقاط بینابینی، با به‌کارگیری سینماتیک وارون، به مجموعه‌ای از زوایای مفصلی مطلوب «تبدیل» می‌شود. پس از آن، مسئله محاسبه چندجمله‌ایهای درجه سوم را بررسی می‌کنیم که نقاط بینابینی هر مفصل را به‌طور هموار به یکدیگر متصل می‌کنند.

اگر سرعت‌های مطلوب مفصلها در نقاط بینابینی معلوم باشد، آن‌گاه می‌توانیم چند جمله‌ایهای درجه سوم را مانند قبل به‌دست آوریم. اما در اینجا قیدهای سرعت در هر انتها صفر نیستند، بلکه مقداری معلوم‌اند. پس قیدهای مطرح شده در رابطه‌های (۷-۲) به‌صورت زیر تغییر می‌کنند

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f\end{aligned}\quad (9-7)$$

چهار معادله‌ای که این چندجمله‌ای کلی را توصیف می‌کنند، عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2\end{aligned}\quad (10-7)$$

با حل این معادله‌ها، مقادیر  $a_i$  چنین به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)\end{aligned}\quad (11-7)$$

با استفاده از رابطه (۱۱-۷)، می‌توان چندجمله‌ای درجه سوم را که مکان اولیه را به مکان نهایی متصل می‌سازد، برای سرعت اولیه و سرعت نهایی دلخواه، محاسبه کرد.

اگر سرعت‌های مفصلی مطلوب در هر نقطه بینابینی را بدانیم، آن‌گاه با به‌کارگیری رابطه (۱۱-۷) برای هر قطعه از مسیر، می‌توانیم چندجمله‌ایهای درجه سوم مورد نظر را به‌دست آوریم. روشهای متعددی برای مشخص کردن سرعت‌های مطلوب در نقاط بینابینی وجود دارند:

۱. استفاده کننده سرعت مورد نظر در هر نقطه بینابینی را به‌صورت سرعت خطی و زاویه‌ای



چهارچوب ابزار (در فضای دکارتی) در آن لحظه مشخص می‌کند.

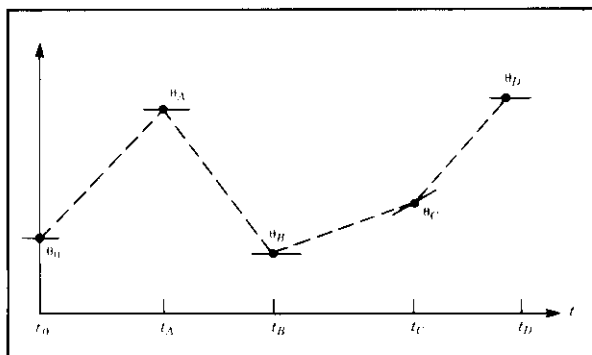
۲. سیستم به‌طور خودکار سرعت در نقاط بینایی را با استفاده از یک «روش خودآموز» کامپیوتری مناسب، در فضای دکارتی یا فضای مفصلی، انتخاب می‌کند.

۳. سیستم به‌طور خودکار سرعت در نقاط بینایی را طوری انتخاب می‌کند که سبب پیوستگی شتاب در این نقاط شود.

در روش اول، سرعتهای دکارتی مورد نظر در نقاط بینایی، با استفاده از ژاکوبی وارون بازوی مکانیکی در آن نقاط، بر سرعتهای مفصل مورد نظر «نگاشته» می‌شوند. چنانچه در یک نقطه بینایی خاص، بازوی مکانیکی ماهر در حالتی تکین قرار گیرد، آنگاه استفاده‌کننده آزادی انتخاب سرعتی دلخواه در این نقطه را نخواهد داشت. اگر چه توانایی روش تولید مسیر در قبول سرعت مورد نظر استفاده‌کننده، قابلیت مفید به‌شمار می‌رود، اما مشخص کردن همیشگی این خصوصیات، برای استفاده‌کننده کاری دشوار خواهد بود. در نتیجه یک سیستم مناسب، باید شامل روش ۲، یا روش ۳ (یا هر دو) باشد.

در روش ۲، سیستم به‌طور خودکار با استفاده از نوعی خودآموزی کامپیوتری، سرعتهای بینایی قابل قبول را انتخاب می‌کند. مسیری را که در شکل ۷-۴ به‌وسیله نقاط بینایی برای مفصلی چون « $\theta$ » مشخص شده است، در نظر بگیرید.

در شکل ۷-۴، مقادیر قابل قبولی را برای سرعتهای مفصل در نقاط بینایی انتخاب کرده‌ایم. این سرعتها با پاره‌خطهای کوتاه مماس بر منحنی در هر نقطه بینایی نشان داده شده‌اند. این انتخاب، حاصل به‌کارگیری یک روش خودآموز ساده (از نظر مفهومی و محاسباتی) است. تصور کنید که نقاط بینایی به‌وسیله پاره‌خطهای مستقیم به یکدیگر وصل شده‌اند. اگر شیب این خطوط در نقطه بینایی تغییر علامت می‌دهد، سرعت بینایی را برابر با صفر انتخاب کنید، و اگر شیب این خطوط در نقطه میانی تغییر علامت نمی‌دهد، میانگین دو شیب را برابر با سرعت بینایی



شکل ۷-۴ نقاط بینایی با سرعتهای مورد نظر که با خطوط مماس بر منحنی نشان داده شده‌اند.

در نظر بگیرید. بدین ترتیب، سیستم تنها با استفاده از مشخصات نقاط بینابینی می‌تواند در هر نقطه سرعتها را انتخاب کند.

در روش ۳، سیستم سرعتها را طوری انتخاب می‌کند که شتاب در نقطه بینابینی پیوسته باشد. برای انجام این کار، باید منحنی را به روش جدیدی به دست آورد. در این منحنی جدید، دو قید سرعت در محل تماس (مرز) دو چندجمله‌ای درجه سوم را، با دو قید دیگر طوری جایگزین می‌کنیم که اولاً سرعت، و ثانیاً شتاب پیوسته باشد.

### ■ مثال ۷-۲

ضریبهای دو چندجمله‌ای درجه سوم را که در یک «منحنی دو تکه» به یکدیگر متصل شده‌اند، و در نقطه بینابینی شتاب پیوسته دارند، به دست آورید. زاویه اولیه  $\theta_0$ ، نقطه بینابینی  $\theta_v$ ، و نقطه هدف  $\theta_g$  در نظر گرفته می‌شود.

نخستین چندجمله‌ای درجه سوم چنین است

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \quad (12-7)$$

و دومین چندجمله‌ای

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \quad (13-7)$$

هر چندجمله‌ای درجه سوم، در فاصله زمانی بین  $t = 0$  تا  $t = t_{fi}$  ارزیابی می‌شود. در اینجا  $i = 1$  یا  $i = 2$  در نظر گرفته می‌شود.

قیدهایی که می‌خواهیم اعمال کنیم، عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_{10} \\ \theta_v &= a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 \\ \theta_v &= a_{20} \\ \theta_g &= a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 \\ 0 &= a_{11} \\ 0 &= a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 \end{aligned} \quad (14-7)$$

$$a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21}$$

$$2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22}$$

این قیدها، یک دستگاه خطی هشت معادله و هشت مجهول را به دست می‌دهند. با حل این

دستگاه در حالت  $t = t_{f1} = t_{f2}$  نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= \theta. \\
 a_{11} &= 0 \\
 a_{12} &= \frac{12\theta_v - 3\theta_g - 9\theta.}{4t_f^2} \\
 a_{13} &= \frac{-8\theta_v + 3\theta_g + 5\theta.}{4t_f^2} \\
 a_{20} &= \theta_v \quad (15-7) \\
 a_{21} &= \frac{3\theta_g - 3\theta.}{4t_f} \\
 a_{22} &= \frac{-12\theta_v + 6\theta_g + 6\theta.}{4t_f^2} \\
 a_{23} &= \frac{8\theta_v - 5\theta_g - 3\theta.}{4t_f^2}
 \end{aligned}$$

■

در حالت کلی، هنگامی که  $n$  چندجمله‌ای درجه سوم ( $n$  قطعه درجه سوم) داریم، دستگاه معادلات را که با تأکید بر شتاب پیوسته در نقاط بینابینی حاصل می‌شود، می‌توان به صورت ماتریسی نوشت، و با حل معادله ماتریسی، سرعتهای نقاط بینابینی را به دست آورد. ماتریس این معادلات سه قطری، و به سادگی قابل حل است [۴].

### چندجمله‌ایهای درجه بالاتر

گاهی برای تقریب زدن قطعه‌های مسیر، از چندجمله‌ایهای درجه بالاتر استفاده می‌شود. مثلاً اگر بخواهیم مکان، سرعت، و شتاب را در ابتدا و انتهای قطعه‌ای از مسیر مشخص کنیم، به یک چندجمله‌ای درجه پنجم نیاز خواهیم داشت

$$\theta(t) = a. + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (16-7)$$

که قیدهای حاکم بر آن چنین‌اند

$$\begin{aligned}
 \theta. &= a. \\
 \theta_f &= a. + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\
 \dot{\theta}. &= a_1 \\
 \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_f &= 2a_r \\ \ddot{\theta}_f &= 2a_r + 6a_r t_f + 12a_r t_f^2 + 20a_0 t_f^3\end{aligned}\quad (17-7)$$

فیدهای بالا، یک دستگاه خطی شش معادله و شش مجهول را مشخص می‌کنند. با حل این دستگاه، نتیجه می‌شود

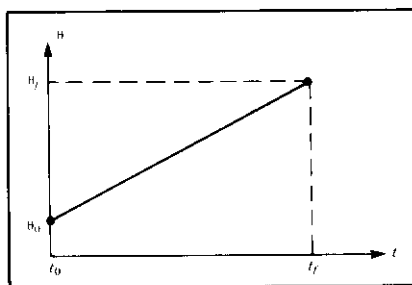
$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_r &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\ a_r &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_r &= \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_0 &= \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3}\end{aligned}\quad (18-7)$$

الگوریتمهای گوناگونی برای محاسبه تابعهای هموار (چندجمله‌ای یا نوع دیگر) گذرنده از مجموعه‌ای از نقاط مفروض وجود دارد [۳-۴]، که بررسی کامل آنها خارج از محدوده این کتاب است.

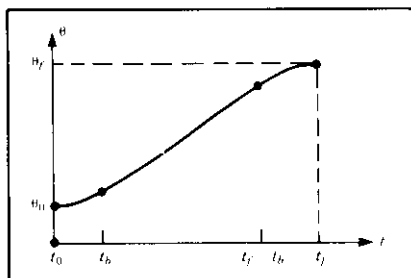
### تابع خطی با مرزهای سهموی

مسیر دیگری که می‌توان در نظر گرفت، مسیری خطی است، که در آن، مطابق شکل ۷-۵، مکان فعلی مفصل، با یک خط راست به مکان نهایی آن درونیایی می‌شود. به‌خاطر داشته‌باشید که اگر چه حرکت هر مفصل در این روش خطی است، ولی مجری نهایی در حالت کلی خطی مستقیم را در فضا دنبال نمی‌کند.

اما درونیایی یک مسیر خطی ساده سبب می‌شود که سرعت در ابتدا و انتهای حرکت، ناپیوسته شود. برای ایجاد مسیری هموار با مکان و سرعت پیوسته، شکل مسیر را در ابتدا خطی، و در هر نقطه مسیر (نقاط بینابینی)، «سهموی» در نظر خواهیم گرفت. استفاده از شتاب ثابت در قسمت سهموی مسیر، سرعت را به نرمی تغییر می‌دهد. شکل ۷-۶ مسیری ساده را که به این ترتیب ساخته شده است، نشان می‌دهد. تابع خطی و دو انتهای سهموی آن طوری به یکدیگر اتصال یافته‌اند که مکان و سرعت در کل مسیر پیوسته هستند.



شکل ۵-۷ درونیایی خطی که مستلزم شتاب بینهایت است.



شکل ۶-۷ قطعه مسیر خطی با نواحی مرزی سهموی.

به منظور توصیف این قطعه از مسیر، فرض می‌کنیم هر دو قسمت سهموی آن، فاصله زمانی یکسان، و در نتیجه شتاب ثابت یکسان دارند (تنها علامت شتاب تغییر می‌کند). همان‌طور که در شکل ۷-۷ دیده می‌شود، برای توصیف این مسیر، راههای زیادی وجود دارد، اما کلیه این جوابها، نسبت به نقطه وسط فاصله زمانی ( $t_h$ ) و نقطه وسط فاصله مکانی ( $\theta_h$ )، متقارن اند. سرعت در پایان ناحیه سهموی، باید با سرعت در ناحیه خطی برابر باشد. در نتیجه داریم

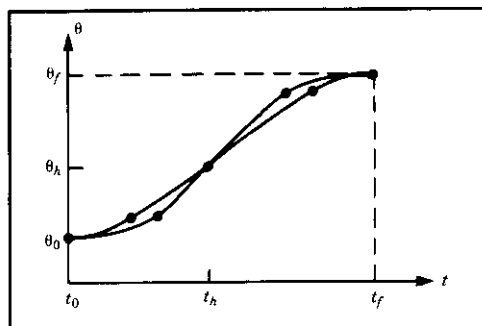
$$\ddot{\theta} t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} \quad (۱۹-۷)$$

که در آن  $\theta_b$  مقدار  $\theta$  در انتهای ناحیه سهموی، و  $\ddot{\theta}$  شتاب اعمال شده در ناحیه سهموی است. مقدار  $\theta_b$  از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2 \quad (۲۰-۷)$$

با ترکیب (۱۹-۷) و (۲۰-۷)، و با توجه به اینکه  $t = 2t_h$ ، داریم

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0 \quad (۲۱-۷)$$



شکل ۷-۷ قطعه مسیر خطی با نواحی مرزی سهمی.

که در آن  $t$  مدت زمان مطلوب برای حرکت است. با داشتن  $\theta_0$ ،  $\theta_f$  و  $t$  می‌توان هر مجموعه‌ای از مقادیر  $\ddot{\theta}$  و  $t_b$  را که در معادله (۲۱-۷) صدق می‌کنند، به‌عنوان مسیر انتخاب کرد. معمولاً ابتدا مقداری برای شتاب  $\ddot{\theta}$  انتخاب می‌شود و سپس مقدار  $t_b$  متناظر با آن از معادله (۲۱-۷) به‌دست می‌آید. شتاب  $\ddot{\theta}$  انتخاب شده، باید به‌قدر کافی بزرگ باشد، وگرنه جوابی به‌دست نخواهد آمد. با حل معادله (۲۱-۷)، مقدار  $t_b$  برحسب شتاب و دیگر پارامترهای معلوم، چنین به‌دست می‌آید

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}} \quad (22-7)$$

قیدی که برای انتخاب شتاب ناحیه سهمی باید در نظر گرفته شود، چنین است

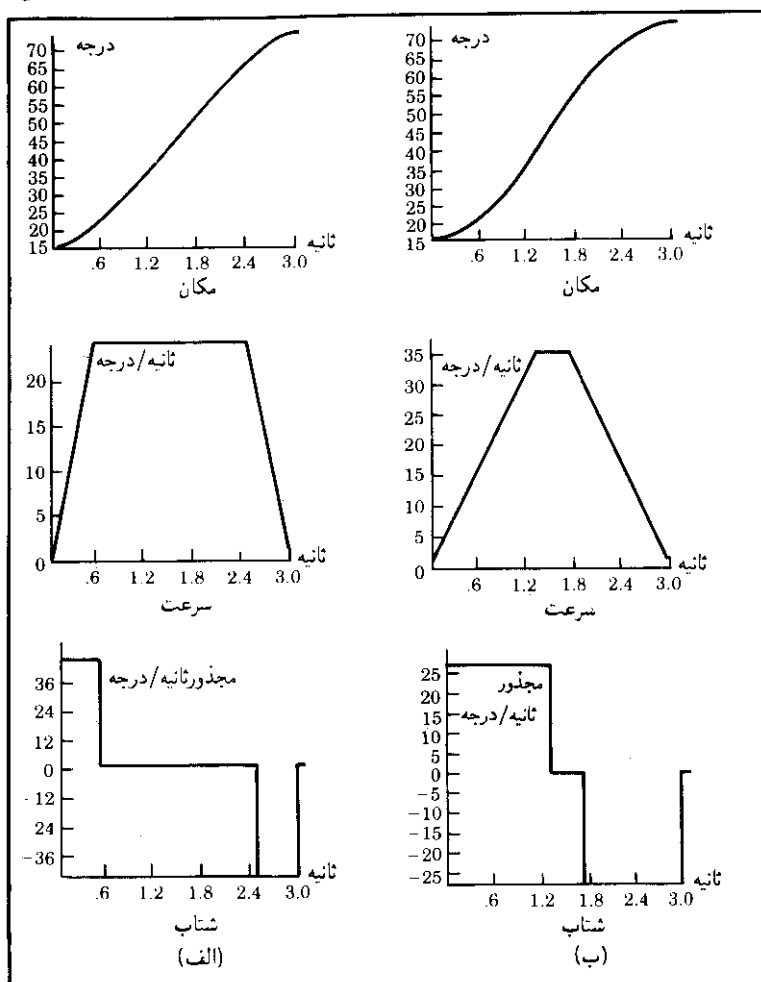
$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2} \quad (23-7)$$

تساوی در رابطه (۲۳-۷) هنگامی برقرار است که طول قسمت خطی صفر باشد و مسیر از دو ناحیه سهمی که با شیب مساوی به یکدیگر متصل می‌شوند، تشکیل شود. با بزرگتر شدن مقدار شتاب، طول ناحیه سهمی کوتاهتر می‌شود، به‌طوری‌که در حدّ (زمانی که شتاب بینهایت است)، حالت ساده درونیایی خطی، که قبلاً به آن اشاره شد، حاصل می‌شود.

### ■ مثال ۳-۷

برای قطعه مسیری که در مثال ۱-۷ بررسی شد، دو نمونه از مسیر خطی با مرزهای سهمی به‌دست آورید.

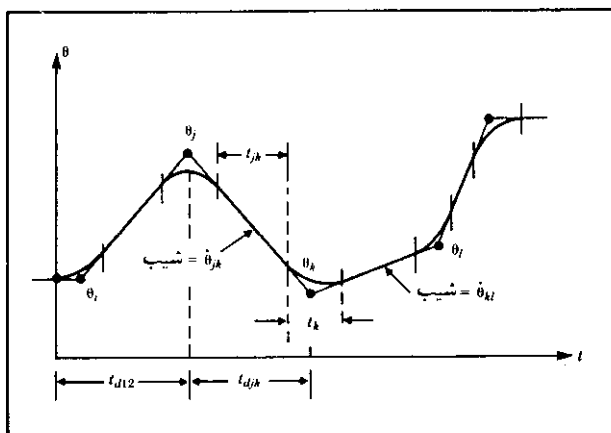
شکل ۸-۷ (الف) مسیری را نشان می‌دهد که در آن  $\ddot{\theta}$  مقدار بزرگی اختیار شده است. در



شکل ۷-۸ منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب برای درونیابی خطی با نواحی سهموی. در منحنیهای سمت چپ، شتاب ناحیه سهموی از منحنیهای سمت راست بیشتر است.

این حالت، ابتدا افزایش سرعت بسیار شدید است، سپس سرعت ثابت می‌شود، و سرانجام کاهش می‌یابد. شکل ۷-۸ (ب) مسیری با شتاب به مراتب کمرچکتر را نشان می‌دهد که در آن قسمت خطی منحنی تقریباً حذف شده است.

تابع خطی با نواحی سهموی برای مسیری با نقاط بینابینی در این قسمت، حالتی از مسیرهای خطی با نواحی مرزی سهموی را، که تعدادی دلخواه از نقاط بینابینی را شامل می‌شوند، در نظر می‌گیریم. شکل ۷-۹ مجموعه‌ای از نقاط بینابینی فضای



شکل ۷-۹ مسیر خطی چند تکه با نواحی سهمی بین قطعه‌ها.

مفصلی را برای مفصلی چون  $\theta$  نشان می‌دهد. نقاط بینابینی به وسیله نواحی خطی به یکدیگر وصل شده‌اند، و در اطراف هر نقطه بینابینی، نواحی سهمی اضافه شده‌اند.

در اینجا از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم. سه نقطه همسایه روی مسیر را که  $j$ ،  $k$ ، و  $l$  نامیده شده‌اند، در نظر بگیرید. طول مدت ناحیه سهمی در نقطه  $k$  برابر با  $t_k$ ، و طول مدت قسمت خطی بین نقاط  $j$  و  $k$  برابر با  $t_{jk}$  است. کل مدت زمان آن قطعه از منحنی که نقاط  $j$  و  $k$  را به هم وصل می‌کند، برابر با  $t_{dj k}$  است. سرعت در طول قسمت خطی  $\dot{\theta}_{jk}$  و شتاب در طول ناحیه سهمی در نقطه  $j$  برابر با  $\ddot{\theta}_j$  است (شکل ۷-۹ را ببینید).

در اینجا نیز مانند حالت مسیر یک قطعه‌ای، ممکن است برحسب مقدار شتاب در نظر گرفته شده در هر ناحیه سهمی، جوابهای گوناگونی به دست آید. با داشتن کلیه نقاط بینابینی (نقاط مسیر)  $\theta_k$ ، مدت‌های زمانی مطلوب  $t_{dj k}$  و اندازه شتاب در هر نقطه از مسیر  $|\ddot{\theta}_k|$ ، می‌توان مدت زمان هر ناحیه سهمی  $t_k$  را به دست آورد. برای نقاط بینابینی داخلی (بجز نقاط ابتدایی و انتهایی)، کمیت‌های فوق چنین محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{dj k}} \\ \ddot{\theta}_k &= \text{SGN}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_k| \\ t_k &= \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ t_{jk} &= t_{dj k} - \frac{1}{\ddot{\theta}_j} t_j - \frac{1}{\ddot{\theta}_k} t_k\end{aligned}\quad (7-24)$$



برای قطعه‌های ابتدایی و انتهایی، باید کمی متفاوت عمل کرد، زیرا در محاسبهٔ زمان کل هر قطعه، باید تمام ناحیهٔ سهموی در یک سر آن قطعه در نظر گرفته شود. در اولین قطعه از منحنی مسیر، با مساوی قراردادن دو عبارت به‌دست آمده برای سرعت در قسمت خطی آن قطعه، می‌توان نوشت

$$\frac{\theta_r - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{\gamma} t_1} = \ddot{\theta}_1 t_1 \quad (25-7)$$

با حل این معادله،  $t_1$  (طول مدت ناحیهٔ سهموی در نقطهٔ ابتدایی) به‌دست می‌آید. سپس  $\dot{\theta}_{12}$  و  $t_{12}$  نیز به‌آسانی محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= SGN(\theta_r - \theta_1) |\ddot{\theta}_1| \\ t_1 &= t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\theta_r - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\ \dot{\theta}_{12} &= \frac{\theta_r - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{\gamma} t_1} \\ t_{12} &= t_{d12} - t_1 - \frac{1}{\gamma} t_r \end{aligned} \quad (26-7)$$

به‌همین ترتیب، برای آخرین قطعه از منحنی مسیر (قطعه‌ای که نقاط  $n-1$  و  $n$  را به یکدیگر وصل می‌کند) داریم

$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{\gamma} t_n} = \ddot{\theta}_n t_n \quad (27-7)$$

و از آنجا جواب به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_n &= SGN(\theta_{n-1} - \theta_n) |\ddot{\theta}_n| \\ t_n &= t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}} \\ \dot{\theta}_{(n-1)n} &= \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{\gamma} t_n} \\ t_{(n-1)n} &= t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{\gamma} t_{n-1} \end{aligned} \quad (28-7)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۴-۷) تا (۲۸-۷)، می‌توانیم مدت زمان هر ناحیهٔ سهموی، و سرعتها را برای یک مسیر چند قطعه‌ای محاسبه کنیم. معمولاً استفاده کننده تنها نقاط بینابینی و مدت زمان

مطلوب برای هر قطعه را مشخص می‌کند. در این حالت، سیستم از «مقادیر از پیش تعیین شده» شتاب برای هر مفصل استفاده می‌کند. گاهی برای ساده کردن وظیفه استفاده کننده، سیستم مدت زمانهای مورد نظر را نیز براساس سرعت‌های از پیش تعیین شده در کامپیوتر، محاسبه می‌کند. در کلیه نواحی سهموی، باید از شتابهایی به قدر کافی بزرگ استفاده کرد تا زمان برای رسیدن به قسمت خطی، قبل از آنکه ناحیه سهموی بعدی آغاز شود، کافی باشد.

#### ■ مثال ۷-۴

مسیر مفصلی خاص چنین مشخص شده است: نقاط مسیر برحسب درجه برابر با ۱۰، ۳۵، ۲۵، و ۱۰ هستند. مدت زمان هر یک از این سه قطعه نیز باید به ترتیب ۱، ۲، و ۳ ثانیه باشد. اندازه شتاب از پیش تعیین شده برای کلیه نقاط ناحیه سهموی  $5^\circ \text{deg/s}^2$  است. سرعت در کلیه قطعه‌ها، طول مدت قطعه‌های سهموی، و طول مدت قسمت‌های خطی را محاسبه کنید. برای اولین قطعه، از معادله اول روابط (۷-۲۶) به دست می‌آید

$$\dot{\theta}_1 = 50/^\circ \quad (7-29)$$

طول مدت ناحیه سهموی در نقطه ابتدایی، از معادله دوم روابط (۷-۲۶) حاصل می‌شود

$$t_1 = 2 - \sqrt{4 - \frac{2(35 - 10)}{50/^\circ}} = 0,27 \quad (7-30)$$

سرعت  $\dot{\theta}_{12}$  از معادله سوم روابط (۷-۲۶) چنین محاسبه می‌شود

$$\dot{\theta}_{12} = \frac{35 - 10}{2 - 0,5(0,27)} = 13,5^\circ \quad (7-31)$$

سرعت  $\dot{\theta}_{23}$  از معادله اول روابط (۷-۲۶) چنین به دست می‌آید

$$\dot{\theta}_{23} = \frac{25 - 35}{1} = -10/^\circ \quad (7-32)$$

پس از آن، از معادله دوم روابط (۷-۲۶) استفاده می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\dot{\theta}_2 = -50/^\circ \quad (7-33)$$

سپس با به کار بردن معادله سوم روابط (۷-۲۶)،  $t_2$  محاسبه می‌شود

$$t_2 = \frac{-10/^\circ - 13,5^\circ}{-50/^\circ} = 0,47 \quad (7-34)$$

طول قسمت خطی قطعه ۱ را می‌توان با استفاده از معادله چهارم روابط (۷-۲۶) چنین به‌دست آورد

$$t_{12} = 2 - 0,27 - \frac{1}{4}(0,47) = 1,50 \quad (35-7)$$

سپس از معادله اول روابط (۷-۲۸) داریم

$$\ddot{\theta}_2 = 50,0^\circ \quad (36-7)$$

برای آخرین قطعه مسیر، با استفاده از معادله دوم روابط (۷-۲۸)،  $t_2$  را چنین محاسبه می‌کنیم

$$t_2 = 3 - \sqrt{9 + \frac{2(10 - 25)}{50,0^\circ}} = 0,102 \quad (37-7)$$

سرعت  $\dot{\theta}_{22}$  از معادله سوم روابط (۷-۲۸) محاسبه می‌شود

$$\dot{\theta}_{22} = \frac{10 - 25}{3 - 0,050} = -5,10^\circ \quad (38-7)$$

سپس از معادله دوم روابط (۷-۲۴) استفاده می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\ddot{\theta}_2 = 50,0^\circ \quad (39-7)$$

سپس  $t_2$  با استفاده از معادله سوم روابط (۷-۲۴) به‌دست می‌آید

$$t_2 = \frac{-5,10 - (-10,0^\circ)}{50} = 0,098 \quad (40-7)$$

و سرانجام، با استفاده از معادله چهارم روابط (۷-۲۴)، حاصل می‌شود

$$t_{22} = 1 - \frac{1}{4}(0,47) - \frac{1}{4}(0,098) = 0,716 \quad (41-7)$$

$$t_{22} = 3 - \frac{1}{4}(0,098) - 0,102 = 2,849 \quad (42-7)$$

نتایج این محاسبات، «طرحی» از مسیر را به‌دست می‌دهد. مولد مسیر در هنگام اجرای برنامه کامپیوتری، از این اعداد برای محاسبه  $\theta$ ،  $\dot{\theta}$ ،  $\ddot{\theta}$ ، همگام با آهنگ روزآمد کردن مسیر، استفاده خواهد کرد. ■

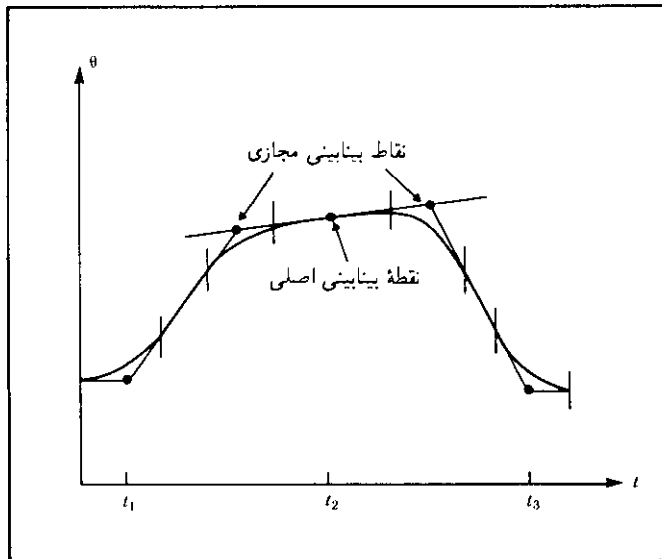
در این منحنیهای خطی-سه‌موی، باید توجه داشت که عملاً به نقاط بینابینی نمی‌رسیم، مگر آنکه بازوی مکانیکی در آن نقاط متوقف شود. اغلب هنگامی که اندازه شتاب به میزان کافی بزرگ

است، مسیر تا حدّ زیادی به نقطهٔ بینابینی مورد نظر، نزدیک خواهد شد. اگر بخواهیم با توقف از یک نقطه بگذریم، نقطهٔ بینابینی در مسیر تکرار می‌شود.

اگر استفاده کننده بخواهد بازو، بدون آنکه توقف کند دقیقاً از یک نقطهٔ بینابینی بگذرد، می‌توان مشخصات مسیر را مطابق با روابط گفته شده تعیین کرد، و تنها نکتهٔ زیر را به آنها افزود: سیستم به‌طور خودکار آن نقطهٔ بینابینی را که می‌خواهیم بازو از آن بگذرد، با دو نقطهٔ بینابینی مجازی، که در دو طرف نقطهٔ اصلی قرار می‌گیرند، جایگزین می‌کند (شکل ۷-۱۰ را ببینید). سپس ایجاد مسیر مانند حالت‌های قبل صورت خواهد گرفت. حال نقطهٔ بینابینی اصلی، در ناحیهٔ خطی مسیری که دو نقطهٔ بینابینی مجازی را به هم متصل می‌کند، قرار می‌گیرد. استفاده کننده می‌تواند نه تنها گذشتن دقیق بازو از نقطهٔ بینابینی، بلکه گذشتن بازو با سرعتی معین از نقطهٔ بینابینی را درخواست کند. اگر استفاده کننده این سرعت را مشخص نکند، کامپیوتر مقدار آن را با روشی خودآموز تعیین خواهد کرد. می‌توان از اصطلاح نقطهٔ گذر (به جای نقطهٔ بینابینی) برای مشخص کردن نقطه‌ای از مسیر که بازوی مکانیکی را به گذشتن از آن واداشته‌ایم، استفاده کرد.

## ۴-۷ روش‌های فضای دکارتی

همان‌طور که در بخش (۷-۳) گفته شد، مسیرهای محاسبه شده در فضای مفصلی، حتی زمانی که نقاط بینابینی و هدف در مختصات دکارتی مشخص شده‌اند، نیز می‌توانند این نقاط را به دست



شکل ۷-۱۰ کاربرد دو نقطهٔ بینابینی مجازی برای ایجاد یک نقطهٔ گذر.

دهند. اما شکل فضایی مسیر طی شده به وسیله مجری نهایی خطی راست نیست، بلکه شکلی پیچیده است که به سینماتیک خاص بازوی مکانیکی ماهر مورد استفاده بستگی دارد. در این بخش، روشهایی را برای ایجاد مسیر بررسی خواهیم کرد که در آنها شکلهای مسیر برحسب تابعی توصیف می‌شوند که مکان و جهتگیری دکارتی را به صورت تابعی از زمان محاسبه می‌کنند. بدین ترتیب، می‌توانیم شکل فضایی مسیر بین نقاط بینابینی را نیز مشخص کنیم. معمولترین شکل مسیر خط راست است، اما از شکلهای دایره‌ای، سینوسی، و غیره نیز می‌توان استفاده کرد.

هر نقطه مسیر، معمولاً برحسب مکان و جهتگیری چهارچوب ابزار نسبت به چهارچوب ایستگاه، مشخص می‌شود. در روشهای تولید مسیری که بر مختصات دکارتی مبتنی‌اند، تابعهایی که به یکدیگر وصل می‌شوند و منحنی مسیر کل را تولید می‌کنند، تابعهایی زمانی با متغیرهای دکارتی‌اند. طرح این مسیرها را می‌توان مستقیماً، بدون آنکه ابتدا سینماتیک وارون حل شود، از تعریف نقاط مسیر توسط استفاده کننده، که مشخصات  $\{T\}$  را نسبت به  $\{S\}$  بیان می‌کنند، به دست آورد. در هر صورت، روشهای دکارتی از نظر محاسباتی پرهزینه‌ترند، زیرا به هنگام اجرای برنامه کامپیوتری آنها، باید معادله‌های سینماتیکی وارون را با سرعتی برابر با «آهنگ روزآمد کردن مسیر» حل کرد. به عبارت دیگر، پس از آنکه مسیر در فضای دکارتی تولید شد، با حل معادله‌های سینماتیکی وارون در آخرین مرحله، زوایای مفصلی مورد نظر محاسبه می‌شوند.

برای تولید مسیرهای دکارتی، چندین روش پیشنهاد شده است [۲، ۱]. در بخش بعد، یک روش را به عنوان نمونه معرفی خواهیم کرد. در این روش، می‌توانیم از همان منحنی خطی-سه‌موی به دست آمده برای حالت فضای مفصلی، استفاده کنیم.

### حرکت راست-خط دکارتی

اغلب می‌خواهیم مسیری را مشخص کنیم که با دنبال کردن آن، انتهای ابزار روی خطی مستقیم در فضا حرکت کند. روشن است که اگر تعداد زیادی نقاط بینابینی جدا و نزدیک به هم را، که بر روی یک خط راست واقع‌اند، در نظر بگیریم، آن‌گاه حرکت انتهای ابزار، صرف‌نظر از تابع همواری که نقاط بینابینی را به یکدیگر می‌پیوندد، راست-خط به نظر خواهد رسید. اما بسیار مناسب‌تر است اگر ابزار، حتی در صورت زیاد بودن فاصله نقاط بینابینی، نیز خطی راست را دنبال کند. این گونه توصیف و اجرای حرکت ابزار را حرکت راست-خط دکارتی می‌نامند. تعریف حرکت به صورت خطوط راست، حالت خاصی از شکل کلی‌تر حرکت دکارتی است که به وسیله آن، می‌توان تابعهای دلخواهی (به صورت تابعی از زمان) از متغیرهای دکارتی را برای مشخص کردن یک مسیر به کار برد. در سیستمی که حرکت دکارتی کلی تعریف شده است، شکل مسیر می‌تواند بیضی یا سینوسی باشد.

برای طرح و تولید مسیرهای راست-خط دکارتی، استفاده از تابعهای قطعه‌ای خطی با مرزهای سه‌موی، مناسب است. در ناحیه خطی هر قطعه از مسیر، هر سه مؤلفه مکان تغییرات خطی دارند، و در نتیجه مجری نهایی نیز در فضا در راستای خط راست حرکت خواهد کرد. اما اگر جهتگیری

را در هر نقطه بینابینی با یک ماتریس دوران مشخص کنیم، نمی‌توانیم عنصرهای این ماتریس را به‌طور خطی درونیابی کنیم، زیرا این عمل، در همهٔ حالتها ماتریس دوران درستی به‌دست نخواهد داد. ماتریس دوران باید دارای ستونهای یکامتعامد باشد، و این شرط چنانچه عنصرهای ماتریس دوران از درونیابی خطی بین عنصرهای دو ماتریس دیگر به‌دست آیند، همواره برقرار نخواهد بود. به‌همین دلیل، برای نمایش جهتگیری از روش دیگری بجز ماتریس دوران استفاده خواهیم کرد.

چنانکه در فصل ۲ گفته شد، می‌توان هر جهتگیری با استفاده از نمایش محور-زاویه با سه عدد نشان داد. اگر این نمایش جهتگیری را با بردار مکان دکارتی  $3 \times 1$  ترکیب کنیم، برداری  $6 \times 1$  از مکان و جهتگیری دکارتی به‌دست خواهد آمد. یک نقطهٔ بینابینی را که نسبت به چهارچوب ایستگاه به‌صورت  ${}^S A T$  مشخص شده است، در نظر بگیرد. این بدان معناست که چهارچوب  $\{A\}$  یک نقطهٔ بینابینی را با مکان و جهتگیری مفروض برای مجری نهایی (به‌ترتیب  ${}^S P_{AORG}$  و  ${}^S A R$ ) مشخص می‌کند. این ماتریس دوران را می‌توان به‌صورت محور-زاویه  $ROT({}^S \hat{K}_A, \theta_{SA})$ ، یا به‌صورت ساده‌تر  ${}^S \hat{K}_A$  نمایش داد. این بردار  $6 \times 1$  مکان و جهتگیری دکارتی را با نماد  $\mathcal{X}$  نشان می‌دهیم. بدین ترتیب، داریم

$${}^S \mathcal{X}_A = \begin{bmatrix} {}^S P_{AORG} \\ {}^S \hat{K}_A \end{bmatrix} \quad (۴۳-۷)$$

که در آن  ${}^S \hat{K}_A$  از مقیاس‌گذاری بردار یک  ${}^S \hat{K}_A$  به‌وسیلهٔ مقدار دوران،  $\theta_{SA}$ ، به‌دست می‌آید. پس از آنکه هر نقطه از مسیر را بدین ترتیب نمایش دادیم، باید تابعهایی هموار تعریف کنیم که این شش کمیت را از یک نقطهٔ بینابینی به نقطهٔ بینابینی دیگر، به‌صورت تابعهایی از زمان حرکت دهند. اگر از منحنیهای هموار خطی یا مرزهای سهموی استفاده شود، شکل مسیر بین نقاط بینابینی، خطی خواهد بود. سرعتهای خطی و زاویه‌ای مجری نهایی. پس از عبور آن از نقاط بینابینی، به‌نرمی تغییر خواهد کرد.

توجه کنید که برخلاف روشهای دیگر حرکت راست-خط دکارتی پیشنهاد شده، این روش تضمین نمی‌کند که در هنگام حرکت از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، دورانها حول یک «محور معادل» انجام می‌شوند. این روشی ساده است که در آن جهتگیری به‌نرمی تغییر می‌کند، و بدین ترتیب، می‌توان از همان ریاضیات به‌کار رفته برای طرح مسیرهای فضای مفصلی، برای آن استفاده کرد. اشکال جزئی این روش آن است که در آن نمایش جهتگیری به‌صورت محور-زاویه یکتا نیست و داریم

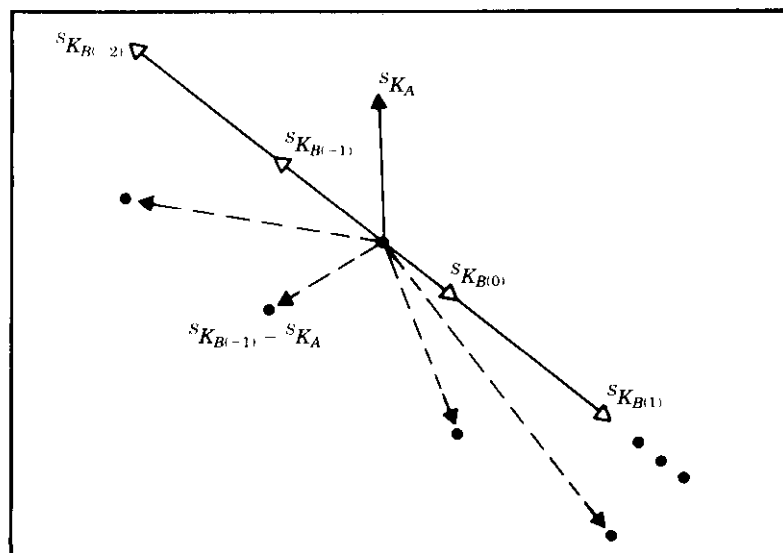
$$({}^S \hat{K}_A, \theta_{SA}) = ({}^S \hat{K}_A, \theta_{SA} + n360^\circ) \quad (۴۴-۷)$$

که در آن  $n$  عددی صحیح (مثبت یا منفی) است. به‌هنگام حرکت از نقطهٔ بینابینی  $\{A\}$  به نقطهٔ بینابینی  $\{B\}$ ، باید مقدار کل دوران مینیمم شود. با فرض اینکه نمایش جهتگیری  $\{A\}$  به‌صورت

$^S K_A$  داده شده است، باید  $^S K_B$  خاص را طوری انتخاب کنیم که به ازای آن  $|^S K_B - ^S K_A|$  مینیمم شود. مثلاً شکل ۷-۱۱ چهار بردار  $^S K_B$  ممکن، و رابطه آنها با بردارهای مفروض  $^S K_A$  را نشان می دهد. بردارهای تفاضل (خط چینها) با یکدیگر مقایسه می شوند، و آن بردار  $^S K_B$  که کوچکترین دوران را پدید می آورد (در اینجا  $^S K_{B(-1)}$ ) انتخاب می شود.

پس از آنکه شش مقدار مکان و جهتگیری دکارتی  $\mathcal{X}$  را برای هر نقطه بینابینی تعیین کردیم، می توانیم از همان ریاضیاتی که برای ایجاد منحنیهای مسیر متشکل از قطعه های خطی با نواحی سهموی به کار گرفتیم، استفاده کنیم. اما در اینجا باید یک قید دیگر را نیز اضافه کنیم و آن این است که مدت زمانهای نواحی سهموی باید برای هر درجه آزادی یکسان باشد. با رعایت این قید، می توان اطمینان پیدا کرد که حرکت کلیه درجات آزادی، به صورت خطی راست در فضا خواهد بود. چون طول مدت کلیه نواحی سهموی باید یکسان باشد، شتاب به کار رفته در ناحیه سهمی شکل، برای هر درجه آزادی متفاوت خواهد بود. بدین ترتیب، طول مدت ناحیه سهمی شکل را مشخص می کنیم، و با استفاده از معادله سوم روابط (۷-۲۴)، شتاب مورد نیاز را به دست می آوریم (به جای اینکه عکس این عمل را انجام دهیم). طول مدت ناحیه سهموی را می توان طوری انتخاب کرد که شتاب از حدّ معینی بیشتر نشود.

بسیاری روشهای دیگر نیز برای نمایش و درونیایی قسمت جهتگیری در مسیر دکارتی وجود دارند. در میان این روشها، می توان از بردارهای  $1 \times 3$  دیگری نام برد که در بخش ۲-۸ برای



شکل ۷-۱۱ روش نمایش محور-زاویه برای مینیمم کردن دوران.

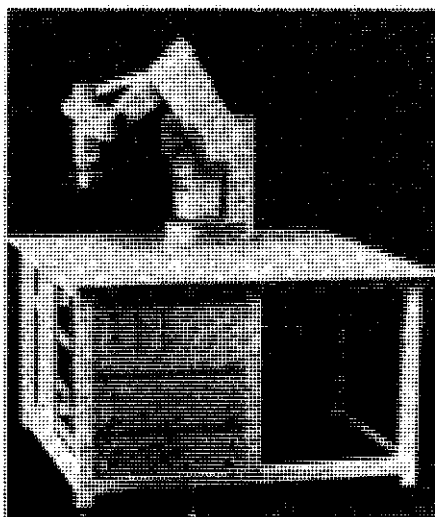
نمایش جهتگیری معرفی شدند. مثلاً بازوی مکانیکی ماهر اینتلدکس ۶۰۵T در شکل ۷-۱۲، در راستای خطوط راستی حرکت می‌کند که درونیابی جهتگیری آنها با استفاده از نمایشی شبیه به زوایای اوپلر  $Z-Y-Z$  انجام گرفته است.

## ۵-۷ مشکلات هندسی مسیرهای دکارتی

از آنجا که بین شکل مسیر توصیف شده در فضای دکارتی و مکانهای مفصلی، تناظری پیوسته برقرار می‌شود، در مسیرهای دکارتی مشکلات گوناگونی در ارتباط با فضای کاری و نقاط تکین، ایجاد می‌شود.

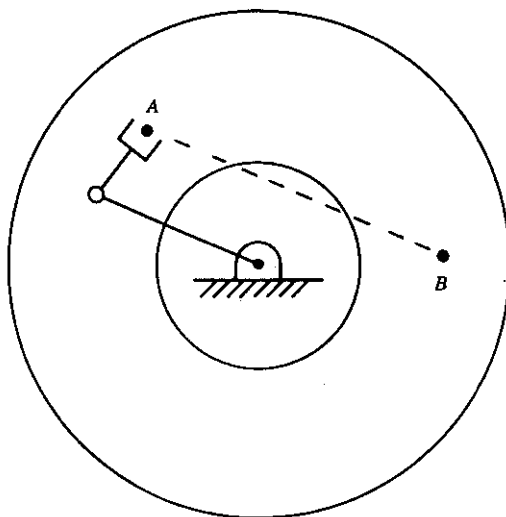
### مشکلات نوع اول: نقاط بینابینی غیر قابل دسترس

اگر چه وضعیت اولیه و نقطه هدف نهایی بازوی مکانیکی ماهر، هر دو در محدوده فضای کاری آن هستند، اما امکان دارد برخی نقاط واقع بر خط واصل بین این دو نقطه، در فضای کاری قرار نگیرند. به عنوان نمونه، روبات صفحه‌ای با دو رابط و فضای کاری آن را در شکل ۷-۱۳ در نظر بگیرید. در این روبات، رابط ۲ از رابط ۱ کوتاه‌تر است، به طوری که در فضای کاری سوراخی با شعاعی برابر با اختلاف طول دو رابط، ایجاد شده است. نقطه آغاز  $A$  و نقطه هدف  $B$  در داخل فضای کاری قرار دارند. حرکت از  $A$  به  $B$  در فضای مفصلی، مسئله‌ای پذیرد نمی‌آورد، اما اگر



شکل ۷-۱۲ روبات اینتلدکس مدل ۶۰۵T با شش محور، تکرارپذیری  $\pm 0.001$  in، و دقت  $\pm 0.002$  in.





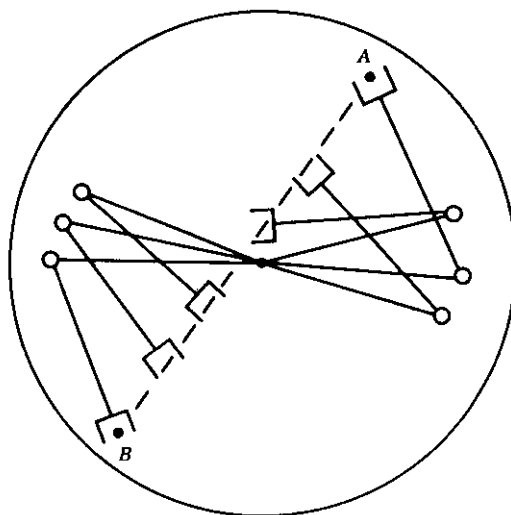
شکل ۷-۱۳ مشکل نوع اول در مسیر دکارتی.

بخواهیم حرکت را در فضای دکارتی در راستای خطی راست انجام دهیم، آن‌گاه دسترسی به برخی نقاط بینابینی در راستای مسیر، ممکن نخواهد بود. این مثال، حالتی را نشان می‌دهد که در آن فضای مفصلی را می‌توان به آسانی به کار برد، اما استفاده از یک مسیر راست-خط دکارتی، ممکن نیست.<sup>۱</sup>

### مشکلات نوع دوم: سرعت زیاد مفصل در نزدیکی نقاط تکین

در فصل ۵ دیدیم که در فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر، مکانهایی وجود دارند که در آنها اعمال سرعتهای مفصلی برای ایجاد سرعت مطلوب مجری نهایی در فضای دکارتی، غیرممکن است. در نتیجه جای شگفتی نخواهد بود اگر بازوی مکانیکی نتواند در مسیرهایی خاص (در فضای دکارتی) حرکت کند. مثلاً اگر بازو خطی راست در فضای دکارتی را دنبال کند، و به سوی یکی از پیکربندیهای تکین مکانیزم پیش رود، ممکن است سرعت یک یا چند مفصل افزایش یابد، و به بینهایت میل کند. چون سرعتهای مکانیزم، از بالا محدودیت دارند، این وضعیت غالباً باعث انحراف بازو از مسیر مورد نظر می‌شود.

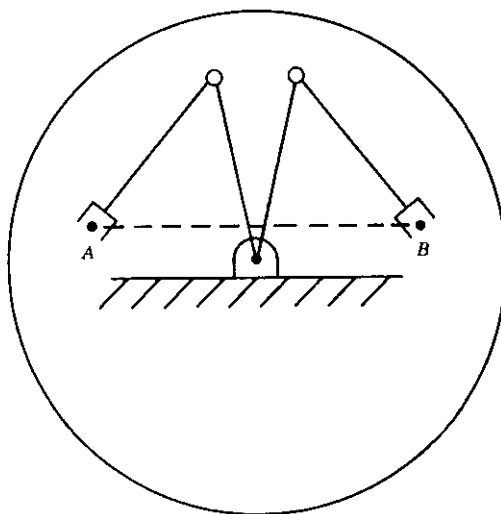
شکل ۷-۱۴ مثالی از این حالت را نشان می‌دهد که در آن یک روبات صفحه‌ای با دو رابط (با طولهای رابط مساوی) در راستای مسیری از  $A$  به  $B$  حرکت می‌کند. حالت مطلوب آن است <sup>۱</sup> در برخی سیستمهای روباتی، چنین مشکلاتی قبل از آنکه استفاده کننده بازو را به حرکت در آورد، به او اطلاع داده می‌شود، اما در برخی سیستمهای دیگر، حرکت روبات در راستای مسیر آغاز می‌شود و ادامه می‌یابد تا یک مفصل به نقطه حذب خود برسد، و بازوی مکانیکی متوقف شود.



شکل ۷-۱۴ مشکل نوع دوم در مسیر دکارتی.

که انتهای بازو با سرعت خطی ثابت در راستای مسیر راست-خط حرکت کند. در شکل چند وضعیت بینابینی بازو رسم شده است، تا حرکت به راحتی قابل تصور باشد. اگر چه دسترسی به کلیه نقاط مسیر ممکن است، اما هنگامی که روبات از قسمت میانی مسیر می‌گذرد، سرعت مفصل اول بسیار زیاد می‌شود. هر چه مسیر به محور مفصل ۱ نزدیکتر باشد، این سرعت بیشتر خواهد بود. رهیافتی برای حل این مشکل، پایین آوردن سرعت در کل مسیر تا حدی است که سرعت کلیه مفصلها در محدوده توانایی آنها قرار گیرد. بدین ترتیب، با آنکه ممکن است مسیر از نظر زمانی وضع مطلوب را نداشته باشد، اما حداقل از لحاظ تعقیب مسیر تعریف شده، مناسب خواهد بود.

**مشکلات نوع سوم: دسترسی پذیری نقاط شروع و هدف در جوابهای مختلف**  
مشکل سومی که ممکن است روی دهد، در شکل ۷-۱۵ نشان داده شده است. در اینجا یک روبات صفحه‌ای با دو رابط با طولهای رابط مساوی، به دلیل داشتن محدودیت حرکتی در مفصلهایش، نمی‌تواند با همه جوابهای ممکن به نقطه‌ای معین در فضا برسد. این مشکل، به‌ویژه هنگامی روی می‌دهد که روبات نتواند با همان وضعیت فیزیکی که در نقطه شروع حرکت دارد، به نقطه هدف برسد. در شکل ۷-۱۵، روبات می‌تواند به کلیه نقاط مسیر خود برسد، اما نه با کلیه جوابهای موجود. در این حالت، سیستم طرح مسیر روبات، می‌تواند بدون آنکه بازو را در راستای مسیر حرکت دهد، وجود این مشکل را جویا شود، و به وسیله یک سیگنال خطا به اطلاع استفاده کننده برساند.  
به سبب وجود این مشکلات در مسیرهای دکارتی، بیشتر سیستمهای کنترل روباتهای صنعتی،



شکل ۷-۱۵ مشکل نوع سوم در مسیر دکارتی.

مسیر را هم در فضای مفصلی و هم در فضای دکارتی تولید می‌کنند. استفاده کننده به سرعت درمی‌یابد که به دلیل وجود مشکلات یاد شده در مسیرهای دکارتی، باید مسیرهای فضای مفصلی را به کار گیرد، و تنها در صورت نیاز از مسیرهای دکارتی استفاده کند.

## ۶-۷ تولید مسیر در هنگام اجرای برنامه کامپیوتری

در زمان اجرای برنامه کامپیوتری، زیر برنامه مولد مسیر معمولاً مسیر را بر حسب  $\theta$ ،  $\dot{\theta}$ ، و  $\ddot{\theta}$  محاسبه می‌کند و اطلاعات حاصل را به سیستم کنترل بازوی مکانیکی ماهر می‌دهد. زیر برنامه مولد، محاسبات را با سرعتی برابر با آهنگ روزآمد کردن مسیر، انجام می‌دهد.

### تولید مسیرهای فضای مفصلی

طرح مسیر به وسیله هر یک از روشهای ذکر شده در بخش ۷-۳، مجموعه‌ای از داده‌ها را برای هر قطعه از مسیر به دست می‌دهد. این داده‌ها به وسیله مولد مسیر، در هنگام اجرای برنامه کامپیوتری، برای محاسبه  $\theta$ ،  $\dot{\theta}$ ، و  $\ddot{\theta}$  به کار می‌روند.

در حالتی که شکل مسیر چند جمله‌ای درجه سوم است، مولد مسیر به سادگی معادله (۷-۳) را به ازای مقادیر افزایشدهنده  $t$  محاسبه می‌کند. در پایان هر قطعه از منحنی مسیر، مجموعه‌ای جدید از ضرایب چند جمله‌ای درجه سوم، فراخوانده می‌شود،  $t$  برابر با صفر قرار داده می‌شود، و تولید مسیر ادامه می‌یابد.

در منحنیهای خطی دارای نواحی سهموی، زمان  $t$  در هر قطعه از منحنی بررسی می‌شود تا مشخص شود که در کدام قطعه از منحنی (قسمت خطی یا سهموی) قرار داریم. در قسمت خطی، مسیر برای هر مفصل چنین محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk}t \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} \\ \ddot{\theta} &= 0\end{aligned}\quad (۴۵-۷)$$

که در آن  $t$  زمان حرکت از نقطهٔ بینابینی زام است و  $\dot{\theta}_{jk}$  از معادلهٔ اول روابط (۲۴-۷)، در زمان طرح مسیر محاسبه می‌شود. در ناحیهٔ سهموی، مسیر برای هر مفصل به صورت زیر محاسبه شده است

$$\begin{aligned}t_{inb} &= t - \left( \frac{1}{\gamma} t_j + t_{jk} \right) \\ \theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk}(t - t_{inb}) + \frac{1}{\gamma} \ddot{\theta}_k t_{inb}^2 \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} + \ddot{\theta}_k t_{inb} \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\theta}_k\end{aligned}\quad (۴۶-۷)$$

که در آن  $\dot{\theta}_{jk}$ ،  $\ddot{\theta}_k$ ،  $t_j$  و  $t_{jk}$ ، در زمان طرح مسیر از معادله‌های (۲۴-۷) تا (۲۸-۷) به دست آمده‌اند. این محاسبات با قراردادن  $t = \frac{1}{\gamma} t_j$  در ابتدای هر قطعه منحنی خطی جدید، ادامه می‌یابد، تا جایی که از کلیه داده‌های مربوط به قطعه‌های مسیر، استفاده شود.

### تولید مسیرهای فضای دکارتی

در روش مسیر دکارتی، که در بخش ۴-۷ معرفی شد، از مولد مسیر برای توصیف منحنی مسیر خطی-سهموی استفاده می‌کنیم. اما چون مقادیر محاسبه شده در این روش، مکان و جهتگیری دکارتی را (به جای مقادیر متغیرهای مفصلی) نشان می‌دهند، در معادله‌های (۴۵-۷) و (۴۶-۷)، به جای  $\theta$  از نماد  $x$ ، که مشخص کنندهٔ مؤلفه‌ای از بردار مکان و جهتگیری در فضای دکارتی است، استفاده می‌کنیم. در نتیجه در قسمت خطی هر قطعه از منحنی، هر درجهٔ آزادی  $\mathcal{N}$  چنین محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}x &= x_j + \dot{x}_{jk}t \\ \dot{x} &= \dot{x}_{jk} \\ \ddot{x} &= 0\end{aligned}\quad (۴۷-۷)$$

که در آن  $t$  زمان حرکت از نقطهٔ بینابینی زام است، و  $\dot{x}_{jk}$  از رابطه‌ای مشابه با معادلهٔ اول روابط (۲۴-۷) (در زمان طرح مسیر) تعیین شد. در ناحیهٔ سهموی، مسیر هر درجهٔ آزادی چنین محاسبه

می‌شود

$$\begin{aligned}
 t_{inb} &= t - \left( \frac{1}{\gamma} t_j + t_{jk} \right) \\
 x &= x_j + \dot{x}_{jk} (t - t_{inb}) + \frac{1}{\gamma} \ddot{x}_k t_{inb}^2 \quad (48-7) \\
 \dot{x} &= \dot{x}_{jk} + \ddot{x}_k t_{inb} \\
 \ddot{x} &= \ddot{x}_k
 \end{aligned}$$

که در آن کمیت‌های  $\dot{x}_{jk}$ ،  $\ddot{x}_k$ ،  $t_j$  و  $t_{jk}$  نیز درست مانند حالت فضای مفصلی، در زمان طرح مسیر تعیین شده‌اند.

سرانجام، این مسیر دکارتی ( $\mathcal{X}$ ،  $\dot{\mathcal{X}}$  و  $\ddot{\mathcal{X}}$ ) را باید به کمیت‌های معادل آن در فضای مفصلی تبدیل کرد. در راه حل کامل تحلیلی این مسئله، باید از معادله‌های سینماتیکی وارون برای محاسبه جهتگیرهای مفصلی، از ژاکوبی وارون برای محاسبه سرعت‌ها، و از ژاکوبی وارون به علاوه مشتق آن، برای محاسبه شتابها [۵] استفاده کرد. اما در عمل غالباً راه ساده‌تر زیر را به‌کار می‌بریم:  $\mathcal{X}$  را با سرعتی برابر با آهنگ روزآمد کردن مسیر، به شکل نمایش مختصاتی معادل خود،  ${}^S_G T$ ، تبدیل می‌کنیم. سپس برای محاسبه بردار زوایای مفصلی مورد نیاز،  $\Theta$ ، از برنامه کامپیوتری SOLVE (بخش ۴-۸ را ببینید) استفاده می‌کنیم.  $\dot{\Theta}$  و  $\ddot{\Theta}$  نیز با مشتق‌گیری عددی به دست می‌آیند.<sup>۱</sup> بنابراین، الگوریتم مورد نظر چنین است

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X} &\rightarrow {}^S_G T \\
 \Theta(t) &= \text{SOLVE}({}^S_G T) \\
 \dot{\Theta}(t) &= \frac{\Theta(t) - \Theta(t - \delta t)}{\delta t} \\
 \ddot{\Theta}(t) &= \frac{\dot{\Theta}(t) - \dot{\Theta}(t - \delta t)}{\delta t} \quad (49-7)
 \end{aligned}$$

مقادیر به دست آمده برای  $\Theta$ ،  $\dot{\Theta}$ ، و  $\ddot{\Theta}$ ، به سیستم کنترل بازوی مکانیکی داده می‌شوند.

## ۷-۷ توصیف مسیر با زبان برنامه‌ریزی روبات

در فصل ۱۰ زبانهای برنامه‌ریزی روبات را با جزئیات بیشتری بررسی خواهیم کرد. در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان انواع گوناگون مسیرهایی را که در این فصل مورد بحث قرار گرفتند، به وسیله یکی از زبانهای برنامه‌ریزی روبات مشخص کرد. در مثالهایی که ارائه می‌شود، از زبان AL، که در دانشگاه استانفورد ابداع شده است [۶]، استفاده می‌کنیم.

۱. این مشتق‌گیری را می‌توان به طور جداگانه برای مسیرهای از قبل طرح شده انجام داد و به کیفیت بهتری برای  $\dot{\Theta}$  و  $\ddot{\Theta}$  دست یافت. همچنین، بسیاری از سیستمهای کنترل، به ورودی  $\ddot{\Theta}$  احتیاجی ندارند، و در نتیجه  $\ddot{\Theta}$  برای آنها محاسبه نمی‌شود.

نمادهای A, B, C, و D در مثالهای زیر، متغیرهای از نوع «چهارچوب» را در زبان AL نشان می‌دهند. این چهارچوبها نقاط مسیری را مشخص می‌کنند که به‌طریقی به سیستم داده شده‌اند (یا به آن آموخته، یا برای آن توصیف شده‌اند). فرض کنید حرکت بازوی مکانیکی ماهر، در وضعیت A آغاز شود. برای حرکت دادن بازو در فضای مفصلی در راستای مسیرهای خطی-سهموی، می‌توان نوشت

move ARM to C with duration = 3 \* seconds;

برای حرکت دادن بازو به همان مکان و جهتگیری در خطی راست، می‌توان نوشت

move ARM to C linearly with duration = 3 \* seconds;

که در آن عبارت “linearly” (به‌طور خطی) نشان می‌دهد که باید از حرکت راست‌خط دکارتی استفاده شود. اگر مدت زمان حرکت اهمیتی نداشته باشد، استفاده کننده می‌تواند مشخصه زمان را حذف کند. در این صورت، سیستم مقداری از قبل تعیین شده را برای سرعت در نظر خواهد گرفت

move ARM to C;

و اگر یک نقطه بینابینی نیز به آن اضافه شود

move ARM to C via B;

یا مجموعه‌ای از نقاط بینابینی را می‌توان چنین مشخص کرد

move ARM to C via B, A, D;

توجه کنید که در دستور

move ARM to C via B with duration = 6 \* seconds;

طول مدت داده شده برای کل حرکت است، و سیستم خود چگونگی تقسیم این زمان را بین دو قطعه مسیر، تعیین خواهد کرد. در زبان AL امکان مشخص کردن طول مدت برای قطعه‌ای از مسیر نیز وجود دارد. مثلاً

move ARM to C via B where duration = 3 \* seconds;

در این صورت، نخستین قطعه مسیری که به نقطه B منتهی می‌شود، طول مدتی برابر با سه ثانیه خواهد داشت.

## ۸-۷ طرح‌ریزی مسیر با استفاده از مدل دینامیکی

معمولاً در هنگام طرح‌ریزی مسیر، در هر نقطه از ناحیه سهموی مقداری از قبل تعیین شده (یا مقداری ماکزیمم) برای شتاب در نظر گرفته می‌شود. در واقع مقدار شتاب قابل تحمل برای بازو در

هر لحظه، تابعی از دینامیک بازو و محدوده حرکتی کاراندازهای آن است. مشخصه بیشتر کاراندازها به وسیله منحنی گشتاور بر حسب سرعت داده می شود، نه با گشتاور یا شتاب ماکزیم ثابت.

اگر مسیری را با فرض اینکه در هر مفصل یا در راستای هر درجه آزادی، یک شتاب ماکزیم وجود دارد، طرحریزی کنیم، کار بسیار ساده خواهد شد. این شتاب ماکزیم، باید محتاطانه انتخاب شود تا به دستگاه، به دلیل اعمال بارهای خارج از توانایی آن، صدمه ای نرسد. بنابراین، در طرحریزی مسیر به وسیله روشهای ارائه شده در این فصل، از قابلیت های سرعت بازو به طور کامل استفاده نمی کنیم.

ممکن است این پرسش را مطرح کنیم: با داشتن مسیر مکانی مطلوب مجری نهایی، چگونه می توان اطلاعات زمانی را (که توصیف «مسیر مکانی» را به «مسیر مکانی-زمانی» تبدیل می کند) طوری به دست آورد که رسیدن به هدف در حداقل زمان ممکن صورت گیرد؟ در مرجعهای [۷] و [۸]، مسائلی از این قبیل به روشهای عددی حل شده اند. در حل این گونه مسئله ها، باید دینامیک جسم صلب و منحنیهای قید سرعت گشتاور کارانداز نیز در نظر گرفته شوند.

## ۷-۹ طرحریزی مسیرهای عاری از برخورد

بسیار مناسب است اگر بتوانیم به روبات تنها نقطه هدف را نشان دهیم، و تعیین محل و تعداد نقاط بینایی لازم برای رسیدن به هدف را، بدون برخورد با مانع، به عهده خود سیستم بگذاریم. برای انجام این کار، سیستم باید مدل های بازوی مکانیکی، ناحیه کاری، و کلیه موانع بالقوه موجود در این ناحیه را در اختیار داشته باشد. ممکن است بازوی مکانیکی دیگری در همان ناحیه کاری مشغول به کار باشد، و در نتیجه هر بازو را باید مانعی متحرک برای بازوی دیگر در نظر گرفت.

سیستمهایی که مسیرهای عاری از برخورد را طراحی می کنند، هنوز در سطح تجاری در دسترس قرار نگرفته اند. در تحقیقات انجام شده در این زمینه، دو روش قابل رقابت با یکدیگر مطرح شده اند. در روش اول، ابتدا فضای آزاد به وسیله نموداری متشکل از قطعه های مسیر (بین هر دو نقطه مسیر یک منحنی) نمایش داده می شود، و سپس یک مسیر عاری از برخورد [۹-۱۱] در این نمودار جستجو می گردد. متأسفانه پیچیدگی این روش، با تعداد مفصل های روبات به صورت تصاعدی افزایش می یابد. در روش دوم، در اطراف موانع، میدانهای پتانسیل مصنوعی ایجاد می شود. این میدانها باعث می شوند که بازوی مکانیکی در حالی که به وسیله یک قطب جذب کننده مصنوعی (که در نقطه هدف قرار دارد) به سوی هدف کشیده می شود، از برخورد با این موانع در امان بماند [۱۲]. متأسفانه در این روش، محیط روبات موضعی در نظر گرفته می شود، و ممکن است در نقاط مینیم میدان پتانسیل مصنوعی، محدودیتهایی در کار بازو پدید آید.

## مراجع

- [1] R.P. Paul and H. Zong, "Robot Motion Trajectory Specification

- and Generation," 2nd International Symposium on Robotics Research, Kyoto, Japan, August 1984.
- [2] R. Taylor, "Planning and Execution of Straight Line Manipulator Trajectories," in *Robot Motion*, Brady et al., Editors, MIT Press, 1983.
  - [3] C. DeBoor, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York, 1978.
  - [4] D. Rogers and J.A. Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill, 1976.
  - [5] B. Gorla and M. Renaud, *Robots Manipulateurs*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.
  - [6] R. Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, Mich., 1985.
  - [7] J. Bobrow, S. Dubowsky, and J. Gibson, "On the Optimal Control of Robotic Manipulators with Actuator Constraints," *Proceedings of the American Control Conference*, June 1983.
  - [8] K. Shin and N. McKay, "Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1985.
  - [9] T. Lozano-Perez, "Spatial Planning: A Configuration Space Approach," AI Memo 605, MIT Artificial Intelligence Laboratory, Cambridge, Mass., 1980.
  - [10] T. Lozano-Perez, "A Simple Motion Planning Algorithm for General Robot Manipulators," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 3, June 1987.
  - [11] R. Brooks, "Solving the Find-Path Problem by Good Representation of Free Space," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13:190-197, 1983.



- [12] O. Khatib, "Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1, Spring 1986.
- [13] R.P. Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control," MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.
- [14] R. Castain and R.P. Paul, "An Online Dynamic Trajectory Generator," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, 1984.
- [15] C.S. Lin and P.R. Chang, "Joint Trajectory of Mechanical Manipulators for Cartesian Path Approximation," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-13, 1983.
- [16] S. Chand and K. Doty, "Online Polynomial Trajectories for Robot Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, 1985.
- [17] S. Thompson and R. Patel, "Formulation of Joint Trajectories for Industrial Robots Using B-Splines," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. IE-34, 1987.
- [18] C.S. Lin, P.R. Chang, and J.Y.S. Luh, "Formulation and Optimization of Cubic Polynomial Joint Trajectories for Industrial Robots," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-28, 1983.
- [19] M. Vukobratovic and N. Kircanski, "Method for Optimal Synthesis of Manipulation Robot Trajectories," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, Vol. 104, 1982.

## تمرینها

۷-۱ [۸] هنگامی که رباتی با شش مفصل، با حرکت در امتداد مسیری به شکل منحنی درجه سوم، از دو نقطه بینابینی می‌گذرد، و در نقطه هدف می‌ایستد، چند قطعه مسیر درجه سوم جداگانه محاسبه می‌شود؟ برای تعیین این قطعه مسیرهای درجه سوم، چه تعداد ضریب باید در نظر گرفت؟

۲-۷ [۱۳] روباتی با یک رابط با مفصل لولایی، در زاویه  $\theta = -5^\circ$  ساکن است. می‌خواهیم در مدت ۴ ثانیه مفصل روبات را در مسیری هموار، به  $\theta = 80^\circ$  حرکت دهیم. ضرایب مسیر درجه سومی را پیدا کنید که این عمل را انجام دهد، و بازو را در نقطه هدف به حال سکون در آورد. منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب مفصل را به صورت تابعهایی از زمان رسم کنید.

۳-۷ [۱۴] روباتی با یک رابط با مفصل لولایی، در زاویه  $\theta = -5^\circ$  ساکن است. می‌خواهیم در مدت ۴ ثانیه، مفصل روبات را در مسیری هموار، به  $\theta = 80^\circ$  حرکت دهیم، و بازو را در این وضعیت به نرمی متوقف سازیم. پارامترهای مسیر خطی-سه‌موی لازم برای انجام این کار را محاسبه، و منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب مفصل را به صورت تابعهایی از زمان رسم کنید.

۴-۷ [۳۰] برنامه‌ای برای طرح مسیر بنویسید که در آن از معادله‌های (۷-۲۵) تا (۷-۳۰)، در حالت کلی برای مسیرهایی که به وسیله تعدادی دلخواه نقطه بینابینی توصیف می‌شوند، استفاده شود. این برنامه را برای حل مثال ۴-۷ به کار برید.

۵-۷ [۱۸] منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب را برای منحنی شتاب پیوسته و دو قطعه‌ای مثال ۲-۷ رسم کنید. این منحنیها را برای مفصلی رسم کنید که در آن  $\theta_0 = 57^\circ$ ،  $\theta_v = 157^\circ$  و  $\theta_g = 407^\circ$ . طول مدت هر قطعه از منحنی را  $17^\circ$  ثانیه در نظر بگیرید.

۶-۷ [۱۸] منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب را برای منحنی دو قطعه‌ای که هر قطعه آن یک چندجمله‌ای درجه سوم است، با استفاده از ضرایب داده شده در رابطه (۷-۱۱) رسم کنید. این منحنیها را برای مفصلی رسم کنید که وضعیت آن در نقطه اولیه  $\theta_0 = 57^\circ$ ، در نقطه بینابینی  $\theta_v = 157^\circ$  و در نقطه هدف  $\theta_g = 407^\circ$  است. فرض کنید طول مدت هر قطعه منحنی  $17^\circ$  ثانیه، و سرعت در نقطه بینابینی  $17/5 \text{ deg/s}$  است.

۷-۷ [۲۰] مقادیر  $\theta_{12}, \theta_{23}, t_1, t_2, t_3$  را برای یک منحنی با دو قطعه خطی-سه‌موی (با استفاده از معادله‌های (۷-۲۴) تا (۷-۲۸)) محاسبه کنید. برای این مفصل مقادیر را  $\theta_1 = 57^\circ$ ،  $\theta_2 = 157^\circ$  و  $\theta_3 = 407^\circ$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $t_{d12} = t_{d23} = 17^\circ \text{ s}$  و مقدار از پیش تعیین شده شتاب، در طول نواحی سه‌موی برابر با  $8^\circ \text{ deg/s}^2$  است. منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب  $\theta$  را رسم کنید.

۸-۷ [۱۸] منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب را برای منحنی شتاب پیوسته و دو قطعه‌ای مثال ۲-۷ رسم کنید. این منحنیها را برای مفصلی رسم کنید که در آن  $\theta_0 = 57^\circ$ ،  $\theta_v = 157^\circ$  و  $\theta_g = -107^\circ$ . طول مدت هر قطعه را  $27^\circ$  ثانیه در نظر بگیرید.

۹-۷ [۱۸] منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب را برای منحنی دو قطعه‌ای که هر قطعه آن یک مسیر درجه سوم است، با استفاده از ضرایب داده شده در رابطه (۷-۱۱) رسم کنید. این منحنیها را برای مفصلی رسم کنید که در آن  $\theta_0 = 57^\circ$  (نقطه اولیه)،  $\theta_v = 157^\circ$

(نقطه بینابینی)، و  $\theta_0 = -10/00$  (نقطه هدف). طول مدت هر قطعه را  $2/0$  ثانیه، و سرعت در نقطه بینابینی را  $0/0 \text{ deg/s}$  فرض کنید.

۱۰-۷ [۲۰] مقادیر  $\theta_{12}, \theta_{23}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{23}, t_{12}, t_{23}$  را برای یک منحنی با دو قطعه خطی-سه‌موی به‌دست آورید (با استفاده از معادله‌های (۷-۲۴) تا (۷-۲۸)). برای این مفصل،  $\theta_1 = 5/00$ ،  $\theta_2 = 15/00$ ،  $\theta_3 = -10/00$ ، و طول مدت قطعه‌ها را  $t_{a12} = t_{a23} = 2/0 \text{ s}$  در نظر بگیرید. مقدار از بیش تعیین شده شتاب را در طول نواحی سه‌موی برابر  $60 \text{ deg/s}^2$  بگیرید. منحنیهای مکان، سرعت، و شتاب  $\theta$  را رسم کنید.

۱۱-۷ [۶] بردار مکان و جهتگیری دکارتی  $1 \times 6$ ،  $({}^S X_G)$  را که با  ${}^S T$  معادل است، پیدا کنید، به‌گونه‌ای که  ${}^S R = ROT(\hat{Z}, 300)$  و  ${}^S P_{GORG} = [10/0 \quad 20/0 \quad 30/0]^T$ .

۱۲-۷ [۶] تبدیل  ${}^S T$  را که با بردار مکان و جهتگیری دکارتی

$${}^S X_G = [5/0 \quad -20/0 \quad 10/0 \quad 45/0 \quad 0/0 \quad 0/0]^T$$

معادل است، به‌دست آورید.

۱۳-۷ [۳۰] برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از معادله‌های دینامیکی بخش ۶-۷ (بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط)، مدت زمان گشتاورهای مورد نیاز برای به حرکت در آوردن بازو در راستای مسیر تمرین ۷-۸ را محاسبه کند. گشتاورهای ماکزیمم مورد نیاز کدام‌اند و در کدام نقطه مسیر روی می‌دهند؟

۱۴-۷ [۳۲] برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از معادله‌های دینامیکی بخش ۶-۷ (بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط)، مدت زمان گشتاورهای مورد نیاز برای به حرکت در آوردن بازو در راستای مسیر تمرین ۷-۸ را محاسبه کند. منحنیهای جداگانه‌ای از گشتاورهای مفصلی مورد نیاز را تحت تأثیر لختی، سرعت، و گرانی رسم کنید.

۱۵-۷ [۲۲] مثال ۷-۲ را برای حالت  $t_{f1} \neq t_{f2}$  حل کنید.

۱۶-۷ [۲۵] می‌خواهیم مفصلی را در زمان  $t_f$ ، از  $\theta_0$  به  $\theta_f$  حرکت دهیم، به‌طوری‌که در  $\theta_0$  از حالت سکون حرکت را آغاز کند، و در  $\theta_f$  نیز ساکن شود. مقادیر  $\theta_0$  و  $\theta_f$  داده شده‌اند، اما هدف محاسبه  $t_f$  است به‌گونه‌ای که به‌ازای کلیه مقادیر  $t$ ، نامساویهای  $\|\ddot{\theta}(t)\| < \ddot{\theta}_{max}$  و  $\|\dot{\theta}(t)\| < \dot{\theta}_{max}$  برقرار شوند. کمیت‌های  $\ddot{\theta}_{max}$  و  $\dot{\theta}_{max}$  ثابت‌های مثبت مفروض‌اند. از یک قطعه منحنی درجه سوم استفاده کنید و عبارتی برای  $t_f$  و ضرایب این چندجمله‌ای به‌دست آورید.

۱۷-۷ [۱۰] مسیر درجه سوم و تک قطعه‌ای، به‌صورت زیر داده شده است

$$\theta(t) = 10 + 90t^2 - 60t^3$$

و در فاصله زمانی از  $t = 0$  تا  $t = 1$  ثانیه به‌کار می‌رود. مقادیر اولیه و نهایی مکان،

سرعت، و شتاب را پیدا کنید.

۱۸-۷ [۱۲] مسیر درجه سوم و تک قطعه‌ای، چنین داده شده است

$$\theta(t) = 10 + 90t^2 - 60t^3$$

و در فاصله زمانی از  $t = 0$  تا  $t = 2$  ثانیه به کار می‌رود. مقادیر اولیه و نهایی مکان، سرعت، و شتاب را به دست آورید.

۱۹-۷ [۱۳] مسیر درجه سوم و تک قطعه‌ای، چنین داده شده است

$$\theta(t) = 10 + 5t + 70t^2 - 45t^3$$

و در فاصله زمانی از  $t = 0$  تا  $t = 1$  ثانیه به کار می‌رود. مقادیر اولیه و نهایی مکان، سرعت، و شتاب را به دست آورید.

۲۰-۷ [۱۵] مسیر درجه سوم و تک قطعه‌ای، چنین داده شده است

$$\theta(t) = 10 + 5t + 70t^2 - 45t^3$$

و برای فاصله زمانی  $t = 0$  تا  $t = 2$  ثانیه به کار می‌رود. مقادیر اولیه و نهایی مکان، سرعت، و شتاب را به دست آورید.

### تمرین برنامه نویسی (قسمت ۷)

۱. برنامه‌ای برای طرح یک مسیر درجه سوم در فضای مفصلی بنویسید و در آن از زیر برنامه زیر استفاده کنید

Procedure CUBCOEF(VAR th0, thf, thdot0, thdotf: real;

VAR cc: vec4);

که در آن

$\text{th0}$  = مکان اولیه  $\theta$  در ابتدای قطعه منحنی

$\text{thf}$  = مکان نهایی  $\theta$  در انتهای قطعه منحنی

$\text{thdot0}$  = سرعت اولیه قطعه منحنی

$\text{thdotf}$  = سرعت نهایی قطعه منحنی

این چهار کمیت، ورودی برنامه، و "cc"، آرایه‌ای متشکل از چهار ضریب چندجمله‌ای درجه سوم، خروجی برنامه هستند.

برنامه شما باید مشخصات (دست کم) پنج نقطهٔ بینابینی را به صورت چهارچوب

ایزار  $\{T\}$  نسبت به چهارچوب ایستگاه  $\{S\}$ ، به شکل  $(x, y, \phi)$ ، دریافت کند. کلیهٔ

قطعه‌های منحنی را برای سادگی با طول مدت یکسان فرض کنید. این سیستم باید ضرایب چندجمله‌ایهای درجه سوم را با استفاده از روش خودآموز مناسب محاسبه، و سرعت مفصلها را در نقاط بینابینی تعیین کند ( راهنمایی: به روش دوم در بخش ۷-۳ مراجعه کنید).

۲. برنامه‌ای برای تولید مسیر بنویسید که مسیری را در فضای مفصلی، با استفاده از مجموعه ضرایب درجه سوم برای هر قطعه از منحنی، محاسبه کند. این سیستم باید بتواند مسیر چند قطعه‌ای را که در مسئله قبل (مسئله ۱) طرح شد، تولید کند. طول مدت قطعه‌ها توسط استفاده کننده تعیین می‌شود. اطلاعات مکان، سرعت، و شتاب در این برنامه، باید با سرعتی برابر با آهنگ روزآمد کردن مسیر، که آن نیز توسط استفاده کننده مشخص می‌شود، تولید شود.

۳. یک بازوی مکانیکی با سه رابط را (مطابق معمول) در نظر بگیرید. چهارچوبهای  $\{T\}$  و  $\{S\}$  نیز مانند قبل چنین تعریف می‌شوند

$${}^W_T T = [x \ y \ \theta] = [0.1 \ 0.2 \ 30.0^\circ]$$

$${}^B_S T = [x \ y \ \theta] = [0.0 \ 0.0 \ 0.0^\circ]$$

طول مدت هر قطعه از منحنی را  $3.0^\circ$  ثانیه در نظر بگیرید، و مسیر حرکت را که مشخصات آن در زیر داده شده است، طراحی و اجرا کنید. مکان اولیه بازو عبارت است از

$$[x_1 \ y_1 \ \phi_1] = [0.758 \ 0.173 \ 0.0^\circ]$$

مختصات نقاط بینابینی چنین است

$$[x_2 \ y_2 \ \phi_2] = [0.6 \ -0.3 \ 45.0^\circ]$$

$$[x_3 \ y_3 \ \phi_3] = [-0.4 \ 0.3 \ 120.0^\circ]$$

و مختصات نقطه هدف (که در این مسئله بر نقطه اولیه منطبق است) نیز چنین است

$$[x_4 \ y_4 \ \phi_4] = [0.758 \ 0.173 \ 0.0^\circ]$$

آهنگ روزآمد کردن مسیر را برابر  $40 \text{ Hz}$  در نظر بگیرید، اما مکان را فقط در هر  $0.2^\circ$  ثانیه چاپ کنید. مقادیر مکانی را در خروجی برحسب مختصات دکارتی چاپ کنید. در صورت تمایل، می‌توانید مقادیر سرعت و شتاب را نیز در خروجی چاپ کنید، اما اجباری برای انجام این کار ندارید.





## طراحی مکانیزم بازوی مکانیکی ماهر

### ۸-۱ مقدمه

در فصلهای پیش، دیدیم که ساختار خاص بازوی مکانیکی ماهر، بر تحلیل سینماتیکی و دینامیکی آن تأثیر دارد. مثلاً، برخی پیکربندیهای سینماتیکی به راحتی قابل حل اند، در حالی که برای برخی دیگر، ممکن است حل سینماتیکی بسته موجود نباشد. به همین ترتیب، سادگی معادله‌های دینامیکی تا حدود زیادی به پیکربندی سینماتیکی و پخش جرم در رابطها، بستگی دارد. در فصلهای آینده خواهیم دید که کنترل بازوی مکانیکی نه تنها به دینامیک جسم صلب، بلکه به اصطکاک و انعطاف‌پذیری سیستمهای محرک بازو نیز بستگی دارد.

اعمالی که یک بازوی مکانیکی می‌تواند انجام دهد، تا حدود زیادی به طرح ویژه آن بستگی دارد. اگر چه تاکنون بازوی روبات را موجودی انتزاعی در نظر گرفته‌ایم، اما در واقع عملکرد این بازو به وسیله عواملی چون ظرفیت حمل بار، سرعت، اندازه فضای کاری، و تکرارپذیری، معین می‌شود. برای کاربردهای مشخص، اندازه کلی بازو، وزن، توان مصرفی، و هزینه عوامل تعیین کننده‌اند. در این فصل، برخی مسائل مربوط به طراحی بازوهای مکانیکی ماهر، بررسی می‌شود. در حالت کلی، روشهای طراحی و حتی ارزیابی هر طرح کامل شده، موضوعاتی هستند که تا حدودی به نظر افراد بستگی دارند و مشکل می‌توان طیفی از انتخابهای طراحی را با قوانین سخت و محکم محدود کرد.

عناصر هر سیستم روباتی را می‌توان به چهار دسته زیر تقسیم کرد:

۱. بازوی مکانیکی روبات، شامل حساسه‌های داخلی (عمقی) آن

۲. مجری نهایی یا ابزار انتهای بازو

۳. حساسه‌های خارجی و سیستم‌های بینایی، تغذیه‌کننده‌های قطعه، و غیره

۴. کنترل کننده

در اینجا تنها به طراحی بازوی مکانیکی ماهر بسنده می‌کنیم.

هنگام طراحی بازوی مکانیکی ماهر، ابتدا عواملی را که بیشترین تأثیر کلی را بر طرح می‌گذارند، در نظر می‌گیریم، و سپس پرسشهای خود را با جزئیات بیشتری مطرح می‌کنیم. اما در هر حال، طراحی بازوی مکانیکی فرایندی تکراری است. در بسیاری از موارد، مسائلی که در هنگام حل جزئیات یک طرح رخ می‌نمایند، طراح را وادار می‌سازند که در تصمیمات گرفته شده در سطوح بالاتر طرح، تجدید نظر کند.

## ۸-۲ طراحی بر پایه عملیات خواسته شده از روبات

اگرچه روباتها اسماً «قابل برنامه‌ریزی برای انجام طیف وسیعی از عملیات» هستند و می‌توانند وظایف گوناگونی را انجام دهند، اما به دلیل مسائل اقتصادی و عملی، برای انجام کارهای مختلف، روباتهای مختلفی ساخته می‌شوند. مثلاً، از روباتهای بزرگی که قادرند بارهای سنگین (چندصد پوند) را حمل کنند، در حالت کلی نمی‌توان برای قرار دادن قطعات الکترونیکی در یک تخته مدار استفاده کرد. به طوری که خواهیم دید، نه تنها اندازه روبات، بلکه تعداد مفصلها و ترتیب قرارگیری آنها، نوع کاراندازی، نوع حساسه‌ها، و کنترل روبات، به میزان زیادی برحسب نوع کاری که روبات باید انجام دهد، تغییر می‌کنند.

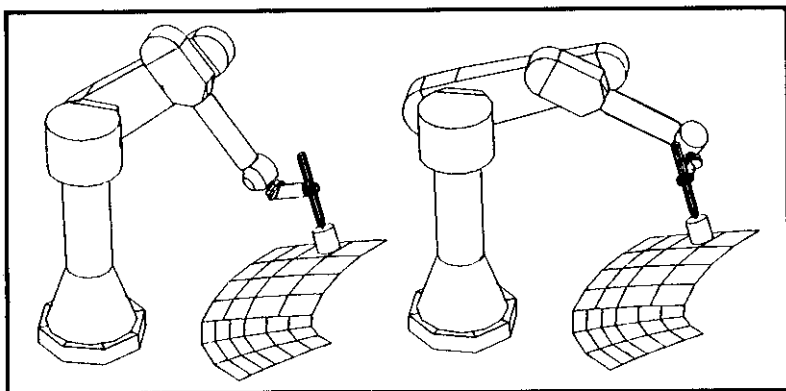
### تعداد درجات آزادی

تعداد درجات آزادی هر بازوی مکانیکی ماهر، باید با تعداد درجات آزادی لازم برای انجام عمل مورد نظر، برابر باشد. همه اعمال مورد نظر به شش درجه آزادی نیاز ندارند.

متداولترین حالت هنگامی روی می‌دهد که مجری نهایی محور تقارن داشته باشد. شکل ۸-۱ بازویی را در حال استقرار یک ابزار سنگزنی به دو طریق مختلف، نشان می‌دهد. در این حالت، جهتگیری ابزار نسبت به محور آن،  $Z_T$ ، اهمیتی ندارد، زیرا چرخ سنگزنی با سرعت چندصد RPM دوران می‌کند. از آنجا که این روبات با شش درجه آزادی را می‌توان برای انجام کار مورد نظر در بینهایت وضعیت مختلف قرار داد (دوران حول  $Z_T$  متغیری آزاد است)، می‌گوییم که روبات برای انجام این عمل، دارای درجه آزادی زاید است. در عملیات جوشکاری با قوس الکتریکی، جوشکاری نقطه‌ای، پلیسه‌گیری فلزات، چسبکاری، و عیقلکاری نیز غالباً از مجری نهایی با محور تقارن استفاده می‌شود.

برای تحلیل وضعیت ابزار متقارن، گاهی تصویر یک مفصل فرضی که محور آن بر محور تقارن منطبق است، سودمند خواهد بود. برای قرار دادن هر مجری نهایی در وضعیتی معین، به شش درجه آزادی نیاز داریم. چون یکی از این درجات آزادی، مفصل فرضی ماست، کافی است بازوی





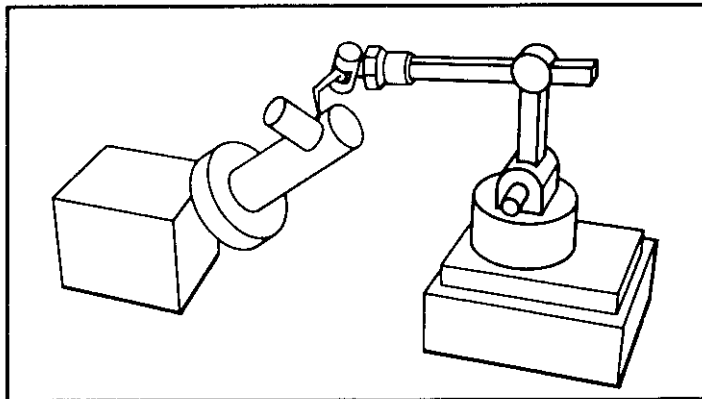
شکل ۸-۱ بازوی مکانیکی با شش درجه آزادی و یک ابزار متقارن، دارای یک درجه آزادی زاید است.

مکانیکی واقعی تنها پنج درجه آزادی داشته باشد. اگر از روبات با پنج درجه آزادی شکل ۸-۱ استفاده کنیم، آن‌گاه به حالت معمول باز می‌گردیم که در آن برای استقرار ابزار در وضعیتی خاص، تعداد متناهی از جوابهای مختلف موجودند. به دلیل کاربرد نسبتاً زیاد ابزارهای متقارن در صنعت، درصد بزرگی از روباتهای صنعتی موجود، پنج درجه آزادی دارند.

برخی از اعمال روباتی، در محدوده‌ای انجام می‌شوند که کمتر از شش درجه آزادی دارد. قراردادن قطعات الکترونیکی در تخته مدارها، نمونه‌ای از این حالت است. تخته مدارهای الکترونیکی، در حالت کلی صفحه‌ای، و شامل قسمتهایی با ارتفاع متفاوت‌اند. استقرار قطعات بر روی یک سطح صفحه‌ای، به سه درجه آزادی نیاز دارد ( $x$ ،  $y$ ، و  $\theta$ )، و برای بلند کردن و جازدن قطعات نیز حرکت چهارمی در راستای عمود بر صفحه ( $z$ ) اضافه می‌شود.

روباتهایی که کمتر از شش درجه آزادی دارند نیز می‌توانند کارهایی را انجام دهند که در آنها از نوعی وسیله تثبیت موقعیت فعال، برای ارائه قطعات استفاده می‌شود. مثلاً، سکوی چرخشی/خمشی نشان داده شده در شکل ۸-۲، قطعات را در وضعیت درست برای جوشکاری عرضه می‌کند. این سکو، دو درجه آزادی از درجات آزادی موجود بین لوله‌ها و مجری نهایی را به خود اختصاص می‌دهد. با توجه به اینکه جوشکاری با قوس الکتریکی، عملی است که با ابزار متقارن انجام می‌شود، می‌توان گفت که از لحاظ نظری، برای انجام این کار باید از بازویی با سه درجه آزادی استفاده کرد. اما در عمل، به دلایلی چون جلوگیری از برخورد با قطعه کار، به ناچار باید از روباتی با درجات آزادی بیشتر استفاده کرد.

قطعات دارای محور تقارن نیز تعداد درجات آزادی لازم برای بازو را کاهش می‌دهند. مثلاً قطعات استوانه‌ای را می‌توان بدون توجه به جهتگیری گیره بازو نسبت به محور تقارن استوانه، بلند کرد و در محل مورد نظر قرار داد. اما توجه کنید که پس از آنکه قطعه گرفته شد، جهتگیری آن



شکل ۸-۲ سکوی با حرکات چرخشی و بالا و پایین، دو درجه آزادی به تعداد کل درجات آزادی سیستم روباتی، اضافه می‌کند.

نسبت به محور تقارن در عملیات بعدی نباید اهمیت داشته باشد، زیرا جهتگیری آن تضمین نشده است.

### فضای کاری

بازوی مکانیکی ماهر، برای انجام وظایف خود، باید به تعدادی قطعه کار یا بست دسترسی پیدا کند. در برخی موارد، این قطعات را می‌توان در وضعیتی مناسب از نظر فضای کاری بازو، قرار داد. در موارد دیگر ممکن است روبات در محیطی ثابت با فضای کاری صلب نصب شود. فضای کاری را گاهی حجم کاری، یا پوش کاری نیز می‌نامند.

فضای کاری مورد نیاز بازوی مکانیکی، با مقیاس کاری که باید انجام شود، تعیین می‌گردد. در برخی موارد، جزئیات شکل فضای کاری و محل نقاط تکیه آن نیز ممکن است با اهمیت باشند. گاهی حرکت خود بازو در فضای کاری، می‌تواند عامل مهمی در تعیین این فضا باشد. بسته به طرح سینماتیکی بازو، برای جلوگیری از برخورد در کاربردی خاص، ممکن است در اطراف بسته‌ها فضای کمتر یا بیشتری مورد نیاز باشد. محیطهای محدود شده می‌توانند بر انتخاب پیکربندی سینماتیکی بازو تأثیر گذارند.

### ظرفیت حمل بار

ظرفیت حمل بار هر بازوی مکانیکی ماهر، به اندازه اعضای سازه‌ای، سیستم انتقال قدرت، و کاراندازهای آن بستگی دارد. بارگذاری بر روی کاراندازها و سیستم رانش، تابعی از پیکربندی روبات، درصد زمانی که بار تحمل می‌شود، و بارگذاری دینامیکی حاصل از نیروهای لختی و نیروهای وابسته به سرعت است.

## سرعت

هدفی آشکار در طراحی روباتها، عملکرد هرچه سریعتر آنها بوده است. سرعت بالا در بسیاری از مواردی که سیستم روباتی باید از نظر اقتصادی با سیستمهای اتوماسیون انعطاف ناپذیر، یا انسان (کارگر) رقابت کند، مزیت دارد. اما در برخی موارد، نوع عملیات است که سرعت را محدود می کند، نه بازوی مکانیکی (مانند عملیات جوشکاری و رنگپاشی).

یکی از وجوه تمایز مهم، تمایز بین سرعت ماکزیم مجری نهایی و چرخه زمانی کل برای انجام عملی خاص است. در کاربردهایی که به بلند کردن قطعات و قراردادن آنها در محلی می انجامد، بازوی مکانیکی باید در محدوده دقت مکانی، دارای شتاب افزایشده (به هنگام بلند کردن) و شتاب کاهشده (به هنگام قراردادن) باشد. غالباً اجرای مراحل شتاب افزایشده و شتاب کاهشده، بیشترین قسمت از چرخه زمانی را به خود اختصاص می دهند. به همین دلیل، علاوه بر سرعت ماکزیم، قابلیت شتابگیری بازو نیز اهمیت زیادی دارد.

## تکرارپذیری و دقت

اگر چه تکرارپذیری و دقت زیاد، ویژگیهای مطلوب در طراحی بازوهای مکانیکی ماهر به شمار می آیند، اما دستیابی به آنها به هزینه زیادی نیاز دارد. مثلاً اگر قطر ناحیه رنگپاشی شده توسط یک روبات رنگپاش، برابر با  $8 \text{ in} \pm 2 \text{ in}$  باشد، لزومی ندارد در طراحی این روبات، محدوده دقت را برابر  $0.001 \text{ in}$  در نظر بگیریم. در بسیاری موارد، دقت مدلی خاص از یک روبات صنعتی، به جزئیات نحوه ساخت آن بیشتر از طراحی آن وابسته است. دقت بالا با اطلاع کامل از پارامترهای رابط (و دیگر پارامترها) حاصل می شود. با اندازه گیریهای دقیق پس از ساخت، یا با توجه دقیق به توالی آنها در حین ساخت روبات، می توان به این دقت بالا دست یافت.

## ۸-۳ پیکربندی سینماتیکی

پس از آنکه درباره تعداد درجات آزادی مورد نیاز تصمیم گیری شد، باید پیکربندی خاصی از مفصلها را انتخاب کرد تا این درجات آزادی را ایجاد کند. در اهرم بندیهای سینماتیکی زنجیری باز (سری)، تعداد مفصلها با تعداد درجات آزادی مورد نیاز برابر است. بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر، طوری طراحی می شوند که در آنها  $n - 3$  مفصل آخر، مجری نهایی را در جهتگیری مورد نظر قرار دهند، و محورهای این مفصلها نیز در نقطه میچ، یکدیگر را قطع کنند. مکان نقطه میچ را نیز سه مفصل اول تعیین می کنند. می توان گفت که بازوهای مکانیکی ماهر با این نوع طراحی، از یک سازه تعیین مکان و یک سازه تعیین جهتگیری یا میچ تشکیل می شوند. چنانکه در فصل ۴ دیدیم، معادله های سینماتیکی این نوع بازوها، همواره جوابهای بسته خواهند داشت. اگر چه پیکربندیهای دیگری نیز موجودند که به ازای آنها جوابهای بسته حاصل می شوند، اما تقریباً کلیه بازوهای مکانیکی صنعتی، مکانیزم جدا کننده میچ دارند. علاوه بر این، سازه تعیین مکان را

تقریباً بدون استثنا، ساده طراحی می‌کنند. پیچش رابطها را برابر با  $0^\circ$  یا  $\pm 90^\circ$  و طول بسیاری از رابطها و انحرافها را برابر صفر در نظر می‌گیرند.

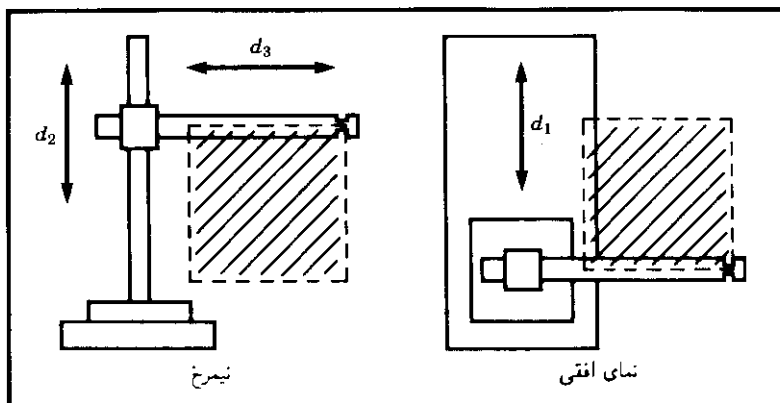
معمولاً بازوهای مکانیکی از نوع جدا کنندهٔ میج با سینماتیک ساده را بر اساس طرح سه مفصل اول آنها (سازهٔ تعیین مکان) طبقه‌بندی می‌کنند. در مطالب بعدی، مهمترین طبقه‌بندیهای متداول بازوهای مکانیکی معرفی خواهد شد.

### بازوی مکانیکی ماهر دکارتی

بازوی مکانیکی ماهر دکارتی، شاید ساده‌ترین پیکربندی را داشته باشد. چنانکه در شکل ۸-۳ دیده می‌شود، مفصلهای ۱ تا ۳ کشویی و دوه‌دو برهم عمودند. همچنین، حرکت آنها در راستای محوره‌های دکارتی  $\hat{X}$ ،  $\hat{Y}$  و  $\hat{Z}$  انجام می‌گیرد. جواب معادله‌های سینماتیکی وارون این بازو، بدیهی است.

این نوع پیکربندی، روباتهایی با سازه‌های بسیار سخت را ایجاد می‌کند. در نتیجه می‌توان روباتهای بسیار بزرگی را با استفاده از این مکانیزم، تولید کرد. این نوع روباتها را معمولاً روباتهای قاب جرثقیل می‌نامند، زیرا به جرثقیلهای قابدار دروازه‌ای شباهت دارند. روباتهای قاب جرثقیل، گاهی برای انجام عملیات بر روی اتومبیلی کامل، یا معاینهٔ دقیق هواپیمایی کامل، به‌کار می‌روند. مزیت دیگر روباتهای دکارتی آن است که حرکتهای سه مفصل اول آنها به یکدیگر وابسته نیست. این ویژگی باعث می‌شود طراحی آنها ساده‌تر باشد و برای سه مفصل اول، نقاط تکیه ایجاد نشود.

عیب اصلی این بازوها، آن است که کلیهٔ تغذیه‌کننده‌ها و بستهای مربوط به آنها، باید در «داخل» روبات قرار گیرند. در نتیجه، سلولهای کاری کاربردی برای روباتهای دکارتی، بسیار وابسته به ماشین خواهند شد. اندازهٔ سازهٔ تکیه‌گاهی روبات، در اندازه و چگونگی قرارگیری بستها و حساسه‌ها،



شکل ۸-۳ بازوی مکانیکی ماهر دکارتی.

محدودیت ایجاد می‌کند. چنین محدودیتهایی باعث می‌شوند که بازسازی و تبدیل روباتهای دکارتی به سلولهای کاری موجود، بسیار دشوار شود.

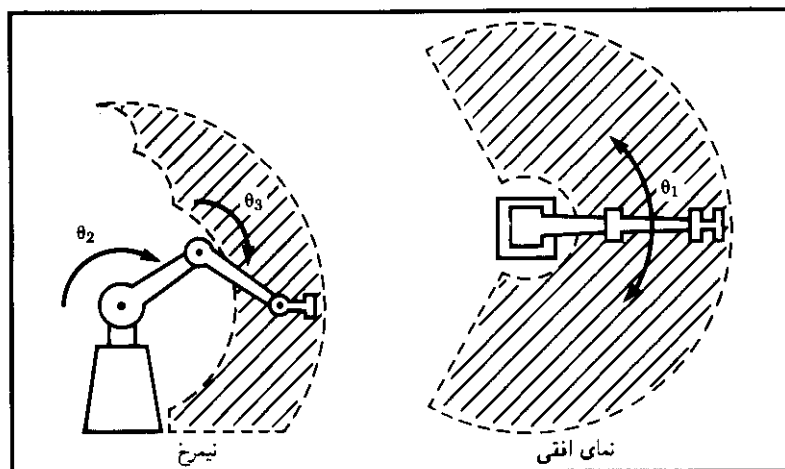
### بازوهای مکانیکی ماهر بندبند

در شکل ۴-۸، یک بازوی مکانیکی ماهر بندبند نشان داده شده است. این بازو را گاهی بازوی مکانیکی ماهر مفصلی، زانویی، یا شبه انسان نیز می‌نامند. این بازوها معمولاً از دو مفصل شانه‌ای، یکی برای ایجاد دوران حول محور قائم، و دیگری برای ایجاد تغییر سطح نسبت به صفحه افقی، یک مفصل زانویی که محور آن معمولاً با محور مفصل تغییر سطح شانه موازی است، و دو یا سه مفصل از نوع میج واقع در انتهای بازو، تشکیل می‌شوند. هر دو روبات پیوما ۵۶° و موتومان ۳-۱، که در فصلهای پیش بررسی شدند، از این دسته‌اند.

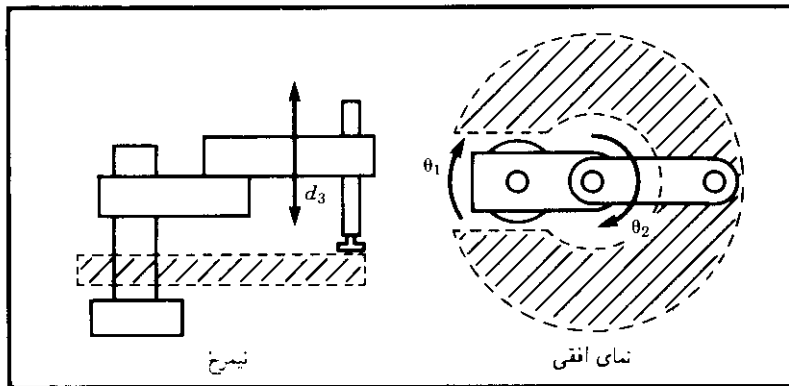
در روباتهای بندبند، سازه بازو کمترین تداخل را در فضای کاری دارد. لذا این روباتها قادرند به درون فضاهای محدود دسترسی یابند. همچنین، کل سازه این روباتها از روباتهای دکارتی بسیار کوچکتر است، و به همین دلیل برای کاربردهایی که نیازمند به فضاهای کاری کوچکتری هستند، کم هزینه‌تر خواهند بود.

### بازوهای مکانیکی اسکارا

پیکربندی روبات اسکارا<sup>۱</sup> در شکل ۵-۸ نشان داده شده است. این روبات سه مفصل لولایی با محورهای موازی دارد که حرکت و جهتگیری در صفحه را برای آن ممکن می‌کنند. از مفصل کشویی چهارم نیز برای حرکت دادن مجری نهایی در راستای عمود بر صفحه، استفاده می‌شود.



شکل ۴-۸ بازوی مکانیکی ماهر بندبند.



شکل ۸-۵ بازوی مکانیکی اسکارا.

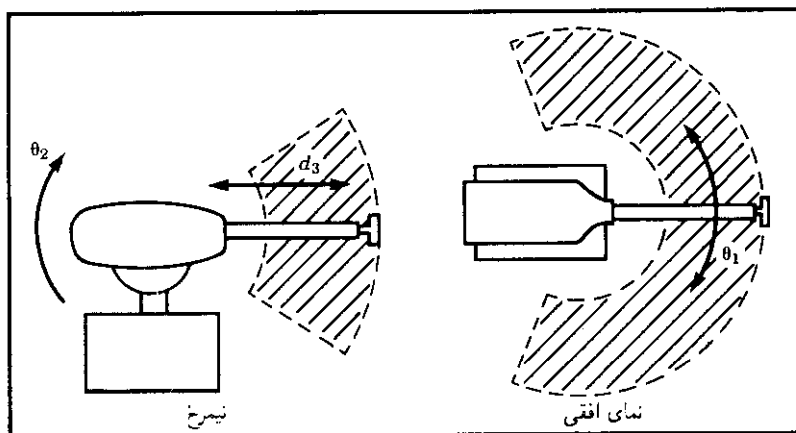
مزیت اصلی این روبات آن است که سه مفصل اول آن لزوماً وزن بازو یا بار را تحمل نمی‌کنند. همچنین، رابط صفر این روبات، به آسانی می‌تواند کاراندازهای دو مفصل اول را در خود جای دهد. کاراندازها را می‌توان بسیار بزرگ ساخت تا روبات بتواند بسیار سریع حرکت کند. مثلاً بازوی مکانیکی ماهر ادیت وان اسکارا<sup>۱</sup> می‌تواند با سرعتی تا ۳۰ فوت در ثانیه حرکت کند (در حدود ده برابر سریعتر از بیشتر روباتهای بندبند)<sup>[۱]</sup>. مناسبترین کاربرد این روبات، در عملیات صفحه‌ای است.

### بازوهای مکانیکی کروی

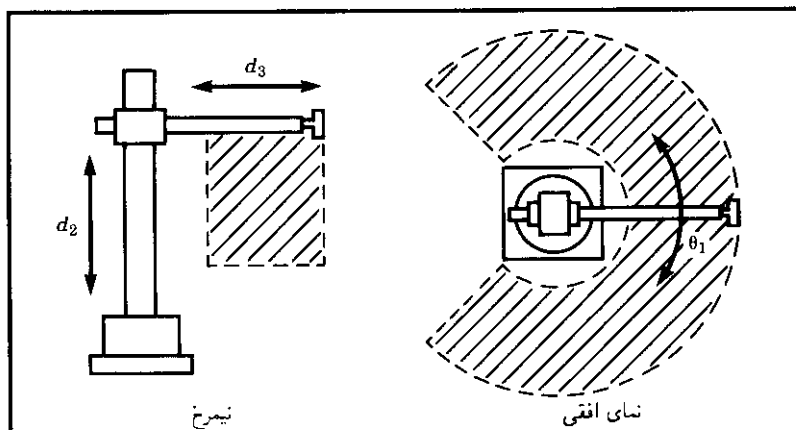
پیکربندی کروی در شکل ۸-۶، از بسیاری جهات به بازوی مکانیکی بندبند شباهت دارد، اما در آن مفصل زانو با مفصلی کشویی جایگزین شده است. این طرح، برای برخی از کاربردها، از طرح زانو مناسبتر است. عملکرد رابط کشویی می‌تواند به صورت تلسکوپی باشد، و یا در هنگام بازگشت، از پشت روبات بیرون آید.

### بازوهای مکانیکی استوانه‌ای

بازوهای مکانیکی استوانه‌ای (شکل ۸-۷) از مفصلی کشویی برای حرکت بازو در راستای قائم، مفصلی لولایی با محوری قائم، مفصل کشویی دیگری با محوری عمود بر محور مفصل لولایی، و نوعی میج، تشکیل می‌شوند.



شکل ۸-۶ بازوی مکانیکی ماهرکروی.



شکل ۸-۷ بازوی مکانیکی ماهر استوانه‌ای.

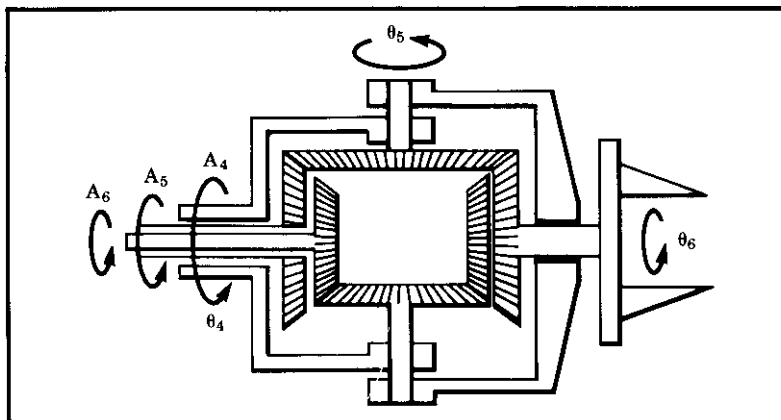
## مچها

معمولترین پیکربندیهای مچ، از دو یا سه مفصل لولایی با محورهای عمود برهم متقاطع در یک نقطه، تشکیل می‌شوند. اولین مفصل مچ، معمولاً مفصل شماره ۴ بازوی مکانیکی است. ترکیب سه محور مفصلی عمود برهم به صورت فوق، می‌تواند ضامن دستیابی به هر جهتگیری دلخواه (با فرض محدود نبودن زوایای مفصلی) باشد [۲]. به طوری که در فصل ۴ گفته شد، معادله‌های سینماتیکی هر بازوی مکانیکی ماهر دلخواه با سه محور متوالی و متقاطع در یک نقطه،

جواب بسته خواهد داشت. بدین ترتیب، مچی با سه محور عمود برهم را می‌توان در هر جهتگیری دلخواه در انتهای بازو قرار داد، بدون آنکه مشکلی پدید آید. در شکل ۸-۸، طرحی از مفصل میج دیده می‌شود که در آن چندین مجموعه از چرخنده‌های مخروطی برای رانش مکانیزم توسط کاراندازهای دور از آن، به‌کار می‌رود.

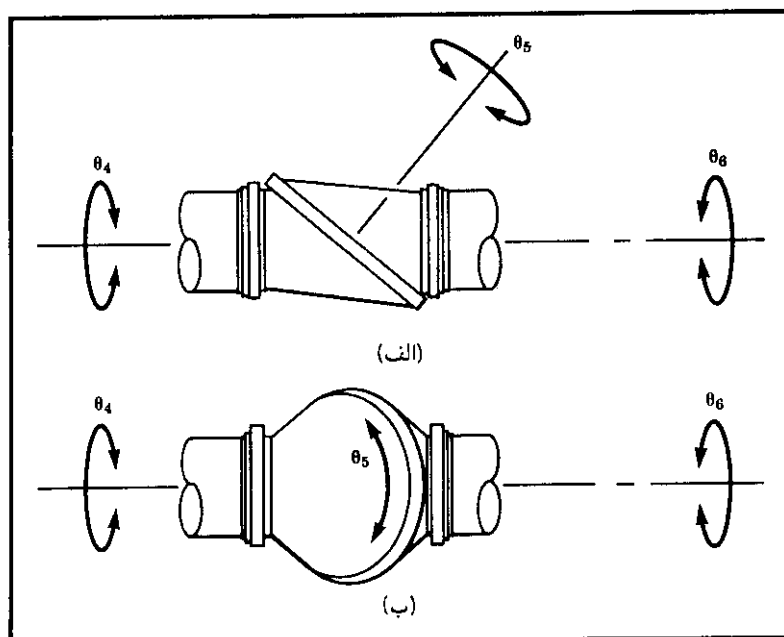
در عمل به دشواری می‌توان مچی با سه محور عمود برهم ساخت که محدودیتهای جدی در زوایای مفصلی نداشته باشد. طرح جالبی که در بسیاری از روباتهای تولید شده به‌وسیله شرکت سینسیناتی میلاکرون<sup>۱</sup> (شکل ۱-۴) به‌کار گرفته شده، شامل مچی با محورهای متقاطع در یک نقطه، اما غیر متعامد است. در این طرح که «میج سه گردون» نام دارد، هر سه مفصل میج می‌توانند به‌طور پیوسته و بدون محدودیت دوران کنند. عمود نبودن محورها بر یکدیگر، جهتگیریهایی را ایجاد می‌کند که دسترسی به آنها به‌وسیله این میج، غیرممکن است. این مجموعه جهتگیریهایی دسترسی‌ناپذیر، به‌وسیله مخروطی که سومین محور میج نمی‌تواند در داخل آن قرار گیرد، توصیف می‌شود (تمرین ۸-۱۱ را ببینید). اما میج را می‌توان طوری به رابط ۳ متصل کرد که سازه رابط این مخروط را اشغال کند و به هر حال دسترسی‌پذیر نباشد. شکل ۸-۹ نقشه‌ای در دو تصویر از چنین مچی را نشان می‌دهد [۲۴].

در برخی روباتهای صنعتی، محورهای میج در یک نقطه متقاطع نیستند. این بدان معناست که امکان دارد برای معادله‌های سینماتیکی جواب بسته‌ای موجود نباشد. اما اگر میج بر روی بازوی مکانیکی ماهر بندبند طوری نصب شود که محور مفصل ۴ با محورهای مفصلهای ۲ و ۳ موازی



شکل ۸-۸ میج دست با محورهای عمود برهم که به‌وسیله کاراندازهای راه دور، از طریق سه محور هم‌مرکز، رانده می‌شود.





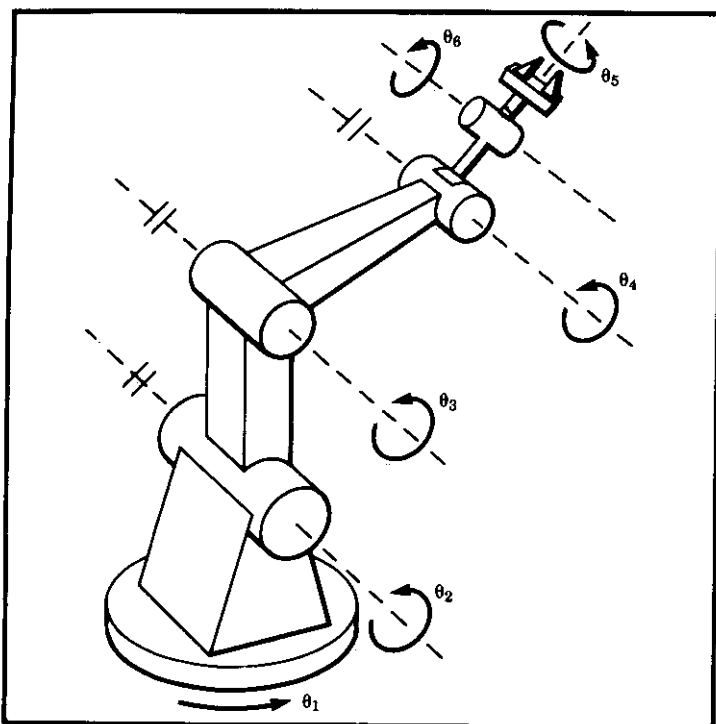
شکل ۸-۹ دو تصویر از مچی با محورهای غیرمتعامد [۲۴].

باشد (شکل ۸-۱۰)، آنگاه معادله‌های سینماتیکی حل بسته خواهد داشت. به همین ترتیب، اگر مچی با محورهای غیر متقاطع در یک نقطه، بر روی روباتی دکارتی نصب شود، برای آن بازو راه حل بسته حاصل خواهد شد.

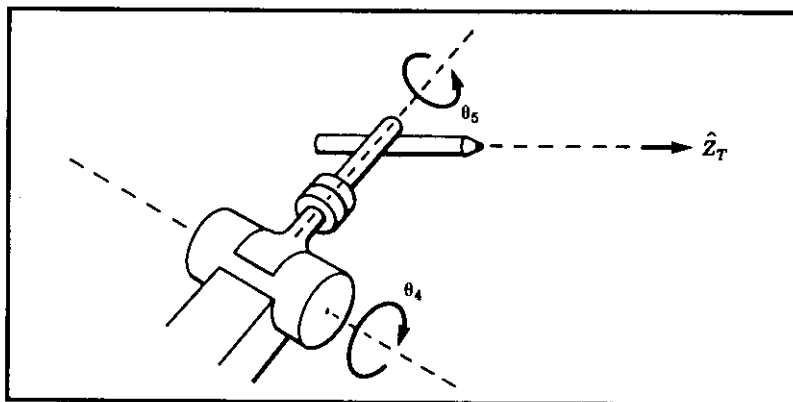
به طور نمونه‌وار، روباتهای جوشکاری با پنج درجه آزادی، دارای مچی با دو محور نشان داده شده در شکل ۸-۱۱ هستند. توجه کنید که اگر ابزار این روبات متقارن باشد، آنگاه این «مفصل فرضی» باید از قوانین طراحی میج پیروی کند. به عبارت دیگر، ابزار برای رسیدن به کلیه جهتگیرها، باید طوری نصب شود که محور تقارن آن بر محور مفصل ۵ عمود باشد. در بدترین حالت، هنگامی که محور تقارن ابزار با محور مفصل ۵ موازی است، محور فرضی ششم همواره در پیکربندی تکین خواهد بود.

#### ۴-۸ معیارهای کمی مشخصات فضای کاری

طراحان بازوهای مکانیکی ماهر، چندین معیار جالب برای بررسی کمی مشخصات فضای کاری، پیشنهاد کرده‌اند.



شکل ۸-۱۰ بازوی مکانیکی ماهری که در آن محورهای میج متقاطع در یک نقطه نیستند، اما معادله‌های سینماتیکی آن جواب بسته دارند.



شکل ۸-۱۱ طرح نمونه‌وار میج روبات جوشکاری با پنج درجه آزادی.

## بازده طرح از لحاظ فضای کاری ایجاد شده

برخی طراحان دریافته‌اند که برای ساختن بازویی دکارتی، در مقایسه با بازویی بندبند با حجم فضای کاری یکسان، به ماده بیشتری نیاز است. به منظور بررسی کتی این واقعیت، ابتدا مجموع طولی بازوی مکانیکی ماهر را چنین تعریف می‌کنیم

$$L = \sum_{i=1}^N (a_{i-1} + d_i) \quad (1-8)$$

که در آن  $a_{i-1}$  و  $d_i$  به ترتیب طول رابط، و انحراف مفصلی‌اند که در فصل ۳ تعریف شدند. بدین ترتیب، مجموع طولی هر بازوی مکانیکی ماهر، تقریبی اولیه از «طول» کل مکانیزم به دست خواهد داد. توجه کنید که در مفصلهای کشویی،  $d_i$  عددی ثابت و برابر با فاصله طی شده به وسیله مفصل است.

در مرجع [۳]، شاخص طولی سازه‌ای،  $Q_L$ ، برابر با نسبت مجموع طولی بازو به ریشه سوم حجم فضای کاری تعریف شده است، یعنی

$$Q_L = L/\sqrt[3]{W} \quad (2-8)$$

که در آن  $L$  از رابطه (۱-۸) به دست می‌آید و  $W$  حجم فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر است. بنابراین،  $Q_L$  تعریف خلاصه‌ای از اندازه نسبی سازه (طول نسبی مکانیزم) مورد نیاز برای پیکربندیهای مختلف را به منظور ایجاد حجم کاری معین، ارائه می‌دهد. در نتیجه، طرح خوب طرحی است که در آن بازو دارای مجموع طولی کوچک، و در عین حال حجم فضای کاری بزرگ باشد. مقدار  $Q_L$  در طرحهای خوب، کوچک است.

با توجه به سازه قرار دهی بازوی مکانیکی دکارتی (و در نتیجه فضای کاری نقطه‌ی مج)، مقدار  $Q_L$  هنگامی مینیمم می‌شود که دامنه حرکت هر سه مفصل یکسان باشد. این مقدار مینیمم،  $Q_L = 3/0$  است. از سوی دیگر، در هر بازوی بندبند ایدئال، مانند بازوی نشان داده شده در شکل ۴-۸، داریم  $Q_L = \sqrt[3]{4\pi/3} \cong 0.62$ . این کمیت، مطلبی را که پیش از این درباره تداخل مینیمم این نوع بازوها در فضای کاری خودشان گفتیم، تأیید می‌کند. البته در سازه‌های واقعی، عدد داده شده برای  $Q_L$  کمی بزرگتر خواهد بود، زیرا حجم فضای کاری بر اثر محدودیتهای مفصلی، کاهش می‌یابد.

## ■ مثال ۱-۸

در بازوی مکانیکی ماهر اسکارا (شکل ۵-۸)، رابطهای ۱ و ۲ طول مساوی و برابر با  $l/2$  دارند، و دامنه حرکت مفصل کشویی ۳ نیز برابر با  $d_3$  است. برای سادگی فرض کنید مفصلها محدودیت

حرکتی ندارند و  $Q_L$  را به دست آورید.  $Q_L$  به ازای چه مقدار از  $d_r$  مینیم می شود و مقدار این مینیم چقدر است؟

مجموع طولی این بازو برابر با  $l + d_r = l/2 + l/2 + d_r = l + d_r$ ، و حجم فضای کاری آن برابر با حجم استوانه قائم به شعاع  $l$  و ارتفاع  $d_r$  است. در نتیجه

$$Q_L = \frac{l + d_r}{\sqrt{\pi l^2 d_r}} \quad (3-8)$$

مینیم کردن  $Q_L$  به صورت تابعی از نسبت  $d_r/l$ ، مقدار بهینه  $d_r = l/2$  را به دست می دهد [۳].  
■ مقدار مینیم  $Q_L$  متناظر با مقدار بهینه  $d_r$  برابر ۱٫۲۹ است.

### طراحی فضای کاری با شرایط مناسب

در نقاط تکیه، بازوی مکانیکی ماهر یک یا چند درجه آزادی خود را از دست می دهد. این بدان معناست که برخی کارها را نمی توان در آن نقطه انجام داد. در واقع، در همسایگی نقاط تکیه (شامل نقاط تکیه در مرزهای فضای کاری)، ممکن است عملکرد بازو مناسب نباشد. به عبارتی می توان گفت که هر چه فاصله بازو از نقاط تکیه آن بیشتر شود، یکنواخت تر حرکت می کند، و بهتر می تواند نیروها را به طور یکنواخت در کلیه راستاها وارد کند. برای بررسی کتی این مسئله، چندین معیار پیشنهاد شده است. استفاده از این معیارها در هنگام طراحی، به بازوی مکانیکی ماهر خواهد انجامید که در آن بزرگترین فضای کاری با شرایط مناسب در نظر گرفته شده است. از آنجا که پیکربندیهای تکیه با حل معادله زیر به دست می آیند

$$\det(J(\Theta)) = 0 \quad (4-8)$$

طبیعتاً می توانیم از درمیان ژاکوبی برای تعریف معیار مهارت بازو استفاده کنیم. در مرجع [۴]، معیار مهارت،  $w$ ، چنین تعریف می شود

$$w = \sqrt{\det(J(\Theta)J^T(\Theta))} \quad (5-8)$$

اگر بازو درجه آزادی زاید نداشته باشد، این رابطه به صورت زیر ساده می شود

$$w = |\det(J(\Theta))| \quad (6-8)$$

هر بازوی مکانیکی خوب، دارای نواحی بزرگی از فضای کاری با مقادیر بزرگ  $w$  است. اگر چه رابطه (۶-۸) با استفاده از تحلیل سرعت به دست آمده است، اما برخی از پژوهشگران معیار مهارت را بر اساس تحلیل شتاب یا قابلیت اعمال نیرو نیز تعریف کرده اند. آسادا<sup>۱</sup> در [۵]،

مطالعه دقیق مقادیر ویژه ماتریس جرم دکارتی را پیشنهاد می‌کند

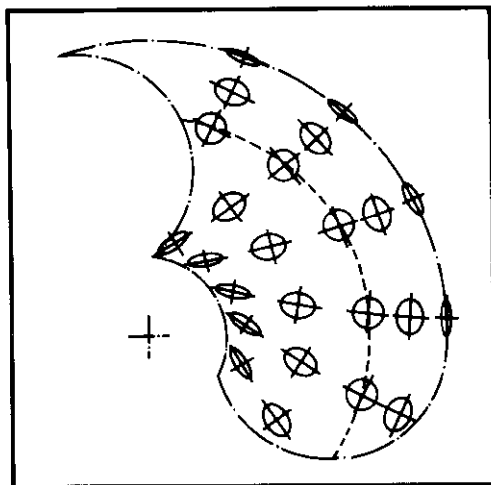
$$M_x(\Theta) = J^{-T}(\Theta) M(\Theta) J^{-1}(\Theta) \quad (7-8)$$

این رابطه، قابلیت شتابگیری بازو را در راستاهای دکارتی گوناگون نشان می‌دهد. در مرجع فوق، نمایش گرافیکی قابلیت شتابگیری، به صورت بیضیوار لختی با معادله زیر داده شده است

$$X^T M_x(\Theta) X = 1 \quad (8-8)$$

این معادله، یک بیضی  $n$  بعدی را مشخص می‌کند که در آن  $n$  تعداد بعدهای  $X$  است. محورهای این بیضیوار (معادله (8-8)) در راستای بردارهای ویژه  $M_x(\Theta)$  قرار دارند و طول محورهای بیضیوار، برابر با عکس ریشه دوم مقادیر ویژه است. نقاط دارای شرایط مناسب در فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر، به وسیله بیضیوارهای لختی کروی یا تقریباً کروی، مشخص می‌شوند.

در شکل ۸-۱۲، خواص یک بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با دورابط، به طور گرافیکی نشان شده است. در مرکز فضای کاری، بازو دارای شرایط مناسب است، زیرا بیضیوارها تقریباً دایره‌ای هستند. در مرزهای فضای کاری، مقطع بیضیوارها به صورت کشیده است و این نشان می‌دهد که شتابگیری بازو در راستاهایی معین، به دشواری صورت می‌گیرد.



شکل ۸-۱۲ فضای کاری یک بازوی صفحه‌ای با دو درجه آزادی، که در آن بیضیوارهای لختی نشان داده شده‌اند [۵]. خط چین مکان هندسی نقاط یکروند (دارای شرایط یکسان) را در فضای کاری مشخص می‌کند.

در مرجعهای [۶] تا [۸]، روشهای دیگر ایجاد شرایط مناسب در فضای کاری، پیشنهاد شده است.

## ۵-۸ سازه‌های زنجیری زاید و بسته

در حالت کلی، در این کتاب تنها بازوهای مکانیکی ماهری بررسی می‌شوند که به صورت اهرم‌بندیهای زنجیری پی‌درپی، با شش مفصل یا کمتر باشند. با این حال، در این بخش به طور خلاصه درباره بازوهایی که در خارج از این طبقه‌بندی قرار دارند، بحث می‌کنیم.

### ریز روباتها و درجات آزادی زاید

اگر چه برای ایجاد قابلیت حرکت کلی در فضا، شش درجه آزادی مورد نیاز است، اما وجود تعدادی مفصل اضافی قابل کنترل نیز مزیت‌هایی دارد.

یک مورد استفاده این درجات آزادی اضافی، که در میان پژوهشگران به طور روزافزون مورد توجه قرار گرفته است و کاربردهای عملی نیز دارد [۹، ۱۰]، در ریزروباتهاست. ریزروبوت، در حالت کلی متشکل از چند درجه آزادی سریع و دقیق است که در انتهای یک بازوی مکانیکی «معمولی» نصب می‌شوند. بازوی مکانیکی معمولی، حرکت‌هایی با دامنه بزرگ انجام می‌دهد و ریزروبوت، که مفصل‌های آن در حالت کلی دامنه حرکتی کوچکی دارند، کنترل حرکت ظریف و نیرو را برعهده دارد.

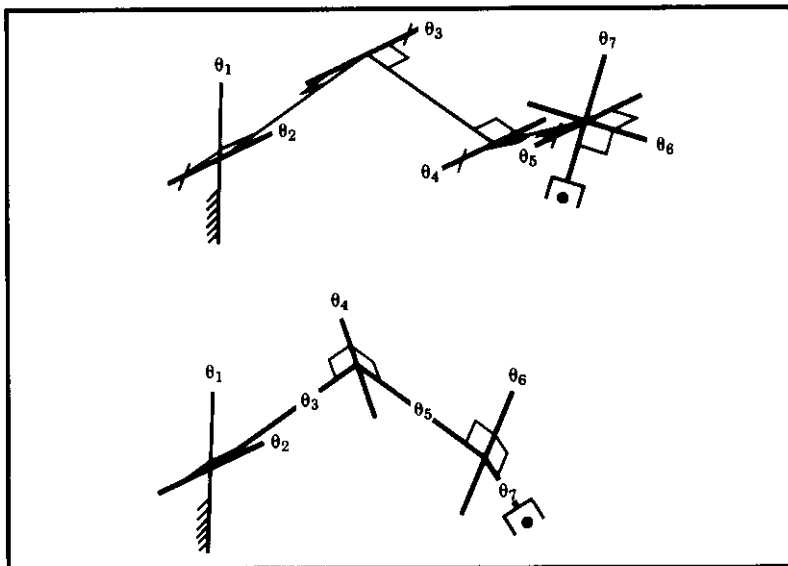
مفصل‌های اضافی، مکانیزم را در دوری کردن از پیکربندیهای تکین نیز یاری می‌دهند [۱۱]، مثلاً، در هر مکانیزم میج با سه درجه آزادی، هنگامی که هر سه محور مفصلی در یک صفحه قرار گیرند، پیکربندی تکینی ایجاد می‌شود، اما در میجی با چهار درجه آزادی، می‌توان از چنین پیکربندی‌هایی دوری کرد [۱۵-۱۳].

در شکل ۸-۱۳، دو پیکربندی پیشنهاد شده در [۱۱، ۱۲] برای بازوهای مکانیکی ماهر با هفت درجه آزادی، نشان داده شده است.

یکی از کاربردهای عملی روبات‌هایی با درجات آزادی زاید، در جلوگیری از برخورد در محیط‌های کاری پر ازدحام است. چنانکه دیدیم، روباتی با شش درجه آزادی، تنها از راه‌های محدودی می‌تواند به مکان و جهت‌گیری مفروض برسد. اضافه کردن مفصل هفتم، باعث می‌شود تعداد راه‌های رسیدن به هدف بینهایت شود، و در نتیجه بتوان مسیر مناسبی را برای جلوگیری از برخورد انتخاب کرد.

### سازه‌های بسته

اگر چه تاکنون تنها بازوهای زنجیری پی‌درپی (سری) را بررسی کرده‌ایم، اما برخی از بازوهای مکانیکی شامل سازه‌های بسته‌اند. مثلاً، روبات موتومان ۳-L، که در فصل‌های ۳ و ۴ بررسی شد، در مکانیزم محرک مفصل‌های ۳ و ۴ خود، دارای سازه‌های بسته است. مزیت سازه‌های بسته آن



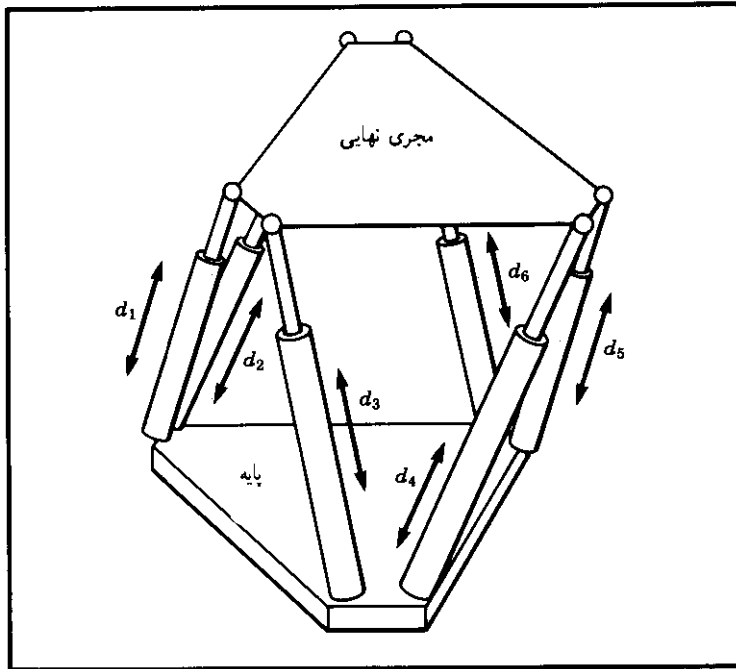
شکل ۸-۱۳ دو طرح پیشنهادی برای بازوهای مکانیکی ماهر با هفت درجه آزادی.

است که سختی مکانیزم را افزایش می‌دهند [۱۶]. از سوی دیگر، سازه‌های بسته در حالت کلی دامنه حرکتی مفصلها را محدود می‌کنند و بدین ترتیب، اندازه فضای کاری را کاهش می‌دهند.

شکل ۸-۱۴ مکانیزم استوارت<sup>۱</sup> را که مکانیزمی بسته و معادل بازوی مکانیکی زنجیری با شش درجه آزادی است، نشان می‌دهد. مکان و جهتگیری مجری نهایی در این مکانیزم، به وسیله تغییر طول شش کارانداز خطی که آن را به پایه روبات متصل می‌سازند، کنترل می‌شود. هر کارانداز، از یک طرف به وسیله مفصلی همه‌کاره (کاردان) با دو درجه آزادی، به پایه مکانیزم و از طرف دیگر، توسط مفصلی کروی با سه درجه آزادی، به مجری نهایی متصل شده است. این مکانیزم، بیشتر ویژگیهای مشترک بین کلیه مکانیزمهای بسته را داراست و می‌توان آن را بسیار سخت (محکم) ساخت، اما دامنه حرکتی رابطهای آن در مقایسه با مکانیزمهای زنجیری بسیار محدودتر است. مکانیزم استوارت، در جوابهای معادله‌های سینماتیکی مستقیم و وارون خود، ویژگی وارونگی جالبی را نشان می‌دهد: حل معادله‌های وارون آن نسبتاً ساده است، در حالی که حل مستقیم آن در حالت عادی پیچیده، و گاهی فاقد شکل بسته است (تمرینهای ۸-۷ و ۸-۱۲ را ببینید).

در حالت کلی، تعداد درجات آزادی یک مکانیزم بسته را نمی‌توان به روشنی مشاهده کرد.

1. Stewart



شکل ۸-۱۴ مکانیزم استوارت، مکانیزمی کاملاً موازی، با شش درجه آزادی است.

تعداد کل درجات آزادی از فرمول گروبلر<sup>۱</sup> به دست می‌آید [۱۷]

$$F = 6(l - n - 1) + \sum_{i=1}^n f_i \quad (۸-۹)$$

که در آن  $F$  تعداد کل درجات آزادی مکانیزم،  $l$  تعداد رابطها (شامل پایه)،  $n$  تعداد کل مفصلها، و  $f_i$  تعداد درجات آزادی مربوط به مفصل  $i$ ام است. حالت صفحه‌ای فرمول گروبلر (هنگامی که کلیه اجسام در حالت آزاد، دارای سه درجه آزادی در صفحه هستند) را می‌توان با قرار دادن عدد ۳ به جای عدد ۶ در رابطه فوق، به دست آورد.

#### ■ مثال ۸-۲

با استفاده از فرمول گروبلر، تحقیق کنید که مکانیزم استوارت (شکل ۸-۱۴) به راستی شش درجه آزادی دارد.

1. Grübler



در مکانیزم استوارت تعداد مفصلها ۱۸ (شش مفصل همه‌کاره، شش مفصل کروی، و شش مفصل کشویی در کاراندازها) و تعداد رابطها ۱۴ (دو رابط برای هر کارانداز، یک مجری نهایی، و یک پایه) است و مجموع کلیه درجات آزادی مفصلها نیز ۳۶ است. با به‌کار بردن فرمول گروبلر نتیجه می‌شود

$$F = 6(14 - 18 - 1) + 36 = 6 \quad (10-8)$$

■

## ۶-۸ روشهای کاراندازی

پس از آنکه سازه سینماتیکی کلی بازوی مکانیکی ماهر انتخاب شد، مسئله مهم بررسی چگونگی کاراندازی مفصلهای بازوست. در حالت عادی، کارانداز، سیستم کاهش سرعت، و سیستم انتقال قدرت با یکدیگر ارتباطی نزدیک دارند و باید با هم طراحی شوند.

### محل قرارگیری کارانداز

در ساده‌ترین حالت، کارانداز در نزدیکی مفصلی که آن را می‌راند، قرار داده می‌شود. اگر کارانداز قادر به ایجاد نیرو یا گشتاور کافی باشد، می‌توان آن را مستقیماً به مفصل متصل کرد. مزیت این روش رانش، که به آن رانش مستقیم می‌گویند [۱۸]، در سادگی طرح و کنترل‌پذیری عالی آن است. این بدان معناست که بدون آنکه از واسطه‌های انتقال قدرت یا کاهش سرعت استفاده شود، می‌توان کنترل حرکتهای مفصل را با کیفیتی برابر با کنترل حرکتهای خود کارانداز، انجام داد.

متأسفانه بیشتر کاراندازها برای سرعتهای نسبتاً بالا و گشتاورهای پایین مناسب‌اند و به همین دلیل، به سیستم کاهش سرعت نیاز دارند. علاوه بر این، چون کاراندازها غالباً سنگین‌اند، اگر بتوان آنها را دور از مفصل و در نزدیکی پایه روبات قرار داد، لختی کلی روبات به میزان قابل توجهی کاهش خواهد یافت، و این به نوبه خود، از اندازه کاراندازهای مورد نیاز می‌کاهد. برای تحقق بخشیدن به این مزیتها، یک سیستم انتقال قدرت جهت انتقال حرکت از کارانداز به مفصل، مورد نیاز است.

در یک سیستم رانش مفصلی که کارانداز آن دور از مفصل قرار دارد، می‌توان سیستم کاهش سرعت را در کارانداز یا در مفصل قرار داد. برخی از سیستمها عملیات انتقال قدرت و کاهش سرعت را باهم انجام می‌دهند. عیب این سیستمها آن است که اولاً پیچیده‌اند، و ثانیاً باعث ایجاد اصطکاک و انعطاف‌پذیری اضافی در مکانیزم می‌شوند. هنگامی که سیستم کاهش سرعت در مفصل قرار داده شود، سیستم انتقال قدرت در سرعتهای بالاتر و گشتاورهای پایینتر عمل خواهد کرد. در گشتاورهای پایین، انعطاف‌پذیری مشکل کمتری ایجاد می‌کند. اما اگر سیستم کاهش سرعت سنگین باشد، کاراندازهای دور از مفصل برخی از مزیتهای خود را از دست می‌دهند.

در فصل ۳، جزئیات سیستم کاراندازی روبات یازوکاوا موتومان ۳-۱ بیان شد. در این روبات، کاراندازها دور از مفصل نصب شده‌اند و حرکت‌های مفصلی اعمال شده به وسیله آنها، به یکدیگر وابسته‌اند. معادله‌های (۳-۱۵) به روشنی چگونگی ایجاد حرکت در مفصلها توسط کاراندازها را نشان می‌دهد. مثلاً کارانداز ۲ مفصلهای ۲، ۳، و ۴ را به حرکت وامی‌دارد. توزیع بهینه مراحل کاهش سرعت در هنگام انتقال قدرت، در نهایت به عواملی چون انعطاف‌پذیری سیستم انتقال قدرت، وزن سیستم کاهش سرعت، اصطکاک در سیستم کاهش سرعت، و سادگی نصب این سیستمها در طرح کلی بازوی مکانیکی بستگی دارد.

### سیستمهای کاهش سرعت و انتقال قدرت

چرخنده‌ها معمولترین اجزای به‌کار رفته برای کاهش سرعت‌اند و می‌توانند در فضایی نسبتاً کوچک، کاهش سرعت‌های بزرگ ایجاد کنند. نوع چرخنده‌های به‌کار رفته، به نحوه قرارگیری دو محوری که بین آنها قدرت انتقال می‌یابد، بستگی دارد: برای محوره‌های موازی از چرخنده‌های ساده، برای محوره‌های متقاطع عمود برهم از چرخنده‌های مخروطی، و برای محوره‌های متناظر از چرخنده‌های حلزونی یا مارپیچ، و ... استفاده می‌شود. انواع مختلف چرخنده‌ها، دارای قابلیت تحمل بار، میزان فرسایش، و خصوصیات اصطکاکی متفاوتی هستند.

لقی و اصطکاک، دو عیب اساسی سیستمهای چرخنده‌ای هستند. لقی، که بر اثر درگیر شدن ناقص دو چرخنده روی می‌دهد، عبارت است از بیشترین حرکت زاویه‌ای چرخنده خروجی در حالتی که چرخنده ورودی ثابت نگه‌داشته شود. اگر با فشردن دندان‌های دو چرخنده به یکدیگر، لقی را حذف کنیم، آن‌گاه ممکن است اصطکاک زیادی ایجاد شود. اگر چرخنده‌ها بسیار دقیق ساخته و نصب شوند، این عیبها به کمترین میزان خود می‌رسند، اما هزینه‌ها افزایش می‌یابند. نسبت چرخنده،  $\eta$ ، اثرات کاهش سرعت و افزایش گشتاور زوج چرخنده را بیان می‌کند. برای سیستمهای کاهش سرعت،  $\eta > 1$ ، و رابطه بین سرعت‌های ورودی و خروجی و گشتاورها، چنین است

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_o &= (1/\eta)\dot{\theta}_i \\ \tau_o &= \eta\tau_i\end{aligned}\quad (11-8)$$

که در آن  $\dot{\theta}_o$  و  $\dot{\theta}_i$  به ترتیب سرعت‌های خروجی و ورودی، و  $\tau_o$  و  $\tau_i$  گشتاورهای خروجی و ورودی هستند.

دسته دوم اجزای مورد استفاده در سیستم کاهش سرعت شامل نوارهای انعطاف‌پذیر، کابلها، و تسمه‌هاست. چون کلیه این اجزا باید انعطاف‌پذیری لازم برای حلقه زدن به دور قرقره‌ها را دارا باشند، در راستای طولی نیز انعطاف‌پذیر هستند. میزان انعطاف‌پذیری این اجزا متناسب با طول آنهاست. به دلیل انعطاف‌پذیری این سیستمها، باید توسط مکانیزم اعمال پیش‌بار، از شل شدن حلقه جلوگیری

کرد تا تسمه همواره با قرقره درگیر باشد. پیش‌بارهای زیاد ممکن است باعث افزایش تنش در جزء انعطاف‌پذیر شوند، و اصطکاک زیادی ایجاد کنند.

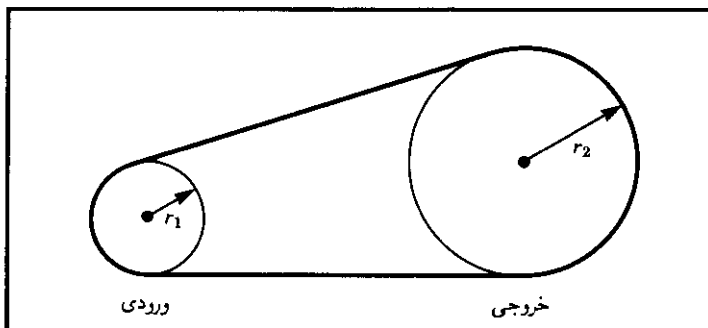
کابلها یا نوارهای انعطاف‌پذیر را می‌توان به صورت حلقه بسته، یا به صورت درگیر در یک انتها و اعمال کشش دائم به وسیله مکانیزم پیش‌بار، به کار برد. اگر به مفصلی در یک جهت توسط فنر نیرو وارد شود، می‌توان از کابل یک سر درگیر برای اعمال نیرویی در جهت مخالف با نیروی فنر، استفاده کرد. راه دیگر، کاربرد دو سیستم فعال یک سر درگیر در خلاف جهت یکدیگر است. این روش، مشکل پیش‌بار بیش از حد را حذف می‌کند، اما در عوض به تعداد کاراندازها می‌افزاید.

زنجرهای غلتکی مشابه تسمه‌های انعطاف‌پذیرند، با این تفاوت که قادرند به‌دور قرقره‌های نسبتاً کوچک خم شوند بدون آنکه سختی بالای خود را از دست بدهند. در برخی کاربردهای معین، به جای زنجرهای غلتکی، بهتر است از سیستم‌های تسمه دندانه‌دار استفاده شود تا بر اثر اعمال بارهای بزرگ به پینهای زنجر و ساییدگی آنها، مشکلی پیش نیاید.

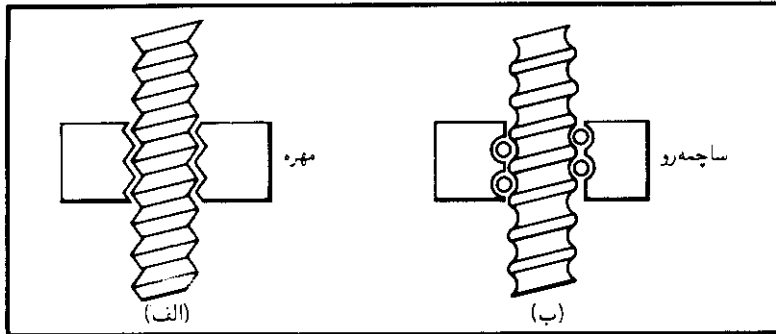
رانشهای تسمه‌ای، کابلی، نواری، و زنجیری می‌توانند انتقال قدرت را با کاهش سرعت تلفیق کنند. چنانکه در شکل ۸-۱۵ دیده می‌شود، شعاع قرقره ورودی  $r_1$  و شعاع قرقره خروجی  $r_2$  است. نسبت «چرخندۀ» این سیستم انتقال برابر است با

$$\eta = \frac{r_2}{r_1} \quad (8-12)$$

پیچهای هدایت (جلوبر) یا پیچهای بلبرینگی روش معمول دیگری را برای کاهش زیاد سرعت در فضایی محدود فراهم می‌کنند (شکل ۸-۱۶). پیچهای هدایت بسیار سخت‌اند و قادرند بارهای خیلی بزرگ را تحمل کنند. همچنین می‌توانند حرکت دورانی را به حرکت خطی تبدیل کنند. پیچهای بلبرینگی شبیه پیچهای هدایت‌اند، اما در آنها، به جای اینکه دنده‌های مهره مستقیماً بر روی دنده‌های



شکل ۸-۱۵ رانشهای تسمه‌ای، کابلی، نواری، و زنجیری می‌توانند انتقال قدرت را با کاهش سرعت ترکیب کنند.



شکل ۸-۱۶ پیچهای هدایت (الف) و پیچهای بلبرینگ (ب) می‌توانند حرکت دورانی را به خطی تبدیل کنند، و در عین حال سرعت را به شدت کاهش دهند.

پیچ حرکت کند، تعدادی بلبرینگ بین دنده‌ها قرار می‌گیرند. پیچهای بلبرینگ اصطکاک بسیار کمی دارند، و معمولاً برگشت‌پذیر (قابل حرکت در جهت مخالف) هستند.

## ۷-۸ سختی و تغییر شکل خمشی

یکی از هدفهای مهم در طراحی اغلب بازوهای مکانیکی، سختی کل سازه و سیستم رانش است. سیستمهای با سختی بالا، دو مزیت مهم دارند. مزیت اول آن است که چون بازوهای عادی برای اندازه‌گیری مستقیم محل چهارچوب ابزار، به حساسه مجهز نیستند، محل این چهارچوب با استفاده از معادله‌های سینماتیکی مستقیم، بر پایه مکان مفصلها (که توسط حساسه‌های مفصلی تعیین می‌شوند)، به دست می‌آید. برای محاسبه دقیق این محل، رابطهای بازو نباید بر اثر نیروی گرانی یا بارهای دیگر، تغییر شکل دهند. به عبارت دیگر، می‌خواهیم توصیف دناویته‌ها رتینگر رابطها، در شرایط بارگذاری گوناگون، ثابت بماند. مزیت دوم آن است که انعطاف‌پذیری سازه یا سیستم رانش، باعث پدیده آمدن تشدید می‌شود و این بر عملکرد بازو تأثیری نامطلوب دارد. در این بخش، سختی و تغییر شکل خمشی حاصل از بارگذاری را بررسی می‌کنیم. در فصل ۹ درباره تشدید بحث می‌شود.

### اجزای انعطاف‌پذیر موازی و سری

به آسانی می‌توان نشان داد (تمرین ۸-۲۱ را ببینید) که ترکیب دو عضو انعطاف‌پذیر با ضرایب سختی  $k_1$  و  $k_2$  که «به‌طور موازی به هم متصل شده‌اند»، ضریب سختی معادل زیر را به دست می‌دهد

$$k_{parallel} = k_1 + k_2 \quad (۱۳-۸)$$

و سختی معادل دو عضو که «به طور سری متصل شده‌اند»، چنین است

$$\frac{1}{k_{series}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (۱۴-۸)$$

در بررسی سیستمهای انتقال قدرت، معمولاً با یک مرحله کاهش سرعت یا انتقال قدرت، که با مرحله بعدی کاهش سرعت یا انتقال قدرت به طور سری قرار گرفته است، مواجهه‌ایم. در نتیجه رابطه (۱۴-۸) قابل استفاده می‌شود.

### محورها

روشی معمول برای انتقال حرکت دورانی، استفاده از محورهاست. سختی پیچشی هر محور با سطح مقطع دایره‌ای، چنین محاسبه می‌شود [۱۹]

$$k = \frac{G\pi d^4}{32l} \quad (۱۵-۸)$$

که در آن  $d$  قطر محور،  $l$  طول محور، و  $G$  مدول کشسانی برشی (در حدود  $7.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ) برای فولاد و در حدود یک سوم این مقدار برای آلومینیم) است.

### چرخنده‌ها

اگر چه چرخنده‌ها سختی نسبتاً بالایی دارند اما در سیستم رانش ضعیف ایجاد می‌کنند. رابطه‌ای تقریبی برای تخمین سختی چرخنده خروجی (با فرض ثابت بودن چرخنده ورودی) در مرجع [۲۰] چنین داده شده است

$$k = C_g b r^2 \quad (۱۶-۸)$$

که در آن  $b$  پهنای رویه چرخنده،  $r$  شعاع چرخنده خروجی، و  $C_g$  برای فولاد برابر با  $1.34 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$  است.

چرخنده‌ها سختی مؤثر سیستم رانش را نیز به اندازه ضریب  $\eta^2$  تغییر می‌دهند. اگر ضریب سختی سیستم انتقال قدرت پیش از کاهش سرعت (یعنی در طرف ورودی) برابر با  $k_i$  باشد، خواهیم داشت

$$\tau_i = k_i \delta \theta_i \quad (۱۷-۸)$$

و ضریب سختی در طرف خروجی سیستم کاهش سرعت نیز برابر با  $k_o$  است. پس

$$\tau_o = k_o \delta \theta_o \quad (۱۸-۸)$$

رابطه بین  $k_i$  و  $k_o$  را می‌توان با فرض صلب بودن کامل چرخنده‌ها چنین به‌دست آورد

$$k_o = \frac{\tau_o}{\delta\theta_o} = \frac{\eta k_i \delta\theta_i}{(\frac{1}{\eta})\delta\theta_i} = \eta^2 k_i \quad (۱۹-۸)$$

دیده می‌شود که کاهش سرعت چرخنده‌ای، سختی را به‌اندازه مربع نسبت چرخنده، افزایش می‌دهد.

### ■ مثال ۳-۸

محوری با سختی پیچشی  $50000 \text{ N.m/rad}$  به‌طرف ورودی یک مجموعه چرخنده با نسبت چرخنده  $\eta = 10$  متصل است. سختی چرخنده خروجی (در صورت ثابت نگه‌داشتن چرخنده ورودی)  $50000 \text{ N.m/rad}$  است. سختی خروجی کل سیستم رانش چقدر است؟  
با استفاده از (۱۴-۸) و (۱۹-۸) داریم

$$\frac{1}{k_{series}} = \frac{1}{50000} + \frac{1}{10^2(50000)} \quad (۲۰-۸)$$

یا

$$k_{series} = \frac{50000}{11} \cong 4545.4 \text{ N.m/rad} \quad (۲۱-۸)$$

هنگامی‌که آخرین عضو سیستم انتقال چندعضوی، سیستم کاهش سرعت نسبتاً بزرگی باشد، می‌توان از سختیهای عضوهای پیش از آن در سیستم صرف‌نظر کرد. ■

### تسمه‌ها

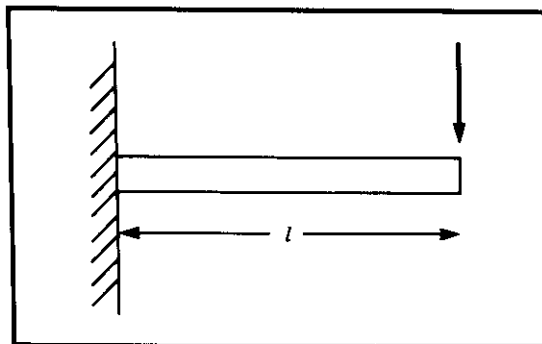
در سیستم رانش تسمه‌ای که در شکل ۸-۱۵ نشان داده شده است، ضریب سختی چنین محاسبه می‌شود

$$k = \frac{AE}{l} \quad (۲۲-۸)$$

که در آن  $A$  مساحت سطح مقطع تسمه،  $E$  مدول کشسانی تسمه، و  $l$  طول آزاد تسمه بین دو قرقره به‌علاوه یک سوم طول تسمه در تماس با قرقره‌هاست [۱۹].

### رابطها

هر رباط تنها را می‌توان به‌طور تقریبی به‌صورت تیر یک سردرگیری مدل‌سازی کرد، و سختی را در انتهای این تیر مطابق شکل ۸-۱۷ به‌دست آورد. ضریب سختی برای تیر با مقطع دایره‌ای توخالی



شکل ۸-۱۷ تیر ساده یک سرگیری به کار رفته برای مدلسازی سختی یک رابط در مقابل بار وارد شده به انتهای آن.

[۱۹] چنین است

$$k = \frac{3\pi E(d_o^3 - d_i^3)}{64l^3} \quad (۲۳-۸)$$

که در آن  $d_o$  و  $d_i$  قطرهای داخلی و خارجی سطح مقطع تیر،  $l$  طول تیر، و  $E$  مدول کشسانی (درحدود  $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  برای فولاد و یک سوم این مقدار برای آلومینیم) است. ضریب سختی تیری با مقطع مربع توخالی، از رابطه زیر به دست می آید

$$k = \frac{E(w_o^3 - w_i^3)}{4l^3} \quad (۲۴-۸)$$

که در آن  $w_o$  و  $w_i$  عرضهای داخلی و خارجی سطح مقطع تیر هستند (ضخامت دیواره سطح مقطع  $w_o - w_i$  است).

#### ■ مثال ۸-۴

رابطی با مقطع مربع به ابعاد  $5 \times 5 \times 5 \text{ cm}$  و ضخامت دیواره  $1 \text{ cm}$ ، به وسیله مجموعه‌ای از چرخنده‌های صلب با نسبت چرخنده  $\eta = 10$  رانده می‌شود. ورودی چرخنده‌ها را محوری به قطر  $0.5 \text{ cm}$  و طول  $3 \text{ cm}$  می‌رانند. اگر به انتهای رابط، نیروی  $100 \text{ N}$  وارد شود، تغییر شکل خمشی ناشی از آن در انتهای رابط چقدر خواهد بود؟

با استفاده از رابطه (۲۴-۸)، ضریب سختی رابط چنین محاسبه می‌شود

$$k_{\text{link}} = \frac{(2 \times 10^{11})(0.005^3 - 0.004^3)}{4(0.005)} \cong 3.69 \times 10^5 \quad (۲۵-۸)$$

در نتیجه به ازای بار  $100\text{ N}$ ، در خود رابط، تغییر شکل زیر ایجاد خواهد شد

$$\delta x = \frac{100}{k_{\text{link}}} \cong 2.7 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (26-8)$$

که برابر با  $2.7\text{ cm}$  است.

علاوه بر این، نیروی  $100\text{ N}$  وارد به انتهای رابط به طول  $5\text{ cm}$ ، بر روی چرخدنده خروجی گشتاوری برابر با  $50\text{ N.m}$  اعمال می‌کند. چرخنده‌ها صلب‌اند، اما انعطاف‌پذیری محور ورودی برابر است با

$$k_{\text{shaft}} = \frac{(7.5 \times 10^{10})(3.14)(5 \times 10^{-2})^4}{(32)(0.3)} \cong 15.3 \text{ N.m/rad} \quad (27-8)$$

که از دید چرخدنده خروجی چنین است

$$k'_{\text{shaft}} = (15.3)(10^2) = 1530 \text{ N.m/rad} \quad (28-8)$$

تغییر شکل زوایای حاصل از گشتاور  $50\text{ N.m}$ ، برابر است با

$$\delta \theta = \frac{50}{1530} \cong 0.0326 \text{ rad} \quad (29-8)$$

در نتیجه، تغییر شکل خطی کل در انتهای رابط به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \delta x &\cong 0.027 + (0.0326)(50) = 0.027 + 1.630 \\ &= 1.657 \text{ cm} \end{aligned} \quad (30-8)$$

در این مثال، فرض کردیم محور و رابط هر دو از فولاد ساخته شده‌اند. چون سختی هر دو عضو با  $E$  به طور خطی تغییر می‌کند، برای محور و رابط آلومینیومی، کافی است ضریب سختی را در عدد ۳ ضرب کنیم.

در این بخش، برخی فرمولهای ساده را برای تقریب زدن سختی چرخدنده‌ها، محورها، تسمه‌ها، و رابطها بررسی کردیم. این فرمولها برای تعیین اندازه اجزای سازه‌ای و اجزای به کار رفته در سیستم انتقال قدرت، مناسب‌اند. اما در کاربردهای عملی، مدلسازی بسیاری از عوامل انعطاف‌پذیر دشوار است. غالباً سیستم رانش در مقایسه با رابط بازوی مکانیکی، انعطاف‌پذیری بیشتری ایجاد می‌کند. به علاوه، در اینجا بسیاری از منابع انعطاف در سیستم رانش، در نظر گرفته نشده‌اند (مانند انعطاف‌پذیری یاتاقانها، انعطاف‌پذیری پایه کاراندازها، و غیره). در حالت کلی، هرگونه تلاش برای پیش‌بینی تحلیلی سختی در سیستم، سختی را بالاتر از میزان واقعی آن به دست خواهد داد، زیرا



بسیاری از منابع انعطاف پذیری در نظر گرفته نشده‌اند.

از روشهای اجزای محدود می‌توان برای پیش‌بینی دقیقتر سختی (و دیگر خواص) عضوهای سازه‌ای استفاده کرد. این روشها خود زمینه‌ای جداگانه را تشکیل می‌دهند [۲۱] و بررسی آنها خارج از محدوده این کتاب است.

### کاراندازها

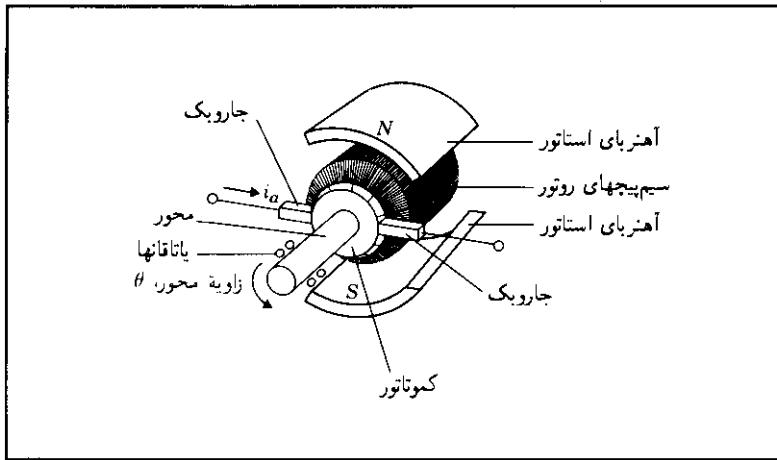
سیلندرهای هیدرولیکی یا کاراندازهای پره‌ای در ابتدا معمولترین کاراندازهای به‌کار رفته در بازوهای مکانیکی ماهر بودند. در بازویی نسبتاً کوچک، این کاراندازها قادرند بدون وجود سیستم کاهش سرعت نیروی کافی برای حرکت دادن مفصلها را ایجاد کنند. سرعت عملکرد این کاراندازها، به سیستم پمپ و مخزن ذخیره (آکومولاتور) که معمولاً دور از بازو نصب می‌شوند، بستگی دارد. کنترل مکان در سیستمهای هیدرولیکی کاملاً شناخته شده و نسبتاً ساده است. در کلیه روباتهای صنعتی اولیه و بسیاری از روباتهای صنعتی بزرگ مدرن، از کاراندازهای هیدرولیکی استفاده شده است.

متأسفانه دستگاههای هیدرولیکی، به تجهیزات بسیاری چون پمپ، مخزن ذخیره، لوله‌های قابل انعطاف، و شیرهای سرو خودکار نیاز دارند. از سوی دیگر، دستگاههای هیدرولیکی به سبب نشت روغن، کارکرد تمیزی ندارند و برای برخی کاربردها مناسب نیستند. با توجه به آنکه در روشهای پیشرفته‌تر کنترل روبات، نیروهای کارانداز باید به دقت اعمال شوند، از دستگاههای هیدرولیکی به دلیل وجود اصطکاک در کاسه نمدها، نمی‌توان استفاده کرد.

سیلندرهای بادی (نیوماتیکی) علاوه بر آنکه مزایای دستگاههای هیدرولیکی را دارا هستند، کارکرد تمیزتری نیز دارند (به جای سیال هیدرولیکی، هوا از درزهای دستگاه نشت می‌کند). اما به دلیل تراکم پذیری هوا و وجود اصطکاک زیاد در کاسه نمدها، کاراندازهای بادی برای کنترل دقیق حرکتی بازو مناسب نیستند.

موتورهای الکتریکی رایجترین کاراندازهای به‌کار رفته برای بازوهای مکانیکی ماهر هستند. اگر چه نسبت توان به وزن در این موتورها به بزرگی دستگاههای هیدرولیکی یا بادی نیست، اما کنترل پذیری و سادگی اتصال آنها به دستگاهها، کاربردهای آنها را برای بازوهای کوچک و متوسط مناسب می‌سازد.

موتورهای جریان مستقیم (DC) جاروبک‌دار (شکل ۸-۱۸)، از نظر کنترل و اتصال، ساده‌ترین دستگاهها هستند. در این موتورها جریان الکتریکی به وسیله جاروبکهایی که با کموتاتور در حال دوران تماس دارند، به سیم پیچهای روتور هدایت می‌شود. سایدگی جاروبکها و اصطکاک در این موتورها مشکلاتی را ایجاد می‌کند. با به‌کارگیری مواد مغناطیسی جدید در این موتورها، می‌توان به گشتاورهای بالایی دست یافت. عامل محدود کننده گشتاور خروجی این موتورها، گرم شدن بیش از حد سیم پیچهاست. در کارکرد کوتاه مدت، امکان ایجاد گشتاورهای بالا وجود دارد، اما در کارکرد بلندمدت، باید گشتاورهای بسیار پایبتری را در حالت پایدار انتظار داشت.



شکل ۸-۸ موتورهای جاروبک‌دار DC بیشترین کاربرد را در طراحی روباتها دارند.

موتورهای بدون جاروبک، مشکلات ساییدگی و اصطکاک را برطرف می‌کنند. در این موتورها، سیم‌پیچها ساکن می‌مانند و میدان مغناطیسی دوران می‌کند. حساسه موجود در روی روتور، زاویه محور را حس می‌کند و سپس به وسیله دستگاههای الکترونیکی خارجی، سوی جریان را تغییر می‌دهد. مزیت دیگر موتورهای بدون جاروبک آن است که در آنها سیم‌پیچ در خارج از موتور و متصل به بدنه آن است، و بدین ترتیب، عمل خنک کردن بسیار بهتر صورت می‌گیرد. در این موتورها، گشتاور در حالت پایدار در مقایسه با گشتاور متناظر در موتورهای جاروبک‌دار با اندازه یکسان، بیشتر است.

موتورهای جریان متناوب (AC) و موتورهای پله‌ای نیز به‌طور پراکنده در روباتهای صنعتی به‌کار رفته‌اند. اما دشواری کنترل موتورهای AC و پایین بودن قابلیت ایجاد گشتاور موتورهای پله‌ای، استفاده از آنها را محدود کرده است.

## ۸-۸ حس مکان

تقریباً کلیه بازوهای مکانیکی ماهر، مکانیزمهای خود فرمان (سرؤکنترلی) هستند. به عبارت دیگر، در آنها فرمان نیرو یا گشتاور داده شده به کارانداز، برپایه خطای موجود بین مکان حس‌شده و مکان مطلوب مفصل موردنظر، محاسبه می‌شود. بدین منظور باید هر مفصل را به نوعی وسیله حس‌کننده مجهز کرد.

معمولترین روش آن است که حساسه مکانی مستقیماً روی محور کارانداز نصب شود. اگر سیستم رانش محکم بوده، لقی نداشته باشد، زوایای مفصلی واقعی را می‌توان با استفاده از مکانهای

محور کارانداز محاسبه کرد. کنترل این زوجهای هم مکان حساسه و کارانداز، بسیار ساده است. رایجترین وسیله حس کننده مکان با کنترل پسخوراند (فیدبک)، کدگذار نوری با گردش پله ای است. با گردش محور کدگذار، دو خروجی به صورت پالسهای موج مربعی با اختلاف فاز  $90^\circ$  ایجاد می شوند. زاویه محور به وسیله شمارش تعداد پالسها، و جهت دوران به وسیله فاز نسبی دو موج مربعی تعیین می شود. کدگذارهای پله ای استاندارد، ۱۶ تا ۱۰۰۰۰ خط در هر دوران دارند. هر خط چهار لبة پالس ایجاد می کند، به طوری که با شمارش الکترونیکی استاندارد، می توان به آسانی به دقتی برابر با  $1/10^\circ$  درجه دست یافت. با پیشرفت تکنولوژی کدگذاری و روشهای درونیایی، میزان این دقت به طور چشمگیری افزایش می یابد.

برطرف کننده ها، دستگاههایی هستند که خروجی آنها دو سیگنال آنالوگ است: یکی سینوس زاویه محور و دیگری کسینوس این زاویه. زاویه محور با استفاده از مقدار نسبی این دو سیگنال به دست می آید. دقت این دستگاهها، تابعی از کیفیت برطرف کننده و میزان نویز وسایل الکترونیکی و کابل کشی است. برطرف کننده ها از کدگذارهای نوری قابل اعتمادترند، اما دقت آنها کمتر است. به طور معمول برطرف کننده ها را نمی توان بدون استفاده از چرخنده های اضافی به منظور بهبود دقت، مستقیماً در مفصل قرار داد.

پتانسومترها ساده ترین نوع حس کننده های مکان هستند. این وسایل در یک پل مقاومتی نصب می شوند و ولتاژی متناسب با مکان محور ایجاد می کنند. مشکلات ناشی از دقت پایین، عملکرد غیر خطی، و وجود نویز کاربرد آنها را محدود می کند.

گاهی از دورسنجها برای ایجاد سیگنال آنالوگ متناسب با سرعت گردش محور، استفاده می شود. در این دستگاهها به سبب عدم وجود حساسه، پسخوراند سرعت با استفاده از اختلاف مکانهای حس شده در فاصله زمانی مشخص، تعیین می شود. این مشتقگیری عددی ممکن است باعث ایجاد نویز و تأخیر زمانی شود. با وجود این مشکلات، بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر، سیستم حس کننده مستقیم سرعت ندارند.

## ۸-۹ حس نیرو

برای اندازه گیری نیروی تماسی بین مجری نهایی روبات و محیط اطراف آن، دستگاههای گوناگونی طراحی شده است. در بسیاری از این دستگاهها، از حساسه هایی به نام کرنش سنج استفاده می شود (از نوع نیم رسانا یا ورق فلزی). این کرنش سنجها به یک سازه فلزی چسبانده می شوند، و خروجی متناسب با کرنش ایجاد شده در فلز، تولید می کنند. در طرح این نوع حس کننده نیرو، طراح باید به مسائل زیر توجه کند:

۱. برای به دست آوردن اطلاعات مورد نظر، به چند حساسه نیاز است؟
۲. حساسه ها در چه وضعیتی نسبت به یکدیگر بر روی سازه نصب می شوند؟
۳. کدام سازه می تواند با حفظ سختی، حساسیت خوبی از خود نشان دهد؟

۴. چگونه می‌توان از دستگاه در مقابل بارگذاری مکانیکی بیش از حد محافظت کرد؟

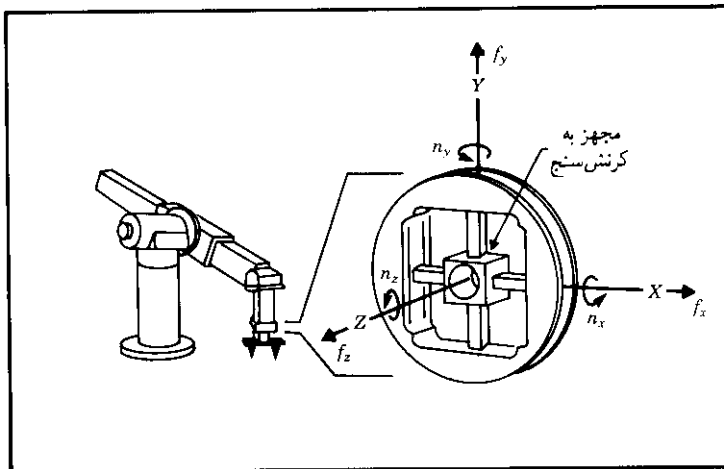
کرنش‌سنجها را معمولاً در سه محل از بازوی مکانیکی ماهر قرار می‌دهند:

۱. در محل کاراندازه‌های مفصل: این نوع حساسه‌ها نیرو یا گشتاور خروجی کارانداز یا سیستم کاهش سرعت را اندازه می‌گیرند. این حساسه‌ها برای برخی روشهای کنترل سودمندند، اما نیروی تماسی بین مجری نهایی و محیط اطراف آن را به خوبی حس نمی‌کنند.

۲. بین مجری نهایی و آخرین مفصل بازوی مکانیکی ماهر: این حساسه‌ها معمولاً حساسه‌های میچی نامیده می‌شوند که تشکیل سازه‌ای مکانیکی مجهز به چند کرنش‌سنج می‌دهند و می‌توانند نیروها و گشتاورهای وارد بر مجری نهایی را اندازه‌گیری کنند. به طور معمول، این حساسه‌ها می‌توانند سه تا شش مؤلفه از بردار نیرو-گشتاور وارد بر مجری نهایی را اندازه بگیرند.

۳. در «سرانگشتان» مجری نهایی: معمولاً در این انگشتان حس‌کننده نیرو، کرنش‌سنجهایی برای اندازه‌گیری یک تا چهار مؤلفه نیروی وارد بر هر سر انگشت، تعبیه شده است.

شکل ۸-۱۹ نمونه‌ای از ساختمان داخلی یک نوع معمول از حساسه نیرو را (که به وسیله شاین‌من<sup>۱</sup> [۲۲] طراحی شده است) نشان می‌دهد. به سازه صلیبی شکل حساسه، هشت جفت کرنش‌سنج از نوع نیم‌رسانا چسبانده شده است. هر جفت کرنش‌سنج به صورت تقسیم‌کننده ولتاژ سیم‌پیچی شده است. هر بار که مقدار نیرو از مج طلب می‌شود، هشت ولتاژ آنالوگ به



شکل ۸-۱۹ ساختمان داخلی مج حس‌کننده نیرو.

کمیت‌های رقی (دیجیتال) تبدیل، و به کامپیوتر تغذیه می‌شوند. برای تبدیل مقادیر هشت کرنش اندازه‌گیری شده، از یک ماتریس کالیبراسیون ثابت  $8 \times 6$  استفاده می‌شود. برای رسیدن به این ماتریس، روش‌های کالیبراسیون گوناگونی طراحی شده است. چنانکه در مثال ۵-۸ دیدیم، بردار نیرو-گشتاور،  $F$ ، حس شده را می‌توان به چهارچوب مرجع مورد نظر، انتقال داد.

### مطالبی درباره طراحی حس‌کننده نیرو

استفاده از کرنش‌سنجها برای اندازه‌گیری نیرو، بر اندازه‌گیری تغییر شکل خمشی سازه‌ای که تحت تنش قرار دارد، مبتنی است. در نتیجه، بین سختی و حساسیت حس‌کننده، رابطه‌ای وجود دارد: حساسه سخت‌تر، طبیعتاً حساسیت کمتری دارد.

سختی حس‌کننده بر ساختمان عضو حافظ در مقابل بار بیش از حد نیز تأثیر می‌گذارد. کرنش‌سنجها ممکن است بر اثر بار ضربه‌ای صدمه ببینند، و به همین دلیل باید از آنها در مقابل چنین بارهایی محافظت کرد. با قرار دادن موانع محدودکننده حرکت، از تغییر شکل بیش از مقدار معین عضو تحت تنش، و صدمه دیدن تراگردانها جلوگیری می‌شود. متأسفانه اگر حساسه بسیار سخت باشد، مقدار تغییر شکل تنها چند ده هزارم اینچ خواهد بود و ساختن موانع محدود کننده حرکت با تولرانسهایی چنین کوچک، بسیار دشوار است. به همین دلیل، در بسیاری از انواع تراگردان، باید میزان معینی از انعطاف‌پذیری در نظر گرفته شود تا موانع محدود کننده حرکت، بتوانند به طرز مؤثری عمل کنند.

حذف پسماند، یکی از پر دردسرت‌ترین مراحل طراحی حساسه‌هاست. بسیاری از فلزات به‌کار رفته به‌عنوان عضو تغییر شکل یابنده، چنانچه تغییر شکل بیش از حد به آنها اعمال نشود، پسماند بسیار کمی دارند. اما مفصله‌های پیچ‌شده، پرس‌شده، و یا جوشکاری شده واقع در نزدیکی عضو تغییر شکل یابنده، باعث ایجاد پسماند می‌شوند. در حالت ایده‌آل، عضو تغییر شکل یابنده و ماده نزدیک به آن، از یک قطعه فلز یکپارچه ساخته می‌شوند.

اندازه‌گیری دیفرانسیلی (تفاضلی) برای افزایش عملکرد خطی و دفع نویز در حساسه‌های گشتاور، اهمیت زیادی دارد. با آرایش تراگردانها به‌صورت‌های گوناگون، می‌توان اثرات ناشی از گرما و نیروهای خارج محوری را از میان برد.

کرنش‌سنجهای ورق فلزی نسبتاً با دوام‌اند، اما در کرنش کامل، تغییر مقاومت کوچکی ایجاد می‌کنند. با حذف نویز در سیم‌کشی کرنش‌سنج و سیستم تقویت‌کننده الکترونیکی دستگاه، می‌توان به گستره دینامیکی مناسبی دست یافت.

کرنش‌سنج‌های نیم‌رسانا بر اثر اعمال بار بیش از حد، به مراتب بیش از کرنش‌سنجهای ورق فلزی صدمه می‌بینند. از سوی دیگر، این کرنش‌سنجها، به‌ازای کرنشی معین، تغییر مقاومتی معادل با هفتاد برابر تغییر مقاومت ایجاد شده در کرنش‌سنجهای ورق فلزی ایجاد می‌کنند. این امر، پردازش سیگنالها را در گستره دینامیکی مفروض، به مراتب ساده‌تر خواهد ساخت.

## مراجع

- [1] W. Rowe, Editor, *Robotics Technical Directory 1986*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, N. C., 1986.
- [2] R. Vijaykumar and K. Waldron, "Geometric Optimization of Manipulator Structures for Working Volume and Dexterity," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 2, 1986.
- [3] K. Waldron, "Design of Arms," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, 1988.
- [4] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No.2, MIT Press, 1985.
- [5] H. Asada, "Dynamic Analysis and Design of Robot Manipulators Using Inertia Ellipsoids," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics*, Atlanta, March 1984.
- [6] J.K. Salisbury and J. Craig, "Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1, 1982.
- [7] O. Khatib and J. Burdick, "Optimization of Dynamics in Manipulator Design: The Operational Space Formulation," *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 2, No. 2, IASTED, 1987.
- [8] T. Yoshikawa, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St. Louis, March 1985.
- [9] J. Trevelyan, P. Kovesi, and M. Ong, "Motion Control for a Sheep Shearing Robot," *The 1st International Symposium of Robotics Research*, MIT Press, 1984.
- [10] P. Marchal, J. Cornu, and J. Detriche, "Self Adaptive Arc Welding Operation by Means of an Automatic Joint Following System,"

*Proceedings of the 4th Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Zaburów, Poland, September 1981.

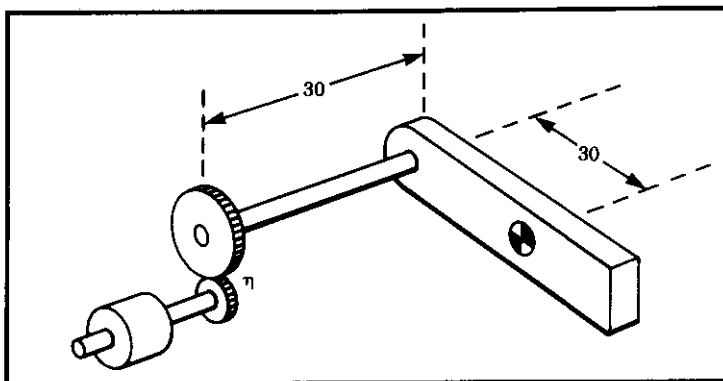
- [11] J.M. Hollerbach, "Optimum Kinematic Design for a Seven Degree of Freedom Manipulator," *Proceedings of the 2nd International Symposium of Robotics Research*, Kyoto, Japan, August 1984.
- [12] K. Waldron and J. Reidy, "A Study of Kinematically Redundant Manipulator Structure," *Proceedings of the IEEE Robotics and Automation Conference*, San Francisco, April 1986.
- [13] V. Milenkovic, "New Nonsingular Robot Wrist Design," *Proceedings of the Robots 11/17th ISIR Conference*, SME, 1987.
- [14] E. Rivin, *Mechanical Design of Robots*, McGraw-Hill, 1988.
- [15] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms," in *Proceedings of the 2nd International Symposium on Robotics Research*, Kyoto, Japan, 1984.
- [16] M. Leu, V. Dukowski, and K. Wang, "An Analytical and Experimental Study of the Stiffness of Robot Manipulators with Parallel Mechanisms," in *Robotics and Manufacturing Automation*, M. Donath and M. Leu, Editors, ASME, New York, 1985.
- [17] K. Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [18] H. Asada and K. Youcef-Toumi, *Design of Direct Drive Manipulators*, MIT Press, 1987.
- [19] J. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.
- [20] D. Welbourne, "Fundamental Knowledge of Gear Noise-A Survey," *Proceedings of the Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions*, Institute of Mechanical Engineers, Cranfield, UK, 1979.
- [21] O. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.

- [22] V. Scheinman, "Design of a Computer Controlled Manipulator," M.S. Thesis, Mechanical Engineering Department, Stanford University, 1969.
- [23] K. Lau, N. Dagalakakis, and D. Meyers, "Testing," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, 1988.
- [24] M. Roshien, "Wrists," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, John Wiley and Sons, 1988.

## تمرینها

- ۱-۸ [۱۵] برای حرکت دادن یک وسیله برش لیزری، از روبات استفاده می شود. لیزر باریکه ای متمرکز و غیر واگرا تولید می کند. این روبات برای انجام برشهای معمولی، به چند درجه آزادی نیاز دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.
- ۲-۸ [۱۵] برای روبات تمرین ۱-۸، یک پیکربندی مفصلی طراحی کنید. فرض کنید این روبات برای بریدن ورقهایی به ضخامت ۱ in و ابعاد  $8 \times 8$  ft تحت زوایای مختلف به کار می رود.
- ۳-۸ [۱۷] شاخص طولی سازه ای  $Q_L$  را برای نقطه مج روبات کروی نشان داده شده در شکل ۶-۸ به دست آورید. فرض کنید حرکت مفصلهای ۱ و ۲ محدودیتی ندارد، و مفصل ۳ دارای حد پایینی  $l$  و حد بالایی  $u$  است.
- ۴-۸ [۲۵] محوری فولادی به طول ۳۰ cm و قطر ۰/۲ cm، چرخنده ورودی یک سیستم کاهش سرعت را با نسبت چرخنده  $\eta = 8$  می راند. چرخنده خروجی نیز محوری فولادی به طول ۳۰ cm و قطر ۰/۳ cm را می راند. اگر چرخنده ها خود ایجاد ضعف نکنند، سختی کل سیستم انتقال قدرت چقدر خواهد بود؟
- ۵-۸ [۲۰] در شکل ۸-۲۰، یک رابط توسط محوری که به سیستم کاهش سرعت متصل است، به حرکت در آمده است. رابط را به صورت جسمی صلب با جرم ۱۰ Kg در نقطه ای با فاصله ۳۰ cm از محور تقارن محور، مدلسازی کنید. چرخنده ها را صلب، و نسبت کاهش سرعت  $\eta$  را بزرگ فرض کنید. محور فولادی و طول آن ۳۰ cm است. اگر طبق مشخصات طراحی لازم باشد بر مرکز جرم رابط شتابهایی تا  $2g$  اعمال شود، قطر محور را چقدر باید در نظر گرفت تا تغییر شکل دینامیکی زاویه مفصلی از ۰/۱ رادیان بیشتر نشود؟





شکل ۸-۲۰ حرکت یک رابط توسط محوری که به سیستم کاهش سرعت متصل است.

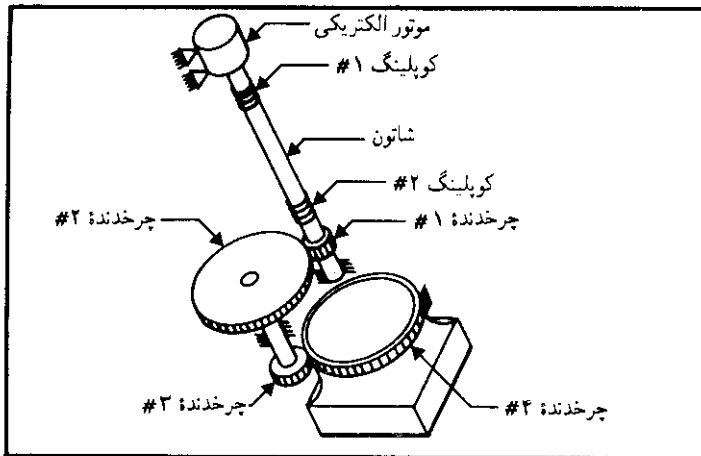
۶-۸ [۱۵] در شکل ۸-۲۰، اگر سختی چرخنده خروجی (در حالی که چرخنده ورودی قفل است)  $1000 \text{ N.m/rad}$  و سختی محور  $300 \text{ N.m/rad}$  باشد، سختی کل سیستم رانش را به دست آورید.

۷-۸ [۴۳] بر طبق معیار پایپر در بازوهای مکانیکی ماهر سری، اگر سه محور مفصلی متوالی بازو در یک نقطه متقاطع یا با یکدیگر موازی باشند، معادله‌های آن بازو قابل حل خواهند بود. ایده اصلی در این معیار، آن است که هرگاه مکان نقطه میج به طور مستقل از جهتگیری چهارچوب میج در نظر گرفته شود، معادله‌های سینماتیکی وارون را می‌توان به صورت جدا شده (غیر وابسته) درآورد. برای مکانیزم استوارت شکل ۸-۱۴ نیز شرطی پیشنهاد کنید که با رعایت آن، بتوان معادله‌های سینماتیکی مستقیم را به صورت غیر وابسته نوشت.

۸-۸ [۲۰] در مکانیزم استوارت نشان داده شده در شکل ۸-۱۴، اگر به جای مفصلهای همه‌کاره با دو درجه آزادی در پایه، از مفصلهای کروی با سه درجه آزادی استفاده شود، در تعداد کل درجات آزادی سیستم چه تغییری حاصل خواهد شد؟ از رابطه گروبلر استفاده کنید.

۹-۸ [۲۲] شکل ۸-۲۱ تصویر شماتیک ساده شده‌ای از سیستم رانش مفصل ۴ در روبات پوما  $560$  [۲۳] را نشان می‌دهد. سختی پیچشی کل کوپلینگ‌ها  $100 \text{ N.m/rad}$ ، و سختی محور  $400 \text{ N.m/rad}$  است. همچنین سختی خروجی هریک از جفت چرخنده‌های سیستم کاهش سرعت  $2000 \text{ N.m/rad}$  است (در حالی که چرخنده‌های ورودی ثابت نگه داشته شده‌اند). در هر دو سیستم کاهش سرعت اولیه و ثانویه  $\eta = 6$  است. اگر سازه و یاتاقانهای آن کاملاً صلب فرض شوند، سختی مفصل، در حالی که محور موتور قفل شده است، چقدر خواهد بود؟

۱۰-۱ [۲۵] اگر جواب تمرین ۸-۹، فقط با سختی جفت چرخنده ثانویه سیستم کاهش



شکل ۸-۲۱ تصویر شماتیک ساده سیستم چرخنده مفصل ۴ در بازوی مکانیکی ماهر پیوما ۵۶۰.

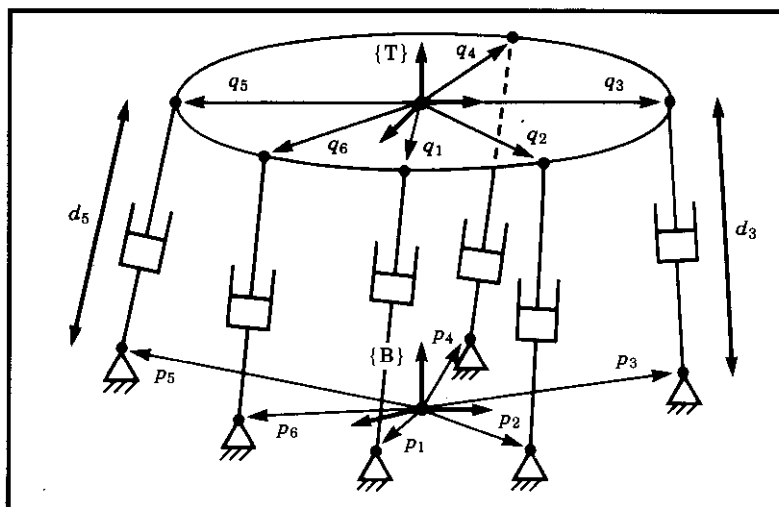
سرعت تقریب زده شود، میزان خطا چه مقدار خواهد بود؟  
 ۱۱-۸ [۲۰] در شکل ۴-۱۴ یک میج با محور عمودی، و یک میج با محور غیرعمودی نشان داده شده است. زوایای پیچش رابط در میج با محور عمودی  $90^\circ$ ، و در میج با محور غیرعمودی برابر  $\phi$  و  $180^\circ - \phi$  است. مجموعه جهتگیریهایی را که مکانیزم غیر عمودی قادر به رسیدن به آنها نیست، تعیین کنید. فرض کنید کلیه محورها می توانند  $360^\circ$  گردش کنند و رابطها در صورت لزوم می توانند از روی یکدیگر عبور کنند (یعنی در فضای کاری محدودیتی از لحاظ برخورد با خود وجود ندارد).

۱۲-۸ [۱۸] برای مکانیزم استوارت نشان داده شده در شکل ۸-۲۲، حل کلی معادله‌های سینماتیکی وارون را بنویسید. با داشتن محل  $\{T\}$  نسبت به چهارچوب پایه  $\{B\}$ ، متغیرهای مکان مفصل  $d_1$  تا  $d_4$  را به دست آورید. بردارهای  $p_i^B$  بردارهایی  $1 \times 3$  هستند که محل اتصال کاراندازه‌های خطی به پایه را نسبت به چهارچوب  $\{B\}$  توصیف می کنند. بردارهای  $q_i^T$  نیز بردارهایی  $1 \times 3$  هستند که محل اتصالهای بالایی کاراندازه‌های خطی را نسبت به چهارچوب  $\{T\}$  توصیف می کنند.

۱۳-۸ [۲۰] درمیان ژاکوبی بازوی صفحه‌ای دو رابطی مثال ۵-۳ چنین داده شده است

$$\det(J(\Theta)) = l_1 l_2 s_{\tau} \quad (۳۱-۸)$$

اگر مجموع طول رابطها،  $l_1 + l_2$ ، ثابت بماند، طولهای نسبی چقدر باید در نظر گرفته شوند تا معیار مهارت این بازو به صورت تعریف شده در رابطه (۸-۶) باشد؟  
 ۱۴-۸ [۲۸] اگر در روایات اسکارا مجموع طولهای رابطهای ۱ و ۲ ثابت بماند، انتخاب بهینه



شکل ۲۲-۸ مکانیزم استوارت در تمرین ۸-۱۲.

طول نسبی براساس معیار مهارت طبق رابطه (۸-۶) چه خواهد بود؟ بهتر است ابتدا تمرین ۸-۱۳ را حل کنید.

۱۵-۸ [۳۵] نشان دهید که معیار مهارت تعریف شده در رابطه (۸-۶) با حاصلضرب مقادیر ویژه  $J(\Theta)$  نیز برابر است.

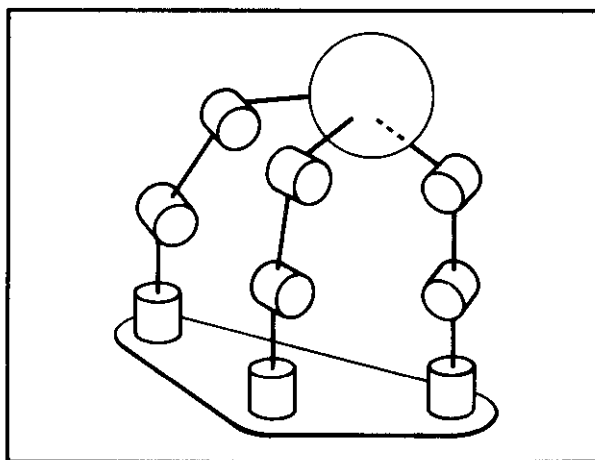
۱۶-۸ [۱۵] سختی پیچشی میله‌ای آلومینیومی به طول ۴۰ cm و شعاع ۰/۸ cm چقدر است؟

۱۷-۸ [۵] نسبت چرخنده مؤثر  $\eta$  برای کاهش سرعت سیستم تسمه‌ای با شعاع قرقره ورودی ۲/۰ cm و شعاع قرقره خروجی ۱۲/۰ cm چقدر است؟

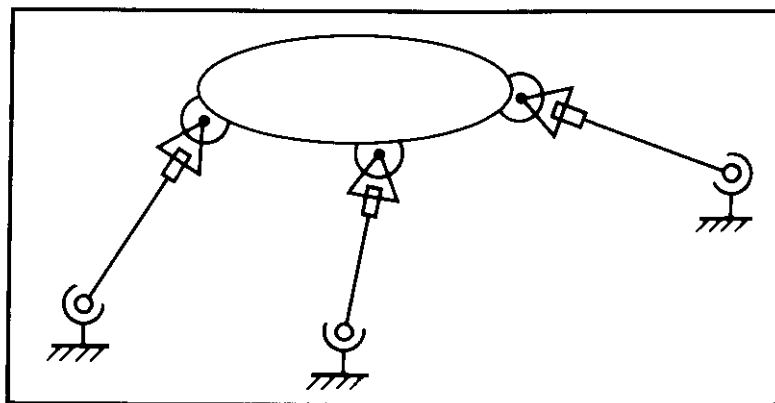
۱۸-۸ [۱۰] یک بازوی مکانیکی ماهر برای قرار دادن قطعات استوانه‌ای شکل بر روی سطحی صاف، به چند درجه آزادی نیاز دارد؟ قطعات استوانه‌ای نسبت به محور اصلی خود کاملاً متقارن اند.

۱۹-۸ [۲۵] در شکل ۸-۲۳ یک دست رباتی با سه انگشت، جسمی را نگه داشته است. هر انگشت دارای سه مفصل با یک درجه آزادی است. تماس بین سرانگشتان و جسم را می‌توان به صورت «تماس نقطه‌ای» مدلسازی کرد. این بدان معناست که مکان ثابت می‌ماند، اما جهتگیری نسبی در هر سه درجه آزادی قابل تغییر است. بدین ترتیب، برای تحلیل مکانیزم می‌توان این نقاط تماس را با مفصلهای کروی با سه درجه آزادی جایگزین کرد. با استفاده از رابطه گروبلر، تعیین کنید کل سیستم چند درجه آزادی دارد.

۲۰-۸ [۲۳] شکل ۸-۲۴ جسمی را نشان می‌دهد که با سه میله به زمین متصل شده است.



شکل ۸-۲۳ دست سه انگشتی، که در آن هر انگشت سه درجه آزادی دارد، جسم را با «تماس نقطه‌ای» نگه داشته است.



شکل ۸-۲۴ مکانیزم بسته در تمرین ۸-۲۰.

هر میله به وسیله مفصلی همه‌کاره با دو درجه آزادی به جسم، و به وسیله مفصلی کروی با سه درجه آزادی به زمین اتصال دارد. این سیستم چند درجه آزادی دارد؟

۸-۲۱ [۱۸] تحقیق کنید که اگر دو سیستم انتقال قدرت به‌طور سری به هم متصل شوند، آنگاه سختی معادل برای کل سیستم برابر با مقدار داده شده در رابطه (۸-۱۴) خواهد بود. برای سادگی، اتصال سری دو سیستم را به صورت دو فنر خطی با ضریب سختی  $k_1$  و

$k_2$  در نظر بگیرید و معادله‌ها را چنین بنویسید

$$\begin{aligned} f &= k_1 \delta x_1 \\ f &= k_2 \delta x_2 \\ f &= k_{sum}(\delta x_1 + \delta x_2) \end{aligned} \quad (۳۲-۸)$$

۲۲-۸ [۲۰] رابطه‌ای برای سختی سیستم رانش تسمه‌ای برحسب شعاع قرقره‌ها ( $r_1$  و  $r_2$ )، و فاصله مرکز تا مرکز آنها ( $d_c$ )، به دست آورید. از رابطه (۲۲-۸) شروع کنید.

### تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۸)

۱. برنامه‌ای بنویسید که دترمینان یک ماتریس  $3 \times 3$  را محاسبه کند.
۲. برنامه‌ای بنویسید که یک روبات با ۳ رابط شبیه‌سازی شده را در بیست مرحله در راستای خطی راست و جهت‌گیری ثابت، از مکان

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به مکان

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حرکت دهد. فاصله هر دو مکان متوالی را  $0.05 \text{ m}$  در نظر بگیرید. برای هر مکان، معیار مهارت روبات (دترمینان ژاکوبی) را به دست آورید. فهرستی از این مقادیر را به صورت تابعی از مکان در راستای محور  $\hat{X}_0$  تشکیل دهید (بهتر است منحنی این مقادیر را برحسب مکان رسم کنید).

داده‌های فوق را برای دو حالت زیر به دست آورید

$$l_1 = l_2 = 0.05 \text{ m} \quad (۱)$$

$$l_2 = 0.375 \text{ m} \text{ و } l_1 = 0.625 \text{ m} \quad (۲)$$

به نظر شما کدام طرح بازو بهتر است؟ دلیل بیاورید.



## کنترل خطی بازوهای مکانیکی ماهر

### ۱-۹ مقدمه

بر پایه مطالبی که تاکنون مطالعه کرده‌ایم، می‌توانیم مکانهای مفصلی متناظر با حرکتهای مورد نظر مجری نهایی در فضا را در طول زمان محاسبه کنیم. در این فصل، درباره چگونگی وادار کردن بازو به انجام حرکت مورد نظر، بحث می‌کنیم.

روشهای کنترل مورد بحث در این فصل، روشهای کنترل خطی‌اند. کاربرد این روشها تنها برای سیستمهایی معتبر است که مدل ریاضی آنها با معادله‌های دیفرانسیل خطی بیان شود. این روشهای خطی برای کنترل بازوهای مکانیکی ماهر، تقریبی‌اند، زیرا به‌طوری‌که در فصل ۶ دیدیم، دینامیک این بازوها معمولاً با معادله‌های دیفرانسیل غیر خطی بهتر نمایش داده می‌شود. اما چنانکه خواهیم دید، این تقریبه‌ها غالباً معقول‌اند، و روشهای کنترل خطی معمولترین روشهای به‌کار رفته در صنعت امروز به‌شمار می‌روند.

سرانجام، رهیافت خطی را می‌توان به منزله پایه‌ای برای روشهای پیچیده‌تر در کنترل سیستمهای غیر خطی در نظر گرفت. سیستمهای کنترل غیر خطی، در فصل ۱۰ بررسی می‌شوند. اگر چه کنترل خطی را به منزله روشی تقریبی برای کنترل بازوهای مکانیکی ماهر معرفی کرده‌ایم، اما کاربرد کنترل‌کننده‌های خطی صرفاً تجربی نیست. در فصل ۱۰ ثابت خواهیم کرد که حتی بدون توسل به تقریب زدن خطی معادله‌های دینامیکی بازو، کنترل‌کننده خطی معین می‌تواند سیستم کنترل قابل قبولی باشد. خوانندگانی که با سیستمهای کنترل خطی آشنایی دارند، می‌توانند چهاربخش اول این فصل را از برنامه مطالعه خود حذف کنند.

## ۲-۹ کنترل مدار بسته و پسخوراند (فیدبک)

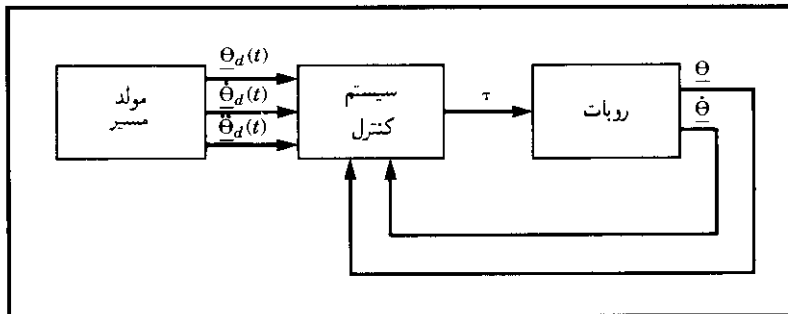
بازوی مکانیکی ماهر را به صورت مکانیزمی که هر مفصل آن مجهز به حساسه‌هایی برای اندازه‌گیری زاویه مفصلی، و کاراندازی برای اعمال گشتاور به رابط همسایه<sup>۱</sup> (رابط بالاتر بعدی) است، مدل‌سازی می‌کنیم. اگر چه حساسه‌ها را می‌توان در نقاط دیگری نیز قرار داد، اما در بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر، آنها را در مفصلها در نظر می‌گیرند.

گاهی در مفصلها از حساسه‌های سرعت (دورسنج) نیز استفاده می‌شود. در روباتهای صنعتی، روشهای کاراندازی و انتقال قدرت گوناگونی به کار می‌رود، اما بسیاری از آنها را می‌توان با فرض وجود یک کارانداز در هر مفصل، مدل‌سازی کرد.

چون می‌خواهیم مفصلهای بازو مسیره‌ای از پیش تعیین شده‌ای را دنبال کنند، و از طرفی کاراندازهای روبات نیز برحسب گشتاور فرمان می‌گیرند، باید از نوعی سیستم کنترل برای محاسبه فرمانهای مناسب به کاراندازها، استفاده کرد تا حرکت مورد نظر در مفصل ایجاد گردد. تقریباً در کلیه موارد، این گشتاورها، توسط پسخوراند از حساسه‌های مفصلی محاسبه می‌شوند.

در شکل ۱-۹ رابطه بین مولد مسیر و روبات واقعی نشان داده شده است. روبات بردار  $\tau$  از گشتاورهای مفصلی را از سیستم کنترل دریافت می‌کند. حساسه‌های روبات به کنترل‌کننده اجازه می‌دهند تا بردار  $\Theta$  از مکانهای مفصلی و بردار  $\dot{\Theta}$  از سرعتهای مفصلی را بخواند. کلیه خطوط سیگنال در شکل ۱-۹ حامل بردارهای  $1 \times N$  هستند ( $N$  تعداد مفصلهای بازوست).

حال الگوریتمی را که در جعبه سیستم کنترل در شکل ۱-۹ به کار می‌رود، بررسی می‌کنیم. یک روش آن است که با استفاده از معادله دینامیکی روبات (مطابق آنچه در فصل ۶ دیدیم) گشتاورهای لازم برای مسیری خاص را محاسبه کنیم. چون مولد مسیر مقادیر  $\Theta_d$ ،  $\dot{\Theta}_d$ ، و  $\ddot{\Theta}_d$  را



شکل ۱-۹ نمودار بلوکی یک سیستم کنترل روبات.

۱. به یاد داشته باشید که کلیه مطالب گفته شده درباره مفصلهای لولایی، به طور مشابه برای مفصلهای خطی نیز صادق است و برعکس.



به ما می‌دهد، می‌توانیم از معادله (۶-۵۹) استفاده کنیم و بنویسیم

$$\tau = M(\Theta_d)\ddot{\Theta}_d + V(\Theta_d, \dot{\Theta}_d) + G(\Theta_d) \quad (۱-۹)$$

بدین ترتیب، گشتاورهایی که در این مدل، برای تولید مسیر مورد نظر لازم‌اند، محاسبه می‌شوند. اگر مدل دینامیکی ما کامل و دقیق، و فاقد هرگونه «نویز» یا اغتشاشهای دیگر باشد، کاربرد رابطه (۱-۹) به‌طور پیوسته در راستای مسیر مورد نظر، این مسیر را پذیرد خواهد آورد. اما متأسفانه چون مدل دینامیکی کامل نیست و به‌ناچار اغتشاشهایی در آن وجود دارد، استفاده از این روش در کاربردهای واقعی، عملی نیست. این روش کنترل را کنترل مدار باز می‌نامند، زیرا در آن از پسخوراند حساسه‌های مفصلها استفاده نمی‌شود (به عبارت دیگر، رابطه (۱-۹) تابعی از فقط مسیر مورد نظر  $\Theta_d$  و مشتقات آن است، و تابع مسیر واقعی،  $\Theta$ ، نیست).

در حالت کلی، تنها راه ساختن سیستم کنترلی با عملکرد خوب، گرفتن پسخوراند از حساسه‌های مفصلها (به‌صورت نشان داده شده در شکل ۱-۹) است. معمولاً این پسخوراند برای محاسبه خطای سرو از طریق یافتن اختلاف بین مکان مورد نظر و مکان واقعی، و نیز بین سرعت مورد نظر و سرعت واقعی، به‌کار می‌رود

$$\begin{aligned} E &= \Theta_d - \Theta \\ \dot{E} &= \dot{\Theta}_d - \dot{\Theta} \end{aligned} \quad (۲-۹)$$

سپس سیستم کنترل می‌تواند گشتاور لازم برای ارسال به کاراندازها را به‌صورت تابعی از خطای سرو، محاسبه کند. در اینجا ایده اصلی، محاسبه گشتاورهای کارانداز لازم به‌گونه‌ای است که خطاهای سرو کاهش یابند. سیستم کنترل را که در آن از پسخوراند استفاده می‌شود، سیستم مدار بسته می‌خوانند. در شکل ۱-۹، «مدار بسته» تشکیل شده به‌وسیله سیستم کنترل در پیرامون روبات، به‌خوبی نمایان است.

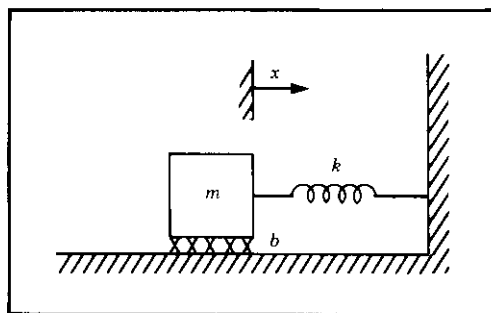
مسئله اساسی در طراحی هر سیستم کنترل، حصول اطمینان از عملکرد سیستم مدار بسته، طبق مشخصات فنی معین است. اصلترین این معیارها، پایداری سیستم است. از نظر ما، سیستمی پایدار است که در آن خطاها در هنگام اجرای مسیرهای گوناگون «کوچک» باقی بمانند، حتی اگر اغتشاشهایی در حد «متوسط» موجود باشند. باید توجه داشت که اگر سیستم کنترل درست طراحی نشود، عملکرد آن گاهی ناپایدار می‌شود، و در نتیجه خطاهای سرو به‌جای کاهش، افزایش می‌یابند. به همین دلیل، نخستین وظیفه مهندس کنترل، آن است که ثابت کند طرح او به سیستمی پایدار منتهی می‌شود، و دومین وظیفه‌اش آن است که ثابت کند عملکرد مدار بسته سیستم، رضایتبخش است. در عمل، این «اثبات» می‌تواند از طریق انجام محاسبات ریاضی متکی بر فرضها و مدل‌هایی معین، و یا با استفاده از نتایج تجربی حاصل از شبیه‌سازی یا آزمایش، انجام پذیرد.

شکل ۹-۱، که در آن کلیه خطوط سیگنال معرف بردارهای  $1 \times N$  هستند، نشان می‌دهد که مسئله کنترل روباتها، مسئله‌ای کنترلی با چند ورودی و چند خروجی (MIMO)<sup>۱</sup> است. در این فصل، رهیافت ساده‌ای را برای طراحی سیستم کنترل در پیش می‌گیریم که در آن هر مفصل به صورت سیستمی جداگانه کنترل می‌شود. بدین ترتیب، برای بازویی مکانیکی با  $N$  مفصل، تعداد  $N$  سیستم کنترل مستقل با یک ورودی و یک خروجی (SISO)<sup>۲</sup> طراحی می‌کنیم. این رهیافت طراحی، در حال حاضر به وسیله بیشتر سازندگان روباتهای صنعتی، به کار گرفته می‌شود. در این رهیافت، که کنترل مفصل مستقل خوانده می‌شود و روشی تقریبی است، معادله‌های حرکت (به دست آمده در فصل ۶) مستقل نیستند، بلکه به شدت به یکدیگر وابسته‌اند. در بخشهای آینده این فصل، تناسب کاربرد روش کنترل خطی را، دست کم برای بازوهای مکانیکی با سیستم چرخنده‌ای، توجیه خواهیم کرد.

### ۳-۹ سیستمهای خطی درجه دوم

پیش از بررسی کنترل بازوی مکانیکی ماهر، کمی به عقب باز می‌گردیم و ابتدا یک سیستم مکانیکی ساده را در نظر می‌گیریم. در شکل ۹-۲، جسمی به جرم  $m$  به فنری با ضریب سختی  $k$  متصل شده است و ضریب اصطکاک جسم با سطح،  $b$  است. در این شکل، وضعیت صفر و جهت مثبت محور  $x$ ها (تعیین کننده مکان جسم) نیز مشخص شده است. اگر نیروی اصطکاک متناسب با سرعت جسم فرض شود، بر اساس نمودار پیکر آزاد جسم، معادله حرکت چنین به دست می‌آید

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (۳-۹)$$



شکل ۹-۲ سیستم جرم-فنر دارای اصطکاک.

بدین ترتیب، معادله دینامیکی مدار باز در این سیستم، که یک درجه آزادی دارد، معادله دیفرانسیل خطی و از مرتبه دوم با ضریب ثابت [۱] است. حل این معادله دیفرانسیل (رابطه ۳-۹)، تابع زمانی  $x(t)$  است، که حرکت جسم را مشخص می‌کند. این جواب، به شرایط اولیه جسم، یعنی مکان و سرعت آن در لحظه صفر، بستگی دارد.

از این سیستم مکانیکی ساده، برای معرفی برخی مفاهیم اولیه در سیستمهای کنترل، استفاده خواهیم کرد. متأسفانه با این مقدمه ساده نمی‌توانیم نظریه کنترل را چنانکه شایسته آن است، بررسی کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم دانشجو تنها با معادله‌های دیفرانسیل ساده آشنایی دارد و در نتیجه از ابزارهای معمول مهندسی کنترل، مانند تبدیل لاپلاس و دیگر روشها، استفاده نمی‌کنیم. مرجعی خوب برای این موضوع، مرجع [۴] است.

سیستم شکل ۲-۹ می‌تواند چندین مشخصه حرکتی متفاوت را از خود نشان دهد. مثلاً، اگر فنر بسیار ضعیف ( $k$  کوچک) و اصطکاک بسیار زیاد ( $b$  بزرگ) باشد، می‌توان تصور کرد که هرگاه جسم کشیده شود، بسیار آهسته و با کندی به وضعیت سکون اولیه خود باز خواهد گشت. اما اگر فنر بسیار سخت و اصطکاک ناچیز باشد، جسم ممکن است قبل از ساکن شدن، چند بار نوسان کند. این وضعیتهای مختلف، به این دلیل ایجاد می‌شوند که نوع جواب معادله (۳-۹) به مقادیر پارامترهای  $m$ ،  $b$ ، و  $k$  بستگی دارد.

با مطالعه معادله‌های دیفرانسیل [۱]، خواهیم دید که شکل حل معادله‌ای از نوع (۳-۹)، به ریشه‌های معادله مشخصه آن بستگی دارد

$$ms^2 + bs + k = 0 \quad (4-9)$$

این معادله مشخصه دو جواب دارد

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \\ s_2 &= -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned} \quad (5-9)$$

محل ریشه‌های  $s_1$  و  $s_2$  (که گاهی آنها را قطبهای سیستم نیز می‌نامند) در صفحه مختلط، نوع حرکت سیستم را مشخص می‌کند. اگر  $s_1$  و  $s_2$  حقیقی باشند، آنگاه رفتار سیستم کند و غیرنوسانی خواهد بود. اگر  $s_1$  و  $s_2$  مختلط باشند (یعنی یک مؤلفه موهومی داشته باشند)، آنگاه رفتار سیستم نوسانی خواهد بود. با در نظر گرفتن حالتی دیگر بین دو حالت فوق، در مجموع می‌توان سه پاسخ زیر را برای این سیستم بررسی کرد:

۱. ریشه‌های حقیقی و نامساوی: در این حالت،  $b^2 > 4mk$ ، یعنی اصطکاک غالب است، و رفتار کند و غیرنوسانی حاصل می‌شود. این حالت را فوق میرایی می‌نامند.

۲. ریشه‌های مختلط: در این حالت،  $b^2 < 4mk$ ، یعنی سختی فنر غالب است و رفتار نوسانی پدید می‌آید. این حالت را زیرمیرایی می‌نامند.

۳. ریشه‌های حقیقی و مساوی: در این حالت،  $b^2 = 4mk$ ، یعنی اصطکاک و سختی فنر به تعادل می‌رسند و سریعترین رفتار غیرنوسانی ممکن را باعث می‌شوند. این حالت را میرایی بحرانی می‌نامند.

به‌طور کلی، حالت سوم (میرایی بحرانی)، وضعیت مطلوبی است، زیرا در این حالت، سیستم شرایط اولیه غیرصفر را خنثی می‌کند، و با بیشترین سرعت ممکن و بدون رفتار نوسانی، به مکان طبیعی (اسمی) خود باز می‌گردد.

### ریشه‌های حقیقی و نامساوی

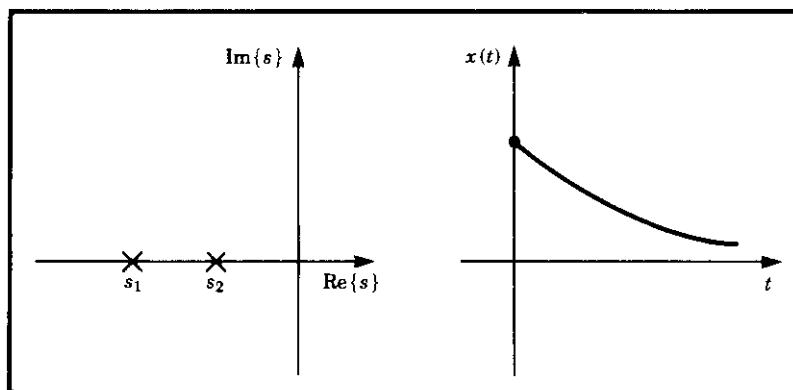
به آسانی می‌توان نشان داد (با جایگزینی مستقیم در (۹-۳)) که جواب  $x(t)$ ، یعنی بیان‌کننده حرکت جسم، در حالت دو ریشه حقیقی و نامساوی برای معادله مشخصه، به شکل زیر است

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (۹-۶)$$

که در آن  $s_1$  و  $s_2$  از رابطه (۹-۵) به‌دست می‌آیند. ضرایب  $c_1$  و  $c_2$  ثابت‌اند، و به‌ازای شرایط اولیه معین (مکان و سرعت اولیه جسم)، می‌توان آنها را محاسبه کرد.

در شکل ۹-۳، مثالی از محل قطبها و پاسخ زمانی متناظر با آن برای شرایط اولیه غیر صفر، نشان داده شده است. اگر قطبهای سیستمی درجه دوم، حقیقی و نامساوی باشند، سیستم حرکتی کند یا فوق‌میرا خواهد داشت.

در مواردی که اندازه یک قطب بسیار بزرگتر از قطب دیگر است، می‌توان از قطب دارای اندازه



شکل ۹-۳ محل ریشه‌ها و پاسخ زمانی به شرایط اولیه برای سیستمی فوق‌میرا.

بزرگتر صرف نظر کرد، زیرا عبارت زمانی متناظر با آن، در مقایسه با قطب غالبتر، خیلی سریع به صفر خواهد گرایید. این مفهوم از قطب غالب، به سیستمهای با درجه بالاتر نیز قابل گسترش است. مثلاً هر سیستم درجه سوم را می توان با در نظر گرفتن دو قطب غالب آن، به صورت سیستمی درجه دوم مطالعه کرد.

### ■ مثال ۹-۱

حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۹-۲ را برای حالتی که مقادیر پارامترهای آن  $m = ۱$ ،  $b = ۵$ ، و  $k = ۶$  است، و جسم از مکان  $x = -۱$  (از حال سکون) رها می شود، مشخص کنید. معادله مشعشه این سیستم چنین است

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \quad (۷-۹)$$

ریشه های این معادله عبارت اند از  $s_1 = ۲$  و  $s_2 = ۳$ . پس پاسخ زمانی چنین به دست می آید

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \quad (۸-۹)$$

حال شرایط اولیه  $x(0) = -۱$  و  $\dot{x}(0) = 0$  را برای تعیین  $c_1$  و  $c_2$  به کار می بریم. در  $t = 0$ ، برای ارضای این شرایط، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -1 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (۹-۹)$$

لذا ضرایب چنین به دست می آیند:  $c_1 = -۳$  و  $c_2 = ۲$ . پس معادله حرکت سیستم در  $t \geq 0$  چنین است

$$x(t) = -3e^{-2t} + 2e^{-3t} \quad (۱۰-۹)$$

■

### ریشه های مختلط

در حالتی که ریشه های معادله مشخصه، اعداد مختلطی به صورت زیر باشند

$$\begin{aligned} s_1 &= \lambda + \mu i \\ s_2 &= \lambda - \mu i \end{aligned} \quad (۱۱-۹)$$

بازهم جواب شکل کلی زیر را دارد

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (۱۲-۹)$$

اما بهتر است معادله (۱۲-۹) به صورت بالا به کار برده نشود، زیرا در این صورت، اعداد مختلط مستقیماً در آن ظاهر می‌شوند. در عوض، می‌توان با استفاده از رابطهٔ اوایلر، نوشت (تمرین ۹-۱ را ببینید)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (۱۳-۹)$$

جواب (۱۲-۹) را می‌توان به صورت زیر در آورد

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t) \quad (۱۴-۹)$$

ضرایب  $c_1$  و  $c_2$  ثابت‌هایی هستند که مانند گذشته با استفاده از شرایط اولیه قابل محاسبه‌اند. اگر این ثابت‌ها را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} c_1 &= r \cos \delta \\ c_2 &= r \sin \delta \end{aligned} \quad (۱۵-۹)$$

آن‌گاه رابطه (۱۴-۹) را می‌توان چنین نوشت

$$x(t) = r e^{\lambda t} \cos(\mu t - \delta) \quad (۱۶-۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \delta &= \text{Atan2}(c_2, c_1) \end{aligned} \quad (۱۷-۹)$$

بدین طریق، حرکت نوسانی به دست آمده را که دامنهٔ آن با گذشت زمان با پوش‌نمایی کاهش یافته، به صفر می‌گراید، بهتر می‌توان مشاهده کرد.

روش معمول دیگر برای توصیف سیستم‌های نوسانی درجهٔ دوم، نوشتن معادلهٔ آنها برحسب نسبت میرایی و بسامد طبیعی است. بدین ترتیب، معادلهٔ مشخصه سیستم برحسب این دو پارامتر، چنین نوشته می‌شود

$$s^2 + \zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (۱۸-۹)$$

که در آن  $\zeta$  نسبت میرایی (عددی بدون بعد بین ۰ و ۱)، و  $\omega_n$  بسامد طبیعی سیستم است.<sup>۱</sup> رابطه بین محل قطبها و این پارامترها چنین است

$$\begin{aligned}\lambda &= -\zeta\omega_n \\ \mu &= \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\end{aligned}\quad (۱۹-۹)$$

که در آن  $\mu$  قسمت موهومی قطبهاست که گاهی آن را بسامد طبیعی میرا شده می نامند. برای هر سیستم جرم-فنر میرا مانند شکل ۲-۹، نسبت میرایی و بسامد طبیعی چنین به دست می آید

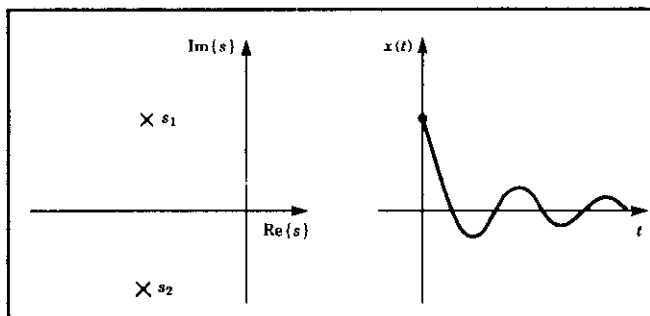
$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{b}{2\sqrt{km}} \\ \omega_n &= \sqrt{k/m}\end{aligned}\quad (۲۰-۹)$$

اگر سیستم میرا نباشد (در مثال ما، اگر  $b = 0$ )، نسبت میرایی صفر خواهد شد، و در میرایی بحرانی ( $b^2 = 4km$ )، نسبت میرایی با یک برابر می شود.

در شکل ۴-۹، مثالی از محل قطبها و پاسخ زمانی متناظر با آن برای شرایط اولیه غیر صفر، نشان داده شده است. هنگامی که قطبهای یک سیستم درجه دوم مختلط اند، سیستم حرکتی نوسانی یا حرکتی زیر میرا خواهد داشت.

#### ■ مثال ۲-۹

حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ را در حالتی که مقادیر پارامترها عبارت است از



شکل ۴-۹ محل ریشه ها و پاسخ زمانی به شرایط اولیه، برای سیستمی زیرمیرا.

۱. اصطلاحات نسبت میرایی و بسامد طبیعی را می توان برای سیستمهای فوق میرا نیز به کار برد. در این سیستمها  $\xi > 1$  است.

تعیین کنید.  $m = 1$ ,  $b = 1$  و  $k = 1$  و جسم (که ابتدا ساکن است) از مکان  $x = -1$  رها می‌شود،

معادله مشخصه سیستم در این حالت، چنین به دست می‌آید

$$s^2 + s + 1 = 0 \quad (21-9)$$

که ریشه‌های آن  $s_i = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  است. در نتیجه، پاسخ سیستم چنین خواهد بود

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \quad (22-9)$$

حال شرایط اولیه  $x(0) = -1$  و  $\dot{x}(0) = 0$  را به کار می‌بریم و، ثابتهای  $c_1$  و  $c_2$  را به دست می‌آوریم. در  $t = 0$ ، برای ارضای این شرایط باید داشته باشیم

$$c_1 = -1$$

$$-\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 0 \quad (23-9)$$

در نتیجه  $c_1 = -1$  و  $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، و معادله حرکت سیستم برای  $t \geq 0$  به صورت زیر مشخص می‌شود

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( -\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \quad (24-9)$$

این معادله را می‌توان به شکل معادله (۱۶-۹) چنین نوشت

$$x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2}t + 120^\circ \right) \quad (25-9)$$

■

### ریشه‌های حقیقی و مساوی

با جایگزینی در معادله (۳-۹)، می‌توان نشان داد که در حالت دو ریشه حقیقی و مساوی (ریشه‌های تکراری)، حل این معادله به صورت زیر است

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} \quad (26-9)$$

که در آن  $s_1 = s_2 = -\frac{b}{2m}$ . پس معادله (۲۶-۹) را می‌توان چنین نوشت

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{b}{2m}t} \quad (27-9)$$



در صورتی که مطلب روشن نباشد، با استفاده از قاعده هوییتال [۲] می‌بینیم که برای هر  $c_1, c_2$  و  $a$  داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 + c_2 t) e^{-at} = 0 \quad (28-9)$$

شکل ۵-۹ مثالی از محل قطبها و پاسخ زمانی متناظر با آن را برای شرایط اولیه غیر صفر نشان می‌دهد. هنگامی که قطبهای یک سیستم درجه دوم حقیقی و مساوی باشند، سیستم دارای حرکتی با میرایی بحرانی، یعنی سریعترین پاسخ غیرنوسانی ممکن، خواهد بود.

### ■ مثال ۳-۹

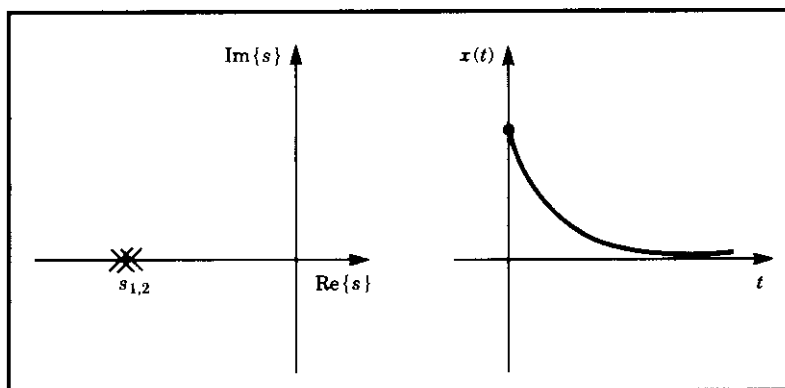
حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ را در حالتی که مقادیر پارامترها  $b = 4, m = 1$  و  $k = 4$  است، و جسم (که ابتدا ساکن است) از مکان  $x = -1$  رها می‌شود، تعیین کنید. برای این حالت، معادله مشخصه چنین به دست می‌آید

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \quad (29-9)$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از  $s_1 = s_2 = 2$  پس شکل پاسخ چنین است

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-2t} \quad (30-9)$$

حال با استفاده از شرایط اولیه  $x(0) = -1$  و  $\dot{x}(0) = 0$  ثابتهای  $c_1$  و  $c_2$  را به دست



شکل ۵-۹ محل ریشه‌ها و پاسخ زمانی به شرایط اولیه برای سیستمی با میرایی بحرانی.

می‌آوریم. در  $t = 0$ ، برای ارضای این شرایط، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ -2c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (31-9)$$

در نتیجه  $c_1 = -1$  و  $c_2 = -2$ ، و معادله حرکت سیستم برای  $t \geq 0$  چنین به دست می‌آید

$$x(t) = (-1 - 2t) e^{-2t} \quad (32-9)$$

■

در مثالهای ۹-۱ تا ۹-۳، کلیه سیستمها پایدار بودند. این مطلب برای هر سیستم فیزیکی غیر فعال مانند سیستم شکل ۹-۲، صادق است. این قبیل سیستمهای مکانیکی همواره دارای خواص زیرند

$$\begin{aligned} m &> 0 \\ b &> 0 \\ k &> 0 \end{aligned} \quad (33-9)$$

در بخش بعد، خواهیم دید که بر اثر عملکرد سیستم کنترل، در مقدار یک یا چند ضریب از ضرایب فوق تغییر مؤثر ایجاد می‌شود. در این صورت، تحقیق درباره پایداری یا ناپایداری سیستم، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند.

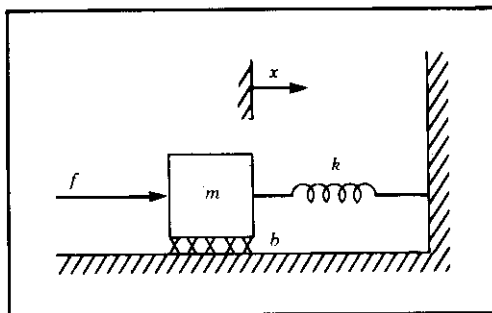
## ۹-۴ کنترل سیستمهای درجه دوم

فرض کنید پاسخ طبیعی سیستم مکانیکی درجه دوم ما، با پاسخی که در نظر داریم، یکی نباشد. مثلاً سیستم زیر میرا با حرکت نوسانی است، در حالی که می‌خواهیم میرایی بحرانی داشته باشد. یا ممکن است فنر از سیستم حذف شده باشد ( $k = 0$ )، و بنابراین سیستم پس از اعمال جابه‌جایی، هرگز به وضعیت  $x = 0$  باز نگردد. می‌خواهیم با استفاده از چند حساسه، یک کارانداز، و یک سیستم کنترل، رفتار سیستم را به صورت مطلوب اصلاح کنیم.

در شکل ۹-۶، به سیستم جرم-فنر کاراندازی اضافه شده است که نیروی  $f$  را به جسم وارد می‌کند. با توجه به نمودار پیکر آزاد جسم، معادله حرکت سیستم چنین به دست می‌آید

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (34-9)$$

فرض می‌کنیم حساسه‌هایی نیز برای تعیین مکان و سرعت جسم در اختیار داریم. حال

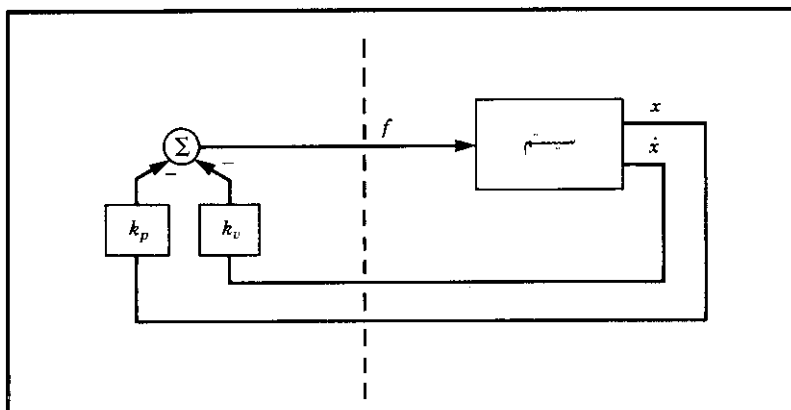


شکل ۹-۶ سیستم جرم-فنر-میرا با یک کارانداز خارجی.

قانون کنترل زیر را برای محاسبه نیرویی که کارانداز باید وارد کند، به صورت تابعی از پسخوراند حس شده، پیشنهاد می‌کنیم

$$f = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (۹-۳۵)$$

شکل ۹-۷ نمودار بلوکی سیستم مدار بسته را نشان می‌دهد، که در آن سمت چپ خط چین، سیستم کنترل (که معمولاً به وسیله کامپیوتر انجام می‌شود)، و سمت راست خط چین، سیستم فیزیکی است. در این شکل، فصل مشترکهای کامپیوتر کنترل، فرمانهای خروجی کارانداز، و اطلاعات ورودی حساسه، به طور ضمنی منظور شده است.



شکل ۹-۷ سیستم کنترل مدار بسته. کامپیوتر کنترل (در سمت چپ خط چین) اطلاعات ورودی از حساسه را می‌خواند و فرمانهای خروجی برای کارانداز را صادر می‌کند.

سیستم کنترلی که در بالا پیشنهاد کرده‌ایم، یک سیستم تنظیم مکان است، که به رغم نیروهای اغتشاشی وارد بر جسم، سعی در نگه‌داشتن جسم در مکانی ثابت دارد. در یکی از بخشهای بعدی، یک سیستم کنترل تعقیب مسیر خواهیم ساخت، که می‌تواند جسم را به تعقیب مسیر مکانی مطلوب، وادار کند.

با مسای قرار دادن معادله حرکت دینامیکی مدار باز (۹-۳۴) با قانون کنترل (۹-۳۵)، می‌توان معادله دینامیکی مدار بسته را چنین به‌دست آورد

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (9-36)$$

یا

$$m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0 \quad (9-37)$$

یا

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0 \quad (9-38)$$

که در آن  $k' = k + k_p$  و  $b' = b + k_v$ . با توجه به (۹-۳۷) و (۹-۳۸)، روشن است که با انتخاب بهره‌های کنترلی  $k_p$  و  $k_v$ ، می‌توان سیستم مدار بسته را به هرگونه رفتار مورد نظر از نوع سیستم درجه دوم واداشت. معمولاً بهره‌ها را طوری انتخاب می‌کنند که میرایی بحرانی ( $b' = 2\sqrt{mk'}$ ) حاصل شود و ضریب سختی مدار بسته‌ای که مستقیماً با  $k'$  داده شده است، به‌دست آید.

توجه کنید که  $k_p$  و  $k_v$  به پارامترهای سیستم اصلی بستگی دارند، و ممکن است مثبت یا منفی باشند. اما اگر  $b'$  یا  $k'$  منفی شوند، سیستم ناپایدار خواهد شد. این ناپایداری با نوشتن حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (به‌صورت (۹-۶)، (۹-۱۴)، یا (۹-۲۶))، آشکار خواهد شد. بدون انجام محاسبه و به‌شیوه شهودی نیز می‌توان دریافت که اگر  $b'$  یا  $k'$  منفی شوند، خطاهای سُر و به‌جای کاهش، افزایش پیدا می‌کنند.

#### ■ مثال ۹-۴

اگر پارامترهای سیستم نشان داده شده در شکل ۹-۶ برابر با  $m = 1$ ،  $b = 1$ ، و  $k = 1$  باشند، بهره‌های  $k_p$  و  $k_v$  را برای قانون کنترل تنظیم مکان که منجر به میرایی بحرانی سیستم با ضریب سختی مدار بسته  $16^\circ$  می‌شود، به‌دست آورید.

اگر بخواهیم  $k' = 16^\circ$  باشد، آن‌گاه برای ایجاد میرایی بحرانی، باید  $b' = 2\sqrt{mk'} = 8^\circ$ .

چون  $k = 1$  و  $b = 1$ ، پس

$$k_p = 15.0^\circ$$

$$k_v = 7.0^\circ \quad (39-9)$$

■

## ۵-۹ تقسیم قانون کنترل

به منظور آماده شدن برای طراحی سیستمهای پیچیدهتر، در اینجا ساختار کنترلکننده متفاوتی را برای مسئله شکل ۹-۶، بررسی خواهیم کرد. برای انجام این کار، کنترلکننده را به دو قسمت وابسته به مدل و سرؤ تقسیم می‌کنیم. بر اثر این اقدام، پارامترهای سیستم (در این مورد  $b$ ،  $m$  و  $k$ ) تنها در قسمت وابسته به مدل ظاهر، و قسمت سرؤ از این پارامترها مستقل می‌شود. متمایز کردن این دو قسمت ممکن است در حال حاضر با اهمیت به نظر نرسد، اما پس از آنکه در فصل ۱۰، سیستمهای غیر خطی را بررسی کردیم، اهمیت آن آشکار خواهد شد. این رهیافت تقسیم قانون کنترل را در سراسر کتاب به کار خواهیم برد.

معادله حرکت مدار باز برای سیستم چنین است:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (40-9)$$

می‌خواهیم کنترلکننده این سیستم را به دو قسمت تجزیه کنیم. در این مورد خاص، قسمت وابسته به مدل قانون کنترل، از اطلاعات موجود درباره  $m$ ،  $b$ ، و  $k$  استفاده می‌کند. این قسمت از قانون کنترل، طوری تنظیم می‌شود که سیستم را کاهش دهد تا به صورت جرم واحدی به نظر رسد. این مطلب در مثال بعدی روشن خواهد شد. قسمت دوم قانون کنترل، از پسخوراند به منظور بهبود رفتار سیستم استفاده می‌کند. چون قسمت وابسته به مدل قانون کنترل، سیستم را به صورت جرم واحد جلوه می‌دهد، طراحی قسمت سرو بسیار ساده خواهد شد، زیرا بهره‌های آن طوری انتخاب می‌شوند که تنها برای کنترل سیستم با جرم واحد (بدون اصطکاک و بدون سختی) مناسب باشند. قسمت وابسته به مدل کنترل، در قانون کنترل به شکل زیر ظاهر می‌شود

$$f = \alpha f' + \beta \quad (41-9)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  تابعها یا مقادیری ثابت‌اند و طوری انتخاب می‌شوند که اگر  $f'$  به عنوان ورودی جدید به سیستم در نظر گرفته شود، سیستم به صورت جرمی واحد به نظر برسد. معادله سیستم (که از ترکیب (۴۰-۹) و (۴۱-۹) حاصل می‌شود)، در این ساختار از قانون کنترل، چنین خواهد بود

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta \quad (42-9)$$

روشن است که اگر بخواهیم سیستم از دید ورودی  $f'$ ، به صورت جرم واحد به نظر برسد، برای این سیستم خاص، باید  $\alpha$  و  $\beta$  را چنین انتخاب کنیم

$$\begin{aligned}\alpha &= m \\ \beta &= b\dot{x} + kx\end{aligned}\quad (۴۳-۹)$$

با جایگزینی این مقادیر در (۴۲-۹)، معادله سیستم چنین به دست می آید

$$\ddot{x} = f' \quad (۴۴-۹)$$

این معادله، معادله حرکت جرم واحد است. حال معادله (۴۴-۹) را به صورت معادله دینامیکی مدار باز سیستمی که باید کنترل شود، در نظر می گیریم. برای این کار، قانون کنترل زیر را برای محاسبه  $f'$  (مانند آنچه قبلاً انجام دادیم)، می نویسیم

$$f' = -k_v \dot{x} - k_p x \quad (۴۵-۹)$$

از ترکیب این قانون کنترل با (۴۴-۹) نتیجه می شود

$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0 \quad (۴۶-۹)$$

با کاربرد این روش، تنظیم بهره ها ساده است، و این بهره ها از پارامترهای سیستم مستقل اند. در نتیجه، برای حالت میرایی بحرانی می توان نوشت

$$k_v = 2\sqrt{k_p} \quad (۴۷-۹)$$

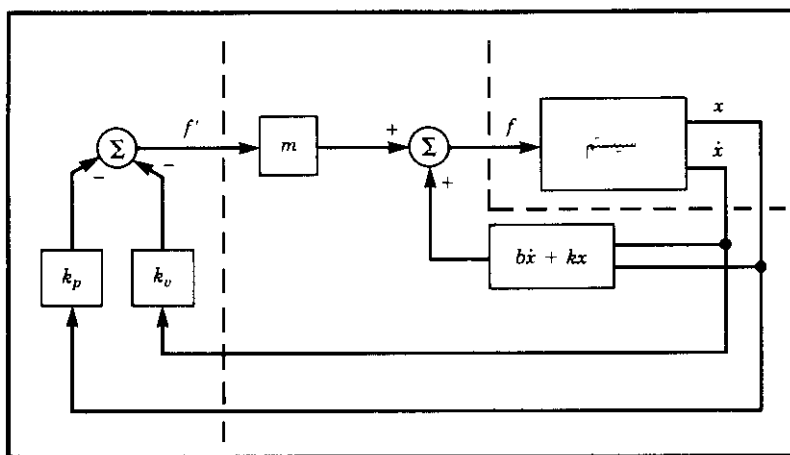
شکل ۹-۸، نمودار بلوکی کنترل کننده تقسیم شده را که برای کنترل سیستم شکل ۹-۶ به کار گرفته شده است، نشان می دهد.

#### ■ مثال ۹-۵

اگر پارامترهای سیستم شکل ۹-۶ عبارت باشند از  $m = 1$ ،  $b = 1$  و  $k = 1$ ، مقادیر  $\alpha$ ،  $\beta$ ، و بهره های  $k_p$  و  $k_v$  را برای قانون کنترل تنظیم مکان، که در سیستم میرایی بحرانی با ضریب سختی مدار بسته  $1/16$  ایجاد می کند، به دست آورید.

مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را چنین انتخاب می کنیم

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ \beta &= \dot{x} + x\end{aligned}\quad (۴۸-۹)$$



شکل ۸-۹ سیستم کنترل مدار بسته که در آن از روش تقسیم کنترل استفاده شده است.

تا سیستم از ورودی فرضی  $f'$ ، به صورت جرم واحد به نظر برسد. سپس بهره  $k_p$  را برابر با ضریب سختی مدار بسته مورد نظر، و  $k_v$  را در حالت میرایی بحرانی، برابر با  $2\sqrt{k_p}$  قرار می‌دهیم. در نتیجه

$$k_p = 16/^\circ$$

$$k_v = 8/^\circ \quad (49-9)$$

■

## ۹-۶ کنترل تعقیب مسیر

در اینجا می‌خواهیم کنترل‌کننده خود را پیشرفت دهیم به طوری که به جای نگه داشتن جسم در محل مورد نظر، آن را به دنبال کردن مسیر مورد نظر وادار کند. این مسیر، به صورت تابعی از زمان،  $x_d(t)$ ، که مجموعه مکانهای مورد نظر جسم را مشخص می‌سازد، بیان می‌شود. فرض می‌کنیم مسیر مورد نظر هموار است (یعنی دو مشتق اول  $x_d(t)$  وجود دارند)، و همچنین مولد مسیر، مقادیر  $\ddot{x}_d$ ،  $\dot{x}_d$  و  $x_d$  را در هر زمان  $t$  به دست می‌دهد. خطای سرّ بین مسیر مورد نظر و مسیر واقعی را به صورت  $e = x_d - x$  تعریف می‌کنیم. قانون کنترل سرویی که می‌تواند تعقیب مسیر را باعث شود، چنین است

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (50-9)$$

مشاهده می‌شود که ترکیب رابطه (۹-۵۰) با معادله حرکت جرم واحد (معادله ۹-۴۴)) انتخاب مناسبی است. با ترکیب این دو معادله نتیجه می‌شود

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (۹-۵۱)$$

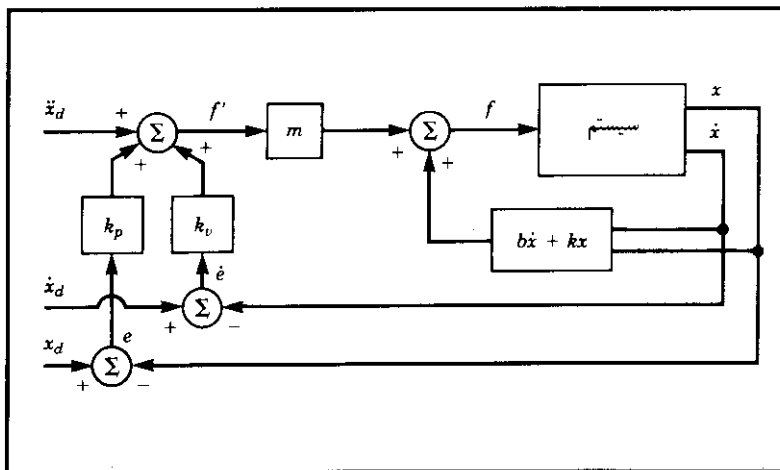
یا

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \quad (۹-۵۲)$$

چون این معادله، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب قابل انتخاب است، می‌توانیم هر پاسخ دلخواهی را برای آن در نظر بگیریم (معمولاً میرایی بحرانی در نظر گرفته می‌شود). گاهی اوقات این معادله را نوشته شده در فضای خطا می‌نامند، زیرا سیر تکاملی خطاها را نسبت به مسیر مورد نظر، مشخص می‌کند. شکل ۹-۹ نمودار بلوکی این کنترل‌کننده تعقیب مسیر را نشان می‌دهد. اگر مدل ما کامل باشد (یعنی  $m$ ،  $b$ ، و  $k$  را بدانیم)، و اگر نویز و خطای اولیه‌ای وجود نداشته باشد، آن‌گاه جسم دقیقاً مسیر مورد نظر را دنبال خواهد کرد. در صورت وجود خطای اولیه، بر طبق رابطه (۹-۵۲) بر آن غلبه خواهد شد و پس از آن، سیستم مسیر را دقیقاً دنبال خواهد کرد.

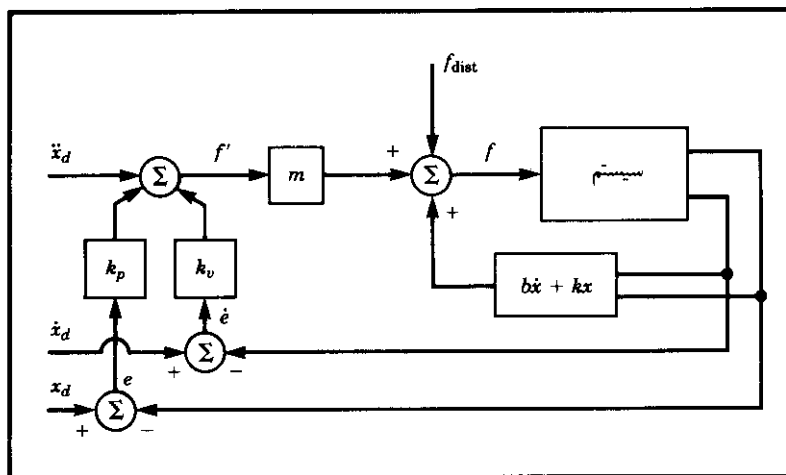
## ۷-۹ دفع اغتشاش

یکی از هدفهای هر سیستم کنترل، دفع اغتشاش، یعنی حفظ عملکرد رضایتبخش (خطای پایین)، حتی در هنگام وجود اغتشاشهای خارجی یا نویز است. در شکل ۹-۱۰ کنترل‌کننده تعقیب مسیر



شکل ۹-۹ یک کنترل‌کننده تعقیب مسیر برای سیستم شکل ۹-۶.





شکل ۹-۱۰ سیستم کنترل تعقیب مسیر با یک ورودی اغتشاشی از نوع  $f_{dist}$ .

با یک ورودی اضافی از نوع نیروی اغتشاشی،  $f_{dist}$ ، نشان داده شده است. تحلیل سیستم مدار بسته، ما را به معادله خطای زیر می‌رساند

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{dist} \quad (۵۳-۹)$$

معادله (۵۳-۹) معادله دیفرانسیلی است که در آن تابع نیرو وجود دارد. اگر  $f_{dist}$  کراندار باشد، یعنی عدد ثابت  $a$  را بتوان پیدا کرد به‌طوری‌که

$$\max_t f_{dist}(t) < a \quad (۵۴-۹)$$

آن‌گاه جواب معادله دیفرانسیل،  $e(t)$ ، نیز کراندار خواهد بود. دلیل این امر، وجود ویژگی ورودی کراندار خروجی کراندار (BIBO) در سیستمهای خطی پایدار است [۳، ۴]. این نتیجه اولیه، به ما اطمینان می‌دهد که بر اثر اعمال بسیاری از انواع اغتشاشهای ممکن، دستکم سیستم پایدار می‌ماند.

### خطای حالت پایا

ابتدا ساده‌ترین نوع اغتشاش، یعنی حالتی را که  $f_{dist}$  برابر با عددی ثابت است، در نظر می‌گیریم. در این حالت، می‌توانیم تحلیل حالت پایا انجام دهیم. این عمل را با تحلیل سیستم در حال سکون (که در آن مشتقهای کلیه متغیرهای سیستم صفرند)، انجام خواهیم داد. با صفر قرار دادن مشتقها

#### 1. Bounded Input-Bounded Output (BIBO)

در (۵۳-۹)، معادله حالت پایا چنین به دست می آید

$$k_p e = f_{dist} \quad (55-9)$$

یا

$$e = f_{dist} / k_p \quad (56-9)$$

مقدار  $e$  به دست آمده از رابطه (۵۶-۹)، برابر با خطای حالت پایاست. بدین ترتیب، دیده می شود که هرچه بهره مکان  $k_p$  بزرگتر باشد، خطای حالت پایا کوچکتر خواهد بود.

### افزودن جمله انتگرالی

به منظور حذف خطای حالت پایا، گاهی از یک قانون کنترل اصلاح شده استفاده می شود. حالت اصلاح شده با افزودن یک جمله انتگرالی به قانون کنترل، به دست می آید. در نتیجه قانون کنترل به صورت زیر نوشته می شود

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt \quad (57-9)$$

و معادله خطا چنین به دست می آید

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{dist} \quad (58-9)$$

جمله انتگرالی به گونه ای اضافه می شود که خطای حالت پایای سیستم در هنگام وجود اغتشاش ثابت، صفر شود. اگر  $e(t) < 0$  (به ازای  $t < 0$ )، آن گاه می توان برای  $t > 0$ ، معادله (۵۸-۹) را چنین نوشت

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i e = f_{dist} \quad (59-9)$$

که در حالت پایا (برای اغتشاش ثابت) به شکل زیر در می آید

$$k_i e = 0 \quad (60-9)$$

در نتیجه

$$e = 0 \quad (61-9)$$

با اعمال این قانون کنترل، سیستم به سیستمی درجه سوم تبدیل می شود، و برای تعیین پاسخ آن به شرایط اولیه، باید معادله دیفرانسیل مرتبه سوم مربوط به آن را حل کرد. معمولاً  $k_i$  را کوچک

در نظر می‌گیرند تا سیستم درجه سوم به سیستم درجه دوم بدون این جمله «نزدیک» شود (یعنی می‌توان از تحلیل «قطب غالب» استفاده کرد). قانون کنترل طبق معادله (۹-۵۷) را قانون کنترل PID، و یا قانون «تناسبی، انتگرالی، مشتقی» می‌نامند [۴]. برای سادگی، در نمایش معادله‌های قوانین کنترل پی‌ریزی شده در این کتاب، جمله انتگرالی ظاهر نخواهد شد.

## ۸-۹ کنترل زمانی پیوسته و ناپیوسته (منقطع)

در سیستم‌های کنترلی که تاکنون بررسی کرده‌ایم، همواره فرض بر آن بوده است که کامپیوتر سیستم کنترل، محاسبات قانون کنترل به‌کار رفته را در زمان صفر (یعنی بینهایت سریع) انجام می‌دهد، به‌طوری‌که نیروی کارانداز  $f$ ، تابعی پیوسته از زمان است. البته در عمل، محاسبات به زمان نیاز دارند، و در نتیجه نیروی حاصل تابعی «پله‌ای» و ناپیوسته خواهد بود. در این کتاب، فرض بسیار سریع بودن انجام محاسبات را برای تقریب‌زدن نتایج، می‌پذیریم. این تقریب، در صورتی‌که سرعت محاسبه مقادیر جدید  $f$  بسیار بیشتر از بسامد طبیعی سیستم تحت کنترل باشد، قابل قبول خواهد بود. در هنگام تحلیل سیستم به‌وسیله کنترل زمانی ناپیوسته یا کنترل رقمی، تقریب فوق به‌کار نمی‌رود و در عوض آهنگ سرو در سیستم کنترل در نظر گرفته می‌شود [۳].

در حالت کلی، چنانکه گفته شد، فرض خواهیم کرد که محاسبات را می‌توان به اندازه‌ای سریع انجام داد که فرض پیوسته بودن زمان، معتبر باشد. حال این پرسش مطرح می‌شود که «چقدر سریع»؟ برای انتخاب آهنگ نمونه‌برداری (سرویی) به قدر کافی سریع، باید به نکات زیر توجه کرد:

ردیابی ورودیهای مرجع: محتوای بسامدی ورودی مورد نظریا ورودی مرجع، به‌طور مطلق کران پایینی آهنگ نمونه‌برداری را مشخص می‌کند. آهنگ نمونه‌برداری باید حداقل دو برابر پهنای باند ورودیهای مرجع باشد. این معمولاً عامل محدود کننده‌ای به‌شمار نمی‌آید.

دفع اغتشاش: در دفع اغتشاش، کران بالایی عملکرد توسط یک سیستم زمانی پیوسته داده می‌شود. اگر تناوب نمونه‌برداری طولانیتر از زمان همبستگی آثار اغتشاش باشد (با فرض مدل آماری برای اغتشاشهای تصادفی)، آنگاه اثر این اغتشاشها را نمی‌توان خنثی کرد. به‌طور تقریبی، می‌توان تناوب نمونه‌برداری را ده برابر کوتاهتر از زمان همبستگی اغتشاش در نظر گرفت [۳].

جلوگیری از ایجاد خطا: هر زمان که از حساسه آنالوگ در روش کنترل رقمی استفاده شود، در سیستم خطا وارد خواهد شد، مگر آنکه باند خروجی حساسه کاملاً محدود شود. در بسیاری موارد، حساسه‌ها باند خروجی محدود شده‌ای ندارند. به همین دلیل، باید آهنگ نمونه‌برداری را طوری انتخاب کرد که مقدار انرژی ظاهر شده در سیگنال دارای خطا، ناچیز باشد.

تشدید سازه‌ای: تا اینجا موده‌های خمشی را در مشخصات دینامیکی بازوهای مکانیکی

ماهر در نظر نگرفته‌ایم. کلیه مکانیزمهای واقعی، دارای سختی محدودند، و به همین دلیل تحت تأثیر انواع ارتعاشها قرار می‌گیرند. اگر حذف این ارتعاشها لازم باشد (اغلب این کار لازم است)، آهنگ نمونه‌برداری باید دستکم دو برابر بسامد طبیعی این ارتعاشها باشد. در بخشهای بعدی این فصل، دوباره دربارهٔ تشدید بحث خواهیم کرد.

## ۹-۹ مدلسازی و کنترل یک مفصل تنها

در این بخش، مدلی ساده شده از یک مفصل لولایی تنها را در بازوی مکانیکی ماهر بررسی می‌کنیم. با در نظر گرفتن چند فرض، می‌توان روبات را به صورت یک سیستم خطی درجهٔ دوم، مدلسازی کرد. برای مطالعهٔ مدل دقیقتری از یک مفصل به‌کار افتاده (توسط کارانداز)، به مرجع [۵] رجوع کنید.

یکی از کاراندازهایی که غالباً در بسیاری از روباتهای صنعتی یافت می‌شود، موتور گشتاوری جریان مستقیم (DC) (شکل ۸-۱۸)، است. قسمت ساکن این موتور (استاتور)، از محفظه، یاتاقانها، و آهنرباهای دائم یا غیردائم، تشکیل می‌شود. آهنرباهای استاتور، در اطراف قسمت گردان موتور (روتور)، میدان مغناطیسی برقرار می‌کنند. روتور از یک محور و سیم‌پیجهایی تشکیل می‌شود که جریان یافتن الکتریسته در آنها، برای موتور ایجاد قدرت می‌کند. این جریان از طریق جاروبکهایی که با کموتاتور تماس دارند، به سیم‌پیجهای روتور هدایت می‌شود. کموتاتور طوری به سیم‌پیجهای گوناگون (که آنها را آرمیچر نیز می‌نامند) متصل شده است، که گشتاور همواره در جهت مورد نظر ایجاد می‌شود. اصل فیزیکی [۶] که باعث می‌شود به هنگام عبور جریان از سیم‌پیجهای روتور، در موتور گشتاور پدید آید، چنین بیان می‌شود

$$F = qV \times B \quad (۹-۶۲)$$

که در آن به بار الکتریکی  $q$ ، که با سرعت  $V$  در میدان مغناطیسی با شدت  $B$  حرکت می‌کند، نیروی  $F$  وارد می‌شود. بارهای الکتریکی، همان الکترونهای گذرنده از سیم‌پیجهای و میدان مغناطیسی، همان میدان برقرار شده به وسیلهٔ آهنرباهای استاتور است. در حالت کلی، قابلیت ایجاد گشتاور موتور را به وسیلهٔ ثابت گشتاور موتور بیان می‌کنند. ثابت گشتاور موتور، جریان آرمیچر را به صورت زیر به گشتاور خروجی مربوط می‌سازد

$$\tau_m = k_m i_a \quad (۹-۶۳)$$

هنگامی که موتوری در حال دوران است، مانند ژنراتور عمل می‌کند و در دوسر آرمیچر، اختلاف ولتاژ پدید می‌آورد. ثابت دومی در موتور تعریف می‌شود که آن را ثابت نیروی ضد محرکه می‌نامند.

این ثابت، ولتاژ ایجاد شده برای هر سرعت دورانی را چنین به دست می دهد

$$v = k_e \dot{\theta}_m \quad (۹-۶۴)$$

در حالت کلی، تغییر (سویچینگ) جریان در سیم پیچهای گوناگون توسط کموتاتور، باعث ایجاد مقداری پرش گشتاور در گشتاور تولید شده می شود. پدیده پرش را در بیشتر موارد می توان نادیده گرفت، اگر چه در برخی کاربردها، حائز اهمیت است. در هر حال، مدلسازی این پدیده بسیار دشوار است، و حتی اگر بتوان آن را مدلسازی کرد، جبران آن مشکل خواهد بود.

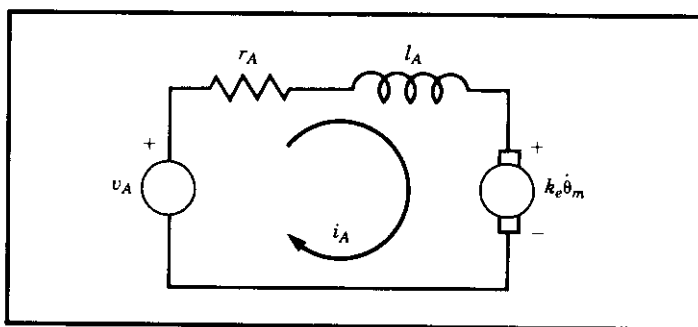
### اندوکتانس آرمیچر موتور

در شکل ۹-۱۱ مدار الکتریکی آرمیچر نشان داده شده است. اجزای اصلی این مدار عبارتند از منبع ولتاژ  $v_a$ ، اندوکتانس (خودالقای) سیم پیچ آرمیچر،  $l_a$ ، و نیروی ضد محرکه تولید شده،  $v$ . این مدار با معادله دیفرانسیلی از مرتبه اول، توصیف می شود

$$l_a \dot{i}_a + r_a i_a = v_a - k_e \dot{\theta}_m \quad (۹-۶۵)$$

در حالت کلی، می خواهیم گشتاور ایجاد شده به وسیله موتور (و نه سرعت آن) را به وسیله مدار رانش الکترونیکی، کنترل کنیم. این مدارهای رانش، جریان گذرنده از آرمیچر را حس کرده، ولتاژ منبع  $v_a$  را طوری تنظیم می کنند که جریان مطلوب  $i_a^*$  از آرمیچر عبور کند. چنین مداری را مدار رانش آمپلی فایر جریان می نامند [۷]. در این سیستمهای رانش جریان، آهنگ تغییر جریان آرمیچر، به وسیله اندوکتانس موتور،  $l_a$ ، و حد بالایی ولتاژ منبع،  $v_a$ ، محدود می شود. نتیجه خالص این عمل، آن است که بین جریان مورد نظر و گشتاور خروجی، یک فیلتر پایین گذران ایجاد می شود.

نخستین فرض ما برای ساده کردن مسئله، آن است که اندوکتانس موتور ناچیز و قابل صرف نظر کردن است. این فرض، در صورتی که بسامد طبیعی سیستم کنترل مدار بسته، در مقایسه با حد



شکل ۹-۱۱ مدار آرمیچر در موتور گشتاوری DC.

بسامد فیلتر پایین‌گذران موجود در مدار رانش، بسیار کوچک باشد، قابل قبول خواهد بود. اگر علاوه بر فرض فوق، از پدیده پرش گشتاور نیز صرف‌نظر کنیم، آنگاه خواهیم توانست فرمان گشتاور را مستقیماً اعمال کنیم. البته ممکن است ضریب مقیاس (مانند  $k_m$ ) در سیستم وارد شود، اما در اینجا فرض می‌کنیم کارانداز به صورت یک منبع خالص گشتاور که به طور مستقیم فرمان می‌گیرد، عمل می‌کند.

### لختی مؤثر

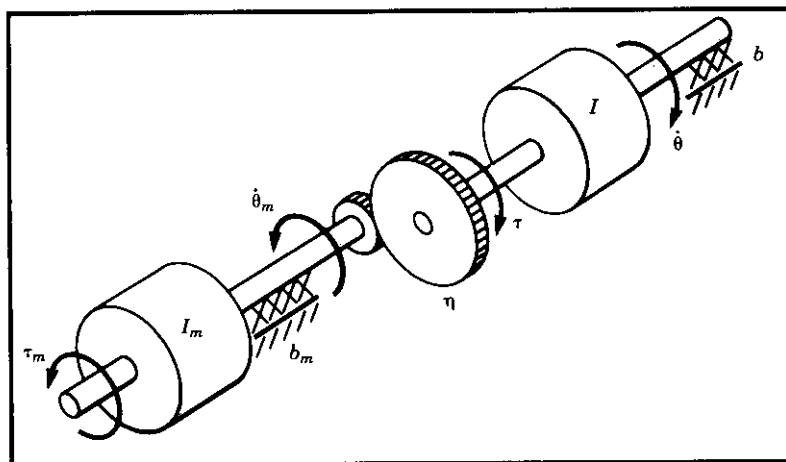
شکل ۹-۱۲، مدل مکانیکی روتور یک موتور گشتاوری DC را نشان می‌دهد که از طریق سیستم چرخنده کاهنده، به باری دارای لختی دورانی، متصل شده است. گشتاور اعمال شده به روتور،  $\tau_m$ ، با رابطه ۹-۶۳ به صورت تابعی از جریان  $i_a$  گذرنده از مدار آرمیچر داده شده است. نسبت چرخنده  $\eta$  باعث افزایش گشتاور در بار، و کاهش سرعت بار می‌شود. در نتیجه

$$\tau = \eta \tau_m$$

$$\dot{\theta} = (\frac{1}{\eta}) \dot{\theta}_m$$

که در آن  $\eta > 1$ . با نوشتن رابطه تعادل گشتاورها، گشتاور اعمال شده به روتور چنین به دست می‌آید

$$\tau_m = I_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + (\frac{1}{\eta})(I \ddot{\theta} + b \dot{\theta}) \quad (9-67)$$



شکل ۹-۱۲ مدل مکانیکی موتور گشتاوری DC متصل به بار لخت (به وسیله سیستم چرخنده).

که در آن  $I$  و  $I_m$  به ترتیب لختی روتور و بار، و  $b_m$  و  $b$  ضرایب اصطکاک ویسکوز در یاتاقانهای روتور و بار هستند. با استفاده از روابط (۹-۶۶)، می توان (۹-۶۷) را برحسب متغیرهای موتور چنین نوشت

$$\tau_m = \left( I_m + \frac{I}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_m + \left( b_m + \frac{b}{\eta^2} \right) \dot{\theta}_m \quad (9-68)$$

همین رابطه برحسب متغیرهای بار، چنین به دست می آید

$$\tau = (I + \eta^2 I_m) \ddot{\theta} + (b + \eta^2 b_m) \dot{\theta} \quad (9-69)$$

عبارت  $I + \eta^2 I_m$  را گاهی لختی مؤثر «دیده شده» در خروجی سیستم چرخنده می نامند. به همین ترتیب، عبارت  $b + \eta^2 b_m$  را می توان میرایی مؤثر خواند. توجه کنید که در مفصلی که سیستم چرخنده آن تعداد زیادی چرخنده دارد (یعنی در آن  $\eta \gg 1$ )، لختی روتور درصد بزرگی از لختی مؤثر کل را به خود اختصاص خواهد داد و به همین دلیل می توانیم لختی مؤثر را ثابت فرض کنیم. در فصل ۶ دیدیم که لختی  $I$  مربوط به یک مفصل از مکانیزم، در حقیقت با پیکربندی مکانیزم و بار وارد بر آن تغییر می کند. اما میزان این تغییرات، در روباتهای دارای تعداد زیادی چرخنده، نسبت به روباتهای رانش مستقیم ( $\eta = 1$ ) کمتر است. به منظور اطمینان از اینکه حرکت رابط روبات هرگز زیر میرا نمی شود، باید مقدار  $I$  را برابر با ماکزیمم مقدار ممکن برای آن در نظر گرفت. این مقدار ماکزیمم را  $I_{max}$  می نامیم. انتخاب  $I_{max}$  باعث می شود سیستم در کلیه وضعیتها میرایی بحرانی یا فوق میرایی داشته باشد. در فصل ۱۰، مستقیماً با لختی متغیر کار خواهیم کرد و نیازی به این فرض نخواهیم داشت.

#### ■ مثال ۹-۶

اگر لختی ظاهری رابط  $I$ ، بین  $2 \text{ Kg.m}^2$  و  $6 \text{ Kg.m}^2$  تغییر کند، لختی روتور  $I_m = 0.1^\circ \text{ Kg.m}^2$  و نسبت چرخنده نیز  $\eta = 3^\circ$  است. مقادیر مینیمم و ماکزیمم لختی مؤثر چقدر است؟

لختی مؤثر مینیمم عبارت است از

$$I_{min} + \eta^2 I_m = 2^\circ + (900)(0.1^\circ) = 111^\circ \quad (9-70)$$

و لختی ماکزیمم نیز چنین است

$$I_{max} + \eta^2 I_m = 6^\circ + (900)(0.1^\circ) = 156^\circ \quad (9-71)$$

بدین ترتیب، می‌بینیم که با استفاده از سیستم چرخنده‌ای، تغییرات لختی به صورت درصدی از لختی مؤثر کل، کاهش می‌یابد.

### اجزای انعطاف‌پذیر مدلسازی نشده

فرض مهم دیگری در مدلسازی سیستم، آن بود که سیستم چرخنده، محورها، یاتاقانها، و رابط رانده‌شده، انعطاف‌پذیر نیستند. در عمل، کلیه این اجزا سختی محدود دارند، و انعطاف‌پذیری آنها، در صورت مدلسازی، درجه سیستم را افزایش خواهد داد. دلیل صرف نظر کردن از انعطاف‌پذیری این اجزا، آن است که اگر سیستم به اندازه کافی سخت باشد، آن‌گاه بسامدهای طبیعی این تشدیدهای مدلسازی نشده بسیار بالاست، و تأثیر آنها در مقایسه با تأثیر قطبهای غالب درجه دومی که مدلسازی شده‌اند، قابل چشم‌پوشی خواهد بود.<sup>۱</sup> اصطلاح «مدلسازی نشده» به معنای آن است که برای ساده شدن تحلیل و طراحی سیستم کنترل، از اثرات فوق چشم‌پوشی کرده، معادله دینامیکی ساده‌تری مانند (۹-۶۹) را به کار می‌گیریم.

چون تصمیم گرفته‌ایم انعطاف‌پذیریهای سازه‌ای را در سیستم وارد نکنیم، باید بسیار احتیاط کنیم تا تشدیدهای مربوط به آنها تحریک نشود. قاعده‌ای ساده برای این کار [۸] آن است که اگر کوچکترین تشدید سازه‌ای  $\omega_{res}$  باشد، آن‌گاه بسامد طبیعی سیستم مدار بسته باید در نامساوی زیر صدق کند

$$\omega_n \leq \frac{1}{4} \omega_{res} \quad (۷۲-۹)$$

این نامساوی، راهنمایی برای انتخاب بهره‌های کنترل‌کننده خواهد بود. قبلاً دیدیم که افزایش بهره، باعث سریع‌تر شدن پاسخ و کاهش خطای حالت پایا می‌شود. اما حال می‌بینیم که تشدیدهای مدلسازی نشده، مقدار بهره را محدود می‌سازند. روباتهای صنعتی معمولی، تشدیدهای سازه‌ای بین ۵Hz تا ۲۵Hz دارند [۸]. در طرحهای اخیر که از سیستم رانش مستقیم استفاده می‌کنند، و شامل انعطاف‌پذیری ناشی از سیستم چرخنده‌ای نیستند، کوچکترین مقدار تشدید سازه‌ای تا ۷۰ Hz بالا رفته است [۹].

### ■ مثال ۷-۹

سیستم نشان داده شده در شکل ۹-۶ را با پارامترهای  $m = ۱$ ،  $b = ۱$ ، و  $k = ۱$  در نظر بگیرید. می‌دانیم که پایتترین تشدید مدلسازی نشده این سیستم، در  $۸ \text{ rad/s}$  رخ می‌دهد. مقادیر  $\alpha$ ،  $\beta$ ، و بهره‌های  $k_p$  و  $k_v$  را برای قانون کنترل مکان پیداکنید که سیستم میرایی بحرانی داشته

۱. همین استدلال را برای صرف نظر کردن از قطب حاصل از اندوکنانس موتور به کار ببریم. در نظر گرفتن این قطب نیز باعث بالا رفتن درجه کل سیستم می‌شد.



باشد، تشدیدهای مدلسازی نشده را تحریک نکند، و سختی مدار بسته آن بالاترین میزان ممکن باشد.

مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را چنین انتخاب می‌کنیم

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ \beta &= \dot{x} + x\end{aligned}\quad (۷۳-۹)$$

به طوری که سیستم در مقابل ورودی فرضی  $f'$ ، به صورت جرم واحد ظاهر شود. با استفاده از قاعده ساده (۷۲-۹)، بسامد طبیعی مدار بسته را  $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$  اختیار می‌کنیم. با توجه به روابط (۱۸-۹) و (۴۶-۹)،  $k_p = \omega_n^2$ ، و در نتیجه

$$\begin{aligned}k_p &= 16 \text{ }^\circ \\ k_v &= 8 \text{ }^\circ\end{aligned}\quad (۷۴-۹)$$

■

#### برآورد بسامد تشدید

همان منابع انعطاف‌پذیری سازه‌ای که در فصل ۸ بررسی شدند، تشدید ایجاد می‌کنند. هر بار که یک منبع انعطاف‌پذیری سازه‌ای شناسایی شود، می‌توان تحلیلی تقریبی از ارتعاشهای حاصل از آن به عمل آورد. البته این کار در صورتی عملی خواهد بود که جرم یا لختی مؤثر جزء انعطاف‌پذیر را بتوان به دست آورد. برای تعیین بسامد ارتعاشهای حاصل، سیستم را به صورت سیستم جرم-فنر ساده در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب، بسامد طبیعی با توجه به رابطه (۲۰-۹)، چنین خواهد بود

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (۷۵-۹)$$

که در آن  $k$  ضریب سختی عضو انعطاف‌پذیر، و  $m$  جرم معادل جابه‌جا شده در هنگام ارتعاش است.

#### ■ مثال ۸-۹

محوری بدون جرم با سختی  $40^\circ \text{ N.m/rad}$ ، لختی دورانی با اندازه  $1 \text{ Kg.m}^2$  را می‌راند. اگر از سختی محور در مدلسازی سیستم چشم‌پوشی شود، بسامد این تشدید مدلسازی نشده چقدر خواهد بود؟

با استفاده از (۷۵-۹) داریم

$$\omega_{res} = \sqrt{40^\circ/1} = 2^\circ \text{ rad/s} = 2^\circ/(2\pi) \text{ Hz} \cong 3.2 \text{ Hz} \quad (۷۶-۹)$$

■

در مرجع [۱۰]، برای برآورد اولیه پایتترین بسامد تشدید در تیرها و محورها، استفاده از مدل متمرکز برای جرم پیشنهاد شده است. روابط تخمین سختی در انتهای تیرها و محورها را می‌دانیم و این مدل‌های متمرکز نیز جرم یا لختی مؤثر مورد نیاز برای برآورد بسامد تشدید را فراهم می‌سازند. شکل ۹-۱۳، نتایج حاصل از تحلیل انرژی [۱۰] را برای یک تیر و یک محور نشان می‌دهد. چنانکه مشاهده می‌شود، تیری به جرم  $m$  را می‌توان با جرمی نقطه‌ای به اندازه  $0.23m$  در انتهای تیر جایگزین کرد. به همین ترتیب، به جای لختی گسترده  $I$ ، می‌توان لختی متمرکز  $0.33I$  را در انتهای محور قرار داد.

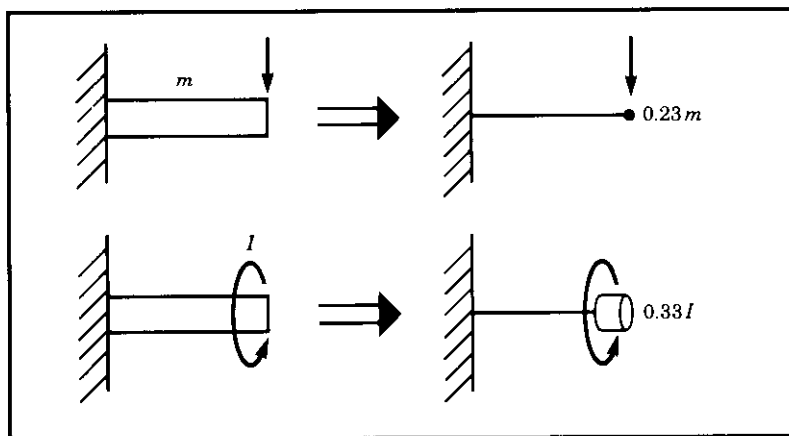
#### ■ مثال ۹-۹

رابطی به جرم  $4/347 \text{ Kg}$ ، دارای سختی جانبی انتهایی  $3600 \text{ N/m}$  است. با فرض اینکه سیستم رانش کاملاً صلب است، بسامد تشدید حاصل از انعطاف‌پذیری رابط، در بهره‌های کنترلی محدودیت ایجاد خواهد کرد. مقدار  $\omega_{res}$  را به دست آورید.

جرم  $4/347 \text{ Kg}$  در طول رابط گسترده است. با استفاده از روش به کار رفته در شکل ۹-۱۳، جرم مؤثر برابر با  $1/0 \text{ Kg}$   $(4/347)(0.23) \cong$  به دست می‌آید. پس بسامد تشدید چنین است

$$\omega_{res} = \sqrt{3600/1/0} = 60 \text{ rad/s} = 60/(2\pi) \text{ Hz} \cong 9.6 \text{ Hz} \quad (9-77)$$

اگر بخواهیم پهنای باندهای مدار بسته، از آنچه در رابطه (۹-۷۵) داده شده است، بیشتر باشد، باید در مدل سیستم به کار رفته برای طراحی قانون کنترل، انعطاف‌پذیری اجزای سازه‌ای را در



شکل ۹-۱۳ مدل‌های متمرکز به کار رفته در تیرها برای برآورد پایتترین تشدید ارتعاشهای جانبی و پیچشی.

نظر بگیریم. مدل‌های سیستم، در این حالت درجهٔ بالاتری خواهند داشت، و روش‌های کنترل به‌کار رفته برای آنها، پیچیده‌ترند. این روش‌های کنترل، فعلاً در روبات‌های صنعتی به‌کار نمی‌روند، اما یک زمینهٔ تحقیقاتی فعال را تشکیل می‌دهند [۱۲، ۱۱]. ■

### کنترل یک مفصل تنها

به‌طور خلاصه، می‌توان سه فرض زیر را در نظر گرفت:

۱. از اندوکتانس موتور،  $I_a$ ، صرف‌نظر می‌کنیم.
  ۲. با در نظر گرفتن سیستم چرخنده‌ای با تعداد دندهٔ زیاد، لختی مؤثر را ثابت و برابر با  $I_{max} + \eta^2 I_m$  مدل‌سازی می‌کنیم.
  ۳. از اجزای سازه‌ای انعطاف‌پذیر صرف‌نظر می‌کنیم و، تنها از پایین‌ترین بسامد تشدید،  $\omega_{res}$ ، برای تعیین بهره‌های سرو استفاده خواهیم کرد.
- با توجه به این فرض‌ها، می‌توان یک مفصل تنها از بازوی مکانیکی ماهر را با کنترل‌کنندهٔ تقسیم شده‌ای با مشخصات زیر، کنترل کرد

$$\alpha = I_{max} + \eta^2 I_m \quad (۷۸-۹)$$

$$\beta = b + \eta^2 b_m$$

و

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (۷۹-۹)$$

معادلهٔ دینامیکی مدار بسته برای سیستم حاصل، چنین است

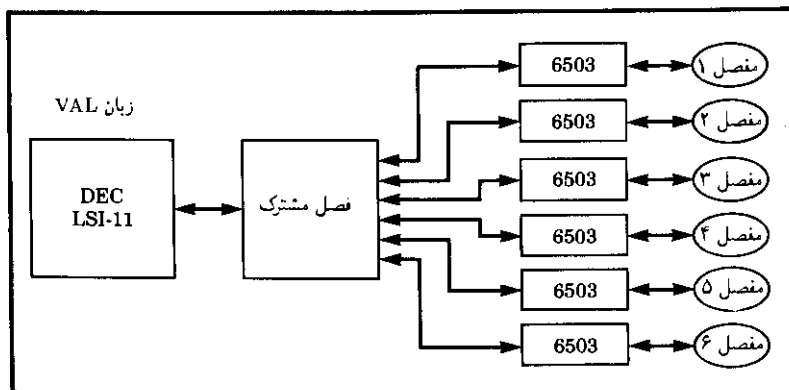
$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = \tau_{dist} \quad (۸۰-۹)$$

در معادلهٔ فوق، بهره‌ها چنین انتخاب می‌شوند

$$\begin{aligned} k_p &= \omega_n^2 = \frac{1}{\xi} \omega_{res}^2 \\ k_v &= 2\sqrt{k_p} = \omega_{res} \end{aligned} \quad (۸۱-۹)$$

## ۹-۱۰ ساختمان کنترل‌کنندهٔ یک روبات صنعتی

در این بخش، ساختمان سیستم کنترل به‌کار رفته در روبات صنعتی پیوما ۵۶۰ را به‌طور مختصر بررسی خواهیم کرد. چنانکه در شکل ۹-۱۴ دیده می‌شود، ساختمان سخت‌افزاری این سیستم،



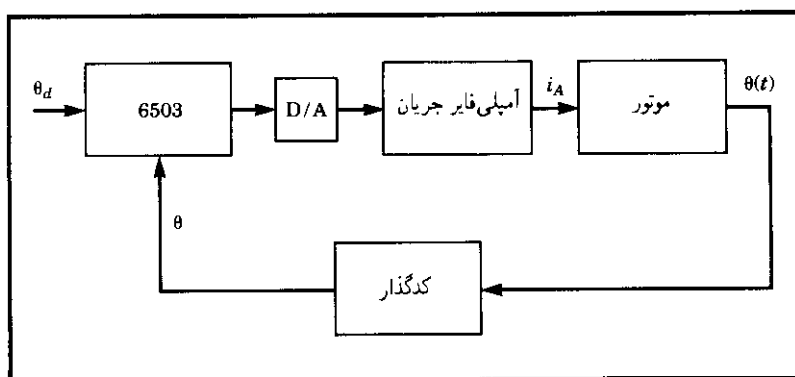
شکل ۹-۱۴ ساختمان کامپیوتری سیستم کنترل روبات پیوما ۵۶۰.

شامل دو سطح مجزا است: یک کامپیوتر ۱۱-DECLSI که نقش کامپیوتر کنترل کننده «اصلی» را دارد و به شش ریز پردازنده راکول ۱۶۵۰۳ فرمان می‌دهد. هر یک از این ریز پردازنده‌ها، یک مفصل را با یک قانون کنترل PID (شبه به آنچه در این فصل دیدیم) کنترل می‌کند. هر مفصل پیوما ۵۶۰ به یک کدگذار نوری با گردش پله‌ای مجهز است. این کدگذارها به یک شمارنده صعودی/نزولی متصل‌اند. ریز پردازنده با خواندن شمارشها، می‌تواند مکان مفصل را پیدا کند. در پیوما ۵۶۰ از دورسنج استفاده نشده است، و در عوض سرعت مفصل با به‌دست آوردن تفاضل مکانهای مفصل در چرخه‌های سرّوی متوالی، تخمین زده می‌شود. به منظور اعمال فرمان گشتاور به موتور گشتاوری DC، ریز پردازنده را به یک مبدل رقمی (دیجیتال) به آنالوگ متصل می‌کنند، تا بدین ترتیب، جریانهای موتور به‌صورت فرمان به مدارهای رانش جریان فرستاده شود. جریان گذرنده از موتور، در مداربندی آنالوگ با تنظیم ولتاژ دو سر آرمیچر برای حفظ جریان آرمیچر مورد نظر، کنترل می‌شود. در شکل ۹-۱۵، نمودار بلوکی سیستم کنترل مفصل در پیوما ۵۶۰ نشان داده شده است.

کامپیوتر LSI-۱۱ در هر ۲۸ میلی‌ثانیه، یک فرمان مکان، یا نقطه تنظیم جدید به ریز پردازنده‌های مفصلها می‌فرستد. این ریز پردازنده‌ها بر اساس چرخه‌ای ۸۷۵/۰ میلی‌ثانیه‌ای کار می‌کنند. در این مدت، آنها نقطه تنظیم مکان مورد نظر را تعیین، و خطای سرّو و قانون کنترل PID را محاسبه می‌کنند، سپس مقدار جذبی از گشتاور را به موتورهای الکتریکی فرمان می‌دهند. کامپیوتر LSI-۱۱ کلیه عملیات «سطح بالا» را برای کل سیستم کنترل انجام می‌دهد. در درجه اول، این کامپیوتر دستورهای برنامه VAL (زبان برنامه‌ریزی روبات پیوما) را یکی پس از

1. Rockwell 6503

۲. تکنولوژی این کامپیوترهای ساده ۸ بیتی، اکنون قدیمی به‌شمار می‌رود. در حال حاضر روباتهای بسیاری از ریز پردازنده‌های ۳۲ بیتی (مانند موتورولا 68020) استفاده می‌کنند.



شکل ۹-۱۵ نمودار بلوکی سیستم کنترل مفصل در روبات پیوما ۵۶۰.

دیگری اجرا می‌کند. پس از آنکه فرمان حرکت تعبیر شد، کامپیوتر LSI-۱۱ باید محاسبات مربوط به معادلات سینماتیکی و ارون را انجام دهد، مسیر مورد نظر را طرح کند، و نقاط بینابینی مسیر را هر ۲۸ میلی‌ثانیه یکبار، برای کنترل‌کننده‌های مفصلها تعیین کند.

کامپیوتر LSI-۱۱ را می‌توان به وسایل جانبی مانند ترمینال و دیسک‌خوان نیز متصل کرد. علاوه بر دستگاههای جانبی، کامپیوتر به یک جعبه آموزش نیز متصل می‌شود. جعبه آموزش، وسیله‌ای است که در دست استفاده‌کننده قرار می‌گیرد و با فشار دادن دگمه‌های آن، می‌توان روبات را به صورتهای گوناگون به حرکت در آورد. مثلاً، در سیستم پیوما ۵۶۰، استفاده‌کننده به کمک این جعبه می‌تواند روبات را در دستگاه مختصات مفصل، یا در دستگاه مختصات دکارتی، حرکت دهد. در این حالت، با فشار دادن دگمه‌های جعبه آموزش، می‌توان مسیری را محاسبه کرد و فرمان آن را به ریزپردازنده‌های کنترل مفصلی فرستاد.

## مراجع

- [1] W. Boyce and R. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, 3rd edition, John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [2] E. Purcell, *Calculus with Analytic Geometry*, Meredith Corporation, New York, 1972.
- [3] G. Franklin and J. D. Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
- [4] G. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.

- [5] J. Luh, "Conventional Controller Design for Industrial Robots—a Tutorial," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-13, No. 3, June 1983.
- [6] D. Halliday and R. Resnik, *Fundamentals of Physics*, Wiley, 1970.
- [7] Y. Koren and A. Ulsoy, "Control of DC Servo-Motor Driven Robots," *Proceedings of Robots 6 Conference*, SME, Detroit, March 1982.
- [8] R.P. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, 1981.
- [9] H. Asada and K. Youcef-Toumi, *Direct-Drive Robots-Theory and Practice*, MIT Press, 1987.
- [10] J. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.
- [11] W. Book, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, 1984.
- [12] R. Cannon and E. Schmitz, "Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One Link Robot," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, 1984.

### تمرینها

۱-۹ [۲۰] در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، با ریشه‌های مختلط زیر

$$s_1 = \lambda + \mu i$$

$$s_2 = \lambda - \mu i$$

نشان دهید که جواب عمومی

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

۲-۹ [۱۳] حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ را در صورتی که پارامترهای آن  $m = ۲$ ,  $b = ۴$ , و  $k$  باشد و جسم (که ابتدا ساکن است) از مکان  $x = ۱$  رها شود، تعیین کنید.

۳-۹ [۱۳] حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ را در صورتی که پارامترهای آن  $m = ۱$ ,  $b = ۲$ , و  $k = ۱$  باشد و جسم (که ابتدا ساکن است) از مکان  $x = ۴$  رها شده باشد، تعیین کنید.

۴-۹ [۱۳] حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ را در صورتی که پارامترهای آن  $m = ۱$ ,  $b = ۴$ , و  $k = ۵$  باشد و جسم (که ابتدا ساکن است) از مکان  $x = ۲$  رها شود، تعیین کنید.

۵-۹ [۱۵] حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ را در صورتی که پارامترهای آن  $m = ۱$ ,  $b = ۷$ , و  $k = ۱۰$  باشد و حرکت از مکان  $x = ۱$ ، با سرعت اولیه  $\dot{x} = ۲$  آغاز شود، تعیین کنید.

۶-۹ [۱۵] با استفاده از عنصر (۱، ۱) در رابطه (۶-۶۰)، تغییرات لختی «دیده شده» توسط مفصل ۱ از این روبات را در حین تغییر پیکربندی آن، به صورت درصدی از لختی ماکزیم، به دست آورید. مقادیر عددی زیر را در نظر بگیرید

$$l_1 = l_2 = ۰٫۵\text{m}$$

$$m_1 = ۴٫۰\text{Kg}$$

$$m_2 = ۲٫۰\text{Kg}$$

توجه داشته باشید که روبات، رانش مستقیم دارد و می توان از لختی روتور صرف نظر کرد.

۷-۹ [۱۷] تمرین ۶-۹ را برای روباتی با رانش چرخنده ای و لختی روتوری برابر با  $I_m = ۰٫۰۱\text{ Kg.m}^2$  تکرار کنید.  $\eta$  را برابر با  $۲۰$  در نظر بگیرید.

۸-۹ [۱۸] در سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۹، پارامترها را  $m = ۱$ ,  $b = ۴$ , و  $k = ۵$  در نظر بگیرید. این سیستم دارای بسامد تشدید مدلسازی نشده ای برابر با  $\omega_{res} = ۶٫۰\text{ rad/s}$  بهره های  $k_v$  و  $k_p$  لازم برای ایجاد میرایی بحرانی در این سیستم را، در بالاترین سختی معقول، تعیین کنید.

۹-۹ [۲۵] در سیستمی بار لختی،  $I$ ، بین  $۴\text{ Kg.m}^2$  و  $۵\text{ Kg.m}^2$  تغییر می نماید. لختی روتور  $I_m = ۰٫۰۱\text{ Kg.m}^2$ ، و نسبت چرخنده  $\eta = ۱۰$  است. سیستم در بسامدهای  $۸٫۰$ ،  $۱۲٫۰$ ، و  $۲۰٫۰$  رادیان بر ثانیه، تشدیدهای مدلسازی نشده دارد. مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را برای کنترل کننده تقسیم شده تعیین کنید، و مقادیر  $k_p$  و  $k_v$  را طوری به دست آورید که سیستم هرگز زیرمیرا نشود، و تشدیدهای آن نیز هرگز تحریک نشوند، اما بالاترین سختی

ممکن را دارا باشد.

۱۰-۹ [۱۸] طراحی یک روبات با رانش مستقیم، احتمال می‌دهد که تشدید ناشی از انعطاف‌پذیری خود رابط (که به صورت تیر در نظر گرفته می‌شود)، دلیل ایجاد پایتترین تشدید مدلسازی نشده باشد. اگر سطح مقطع رابط تقریباً مربع شکل با ابعاد  $5 \times 5 \times 5$  cm، ضخامت دیواره رابط ۱ cm، و جرم کل رابط ۵ Kg باشد، مقدار  $\omega_{res}$  را تخمین بزنید.

۱۱-۹ [۱۵] رابط روباتی با رانش مستقیم، به وسیله محوری با سختی پیچشی  $1000 \text{ N.m/rad}$  رانده می‌شود. لختی رابط  $1 \text{ Kg.m}^2$  است. اگر جرم محور ناچیز باشد،  $\omega_{res}$  چقدر خواهد بود؟

۱۲-۹ [۱۸] محوری با سختی پیچشی  $500 \text{ N.m/rad}$ ، چرخنده ورودی یک زوج چرخنده صلب با  $\eta = 8$  را می‌راند. چرخنده خروجی، رابطی صلب با لختی  $1 \text{ Kg.m}^2$  را حرکت می‌دهد. مقدار  $\omega_{res}$  ایجاد شده بر اثر انعطاف‌پذیری محور را به دست آورید.

۱۳-۹ [۲۵] محوری با سختی پیچشی  $500 \text{ N.m/rad}$ ، چرخنده ورودی یک زوج چرخنده صلب با  $\eta = 8$  را می‌راند. لختی محور  $1 \text{ Kg.m}^2$  است. چرخنده خروجی، رابطی صلب با لختی  $1 \text{ Kg.m}^2$  را حرکت می‌دهد. مقدار  $\omega_{res}$  ایجاد شده بر اثر انعطاف‌پذیری محور را به دست آورید.

۱۴-۹ [۲۸] بار لختی  $I$  بین  $4 \text{ Kg.m}^2$  و  $5 \text{ Kg.m}^2$  تغییر می‌کند. لختی روتور  $I_m = 0.1 \text{ Kg.m}^2$  و نسبت چرخنده  $\eta = 10$  است. در سیستم به سبب سختی انتهایی رابط به مقدار  $4900 \text{ N/m}$ ، یک تشدید مدلسازی نشده پدید آمده است. مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را برای کنترل‌کننده تقسیم شده تعیین کنید، و مقادیر  $K_v$  و  $K_p$  را طوری به دست آورید که سیستم هرگز زیرمیرا نشود، و نیز در عین حال که بیشترین سختی ممکن را داراست، تشدیدهای مدلسازی نشده آن هرگز تحریک نشوند.

۱۵-۹ [۲۵] محوری فولادی به طول ۳۰ cm و قطر ۰/۲ cm، چرخنده ورودی یک سیستم کاهش سرعت با  $\eta = 8$  را می‌راند. چرخنده صلب خروجی این سیستم، محوری فولادی به طول ۳۰ cm و قطر ۰/۲ cm را به حرکت در می‌آورد. گستره بسامدهای تشدید را که در هنگام تغییر لختی بار بین  $1 \text{ Kg.m}^2$  و  $4 \text{ Kg.m}^2$ ، مشاهده می‌شوند، تعیین کنید.

### تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۹)

می‌خواهیم برای روبات صفحه‌ای با سه رابط، یک سیستم کنترل تعقیب مسیر ساده را شبیه‌سازی کنیم. این سیستم کنترل به صورت یک قانون کنترل مستقل PD (تناسبی و مشتقی) در هر مفصل عمل خواهد کرد. بهره‌های سُر را طوری بیابید که در مفصلهای ۱، ۲، و ۳ ضریب سختی مدار بسته به ترتیب برابر با  $175/0$ ،  $110/0$ ، و  $20/0$  شود. سعی کنید حالت میرایی بحرانی را به طور تقریبی ایجاد کنید.



### تمرینها ۳۶۷

از زیر برنامه شبیه سازی UPDATE برای شبیه سازی یک سیستم سرو با زمان ناپیوسته که با بسامد  $100\text{ Hz}$  کار می کند، استفاده کنید. به عبارت دیگر، قانون کنترل را در  $100\text{ Hz}$ ، و نه در بسامد انتگرالگیری عددی، محاسبه کنید. سیستم کنترل خود را در حالت های زیر بیازمایید:

۱. بازو را در  $\Theta = (60, -110, 20)$  قرار داده، به آن فرمان دهید تا زمان  $time = 370$  در این حالت باقی بماند. بلافاصله پس از پایان این مدت، نقاط تنظیم باید به  $\Theta = (60, -50, 20)$  تغییر داده شوند. به عبارت دیگر، به مفصل ۲، یک ورودی پله ای  $60$  درجه بدهید. برای هر مفصل، مقادیر خطا را برحسب زمان ثبت کنید.

۲. با اعمال کنترل، بازو را وادار سازید که مسیر درجه سوم مشخص شده در تمرین برنامه نویسی (قسمت ۷) را دنبال کند. مقادیر خطا را برحسب زمان ثبت کند.



## کنترل غیرخطی بازوهای مکانیکی ماهر

### ۱-۱۰ مقدمه

در فصل پیش، با چند تقریب توانستیم مسئله کنترل بازوی مکانیکی ماهر را به صورتی خطی تحلیل کنیم. مهمترین این تقریبات عبارت بودند از مستقل در نظر گرفتن هر مفصل، و ثابت فرض کردن لختی «دیده شده» به وسیله هر کارانداز مفصل. چنانکه در عملکرد کنترل کننده های خطی در فصل پیش دیدیم، این تقریب باعث ایجاد میرایی غیر یکنواخت در سراسر فضای کاری، و سایر آثار نامطلوب می شود. در این فصل، روش کنترل پیشرفته تری را معرفی می کنیم که در آن نیازی به فرضهای فوق نیست.

در فصل ۹، بازوی مکانیکی ماهر را به وسیله  $n$  معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مستقل، مدل سازی کردیم. در این فصل، کنترل کننده را مستقیماً بر اساس معادله های دیفرانسیل غیرخطی برداری  $n \times 1$ ، که در فصل ۶ برای بازوی مکانیکی ماهر در حالت کلی به دست آوردیم، طراحی می کنیم. چون نظریه کنترل غیرخطی بسیار گسترده است، به ناچار تنها یک یا دو روش را که برای بازوهای مکانیکی ماهر مناسب به نظر می رسند، مورد توجه قرار می دهیم. اصلترین روش در این فصل، روش گشتاور محاسبه شده است. ظاهراً این روش برای نخستین بار در مرجع [۱] پیشنهاد و در مراجع [۲، ۳] نامگذاری شده است. روش لیاپونوف برای تحلیل پایداری سیستمهای غیرخطی را نیز معرفی می کنیم [۴].

برای آغاز بحث روشهای کنترل غیرخطی در بازوی مکانیکی ماهر، مجدداً سیستم اصطکاکی بسیار ساده جرم فنر با یک درجه آزادی را در نظر می گیریم.

## ۱۰-۲ سیستمهای غیرخطی و متغیر با زمان

در فصل پیش، برای سیستم نشان داده شده در شکل ۹-۶، یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به دست آوردیم. این صورت ریاضی بدین دلیل حاصل شد که ما سیستم جرم-فنر دارای اصطکاک را به صورت یک سیستم خطی نامتغیر با زمان مدل سازی کردیم. حل معادله های سیستمهایی که پارامترهای آنها با زمان تغییر می کنند، یا سیستمهایی که ذاتاً غیرخطی اند، دشوارتر است.

اگر خواص غیرخطی در سیستم شدید نباشند، می توان از خطی سازی موضعی برای به دست آوردن مدلهای خطی، که تقریبهایی از معادلات غیرخطی در همسایگی یک نقطه عمل هستند، استفاده کرد. متأسفانه این رهیافت، برای کنترل بازوهای مکانیکی ماهر مناسب نیست، زیرا این بازوها پیوسته در نواحی جداگانه فضای کاری خود در حال حرکت اند، به طوری که هیچ خطی سازی معتبری را برای کلیه نواحی فوق نمی توان یافت.

رهیافت دیگر، حرکت دادن نقطه عمل با بازوی مکانیکی ماهر، و خطی سازی دائم حول مکان مطلوب بازوست. نتیجه این نوع خطی سازی متحرک، سیستمی خطی، اما متغیر با زمان، خواهد بود. اگرچه این خطی سازی شبه استاتیکی سیستم اصلی در برخی روشهای تحلیل و طراحی سودمند است، ولی ما در طراحی قانون کنترل خود از آن استفاده نخواهیم کرد، و به جای آن مستقیماً معادله های دیفرانسیل غیرخطی حرکت را، بدون تکیه بر خطی سازی، در کنترل کننده به کار خواهیم گرفت.

اگر فنر سیستم شکل ۹-۶ خطی نبوده، عامل غیرخطی داشته باشد، می توانیم سیستم را شبه استاتیکی در نظر بگیریم و در هر لحظه محل قطبهای آن را تعیین کنیم. با انجام این عمل، می بینیم که قطبها در صفحه مختلط، به صورت تابعی از مکان جسم، «حرکت» می کنند. بدین ترتیب، نمی توان بهره های ثابتی برای قرار دادن قطبها در وضعیت مورد نظر (مثلاً میرایی بحرانی)، به دست آورد. به همین دلیل، قانون کنترل پیچیده تری را مورد توجه قرار می دهیم که در آن بهره ها متغیر با زمان باشند، به گونه ای که سیستم همواره در حالت میرایی بحرانی قرار گیرد (بهره ها در واقع تابعی از مکان جسم اند). در این قانون کنترل، محاسبه  $k_p$  طوری انجام می شود که عامل غیرخطی فنر، به وسیله عبارتی غیرخطی در قانون کنترل خنثی شود، و در نتیجه سختی کل فنر در کلیه لحظه ها ثابت بماند. چنین روش کنترلی را می توان قانون کنترل خطی کننده نامید، زیرا در آن از عبارت کنترلی غیرخطی برای «خنثی کردن» عامل غیرخطی در سیستم، به طوری که سیستم مدار بسته در حالت کلی خطی باشد، استفاده شده است.

حال به قانون کنترل تقسیم شده (که در فصل ۸ به آن اشاره شد) باز می گردیم، و خواهیم دید که این قانون می تواند تابع خطی کننده مورد نظر ما را فراهم سازد. در اینجا در روش کنترل تقسیم شده، قانون سرو همانند قبل باقی می ماند، اما قسمت وابسته به مدل، به مدلی غیرخطی تبدیل می شود. بدین ترتیب، قسمت وابسته به مدل کنترل، شامل تابعی خطی کننده خواهد بود.

این مطلب در مثال زیر بهتر نشان داده شده است.

### ■ مثال ۱-۱۰

منحنی مشخصه فنر غیرخطی را که در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. نیروی این فنر، به صورت خطی  $f = kx$ ، نیست، و با معادله  $f = qx^3$  بیان می‌شود. اگر این فنر، جزئی از سیستم فیزیکی شکل ۹-۶ باشد، قانون کنترلی به دست آورید که این سیستم را همواره در حالت میرایی بحرانی با ضریب سختی  $k_{CL}$  نگه‌دارد. معادله دیفرانسیل سیستم مدار باز چنین است

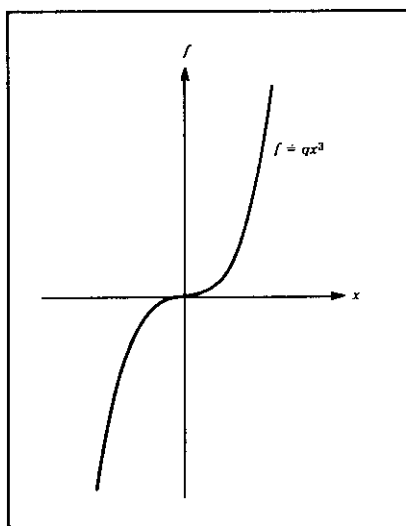
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + qx^3 = f \quad (۱-۱۰)$$

قسمت وابسته به مدل قانون کنترل عبارت است از  $f = \alpha f' + \beta$ ، که در آن

$$\begin{aligned} \alpha &= m \\ \beta &= b\dot{x} + qx^3 \end{aligned} \quad (۲-۱۰)$$

و قسمت سروی قانون کنترل نیز مطابق معمول چنین است

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (۳-۱۰)$$

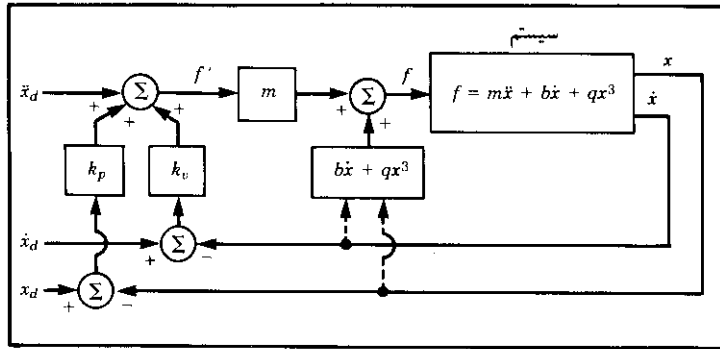


شکل ۱-۱۰ منحنی مشخصه نیرو برحسب تغییر طول برای یک فنر غیرخطی.

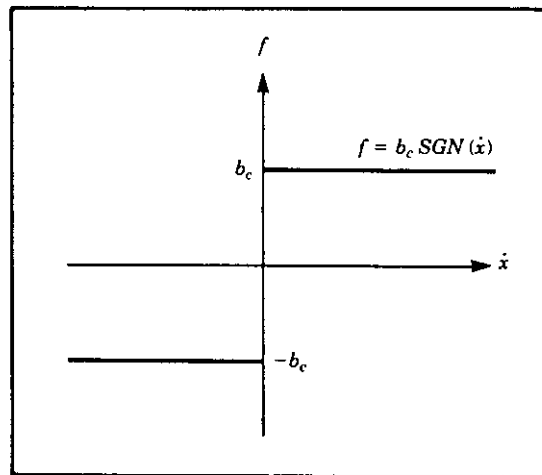
که در آن بهره‌ها با دانستن مشخصات عملکرد مطلوب، محاسبه می‌شوند. شکل ۲-۱۰ نمودار بلوکی این سیستم کنترل را نشان می‌دهد. سیستم مدار بسته حاصل، محل قطبها را (در صفحه مختلط)، ثابت نگه می‌دارد. ■

■ مثال ۲-۱۰

شکل ۳-۱۰ مشخصه غیرخطی اصطکاک خشک را که با معادله  $f = b_c \operatorname{sgn}(\dot{x})$  بیان می‌شود (در مقایسه با اصطکاک خطی که با  $f = b\dot{x}$  توصیف می‌شود)، نشان می‌دهد. در



شکل ۲-۱۰ سیستم کنترل غیرخطی برای سیستمی با فنر غیرخطی.



شکل ۳-۱۰ منحنی مشخصه نیروی اصطکاک خشک بر حسب سرعت.

بسیاری از روباتهای امروزی، اصطکاک بین مفصل و یاتاقان آن (یاتاقان لولایی یا کشویی)، با این مشخصه غیرخطی دقیقتر از مدل خطی مدلسازی می‌شود. اگر در سیستم شکل ۹-۶ این نوع اصطکاک برقرار باشد، سیستم کنترلی طراحی کنید که با استفاده از یک قسمت وابسته به مدل، سیستم را همواره در حالت میرایی بحرانی نگه‌دارد. معادله دیفرانسیل مدار باز سیستم چنین است

$$m\ddot{x} + b_c \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = f \quad (۱۰-۴)$$

قانون کنترل تقسیم شده، عبارت است از  $f = \alpha f' + \beta$  که در آن

$$\alpha = m$$

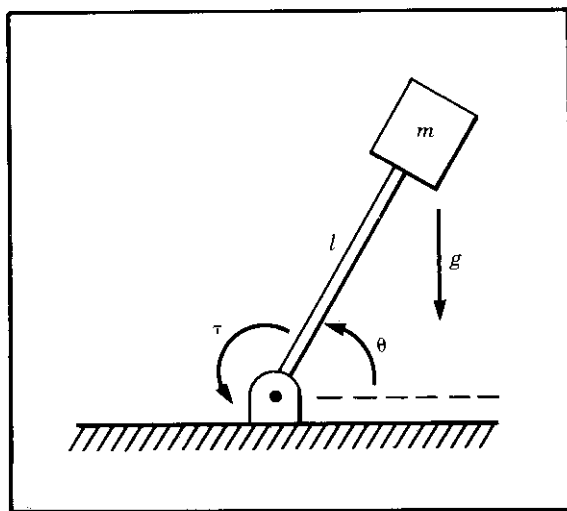
$$\beta = b_c \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx \quad (۱۰-۵)$$

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

■ در این روابط، بهره‌ها با استفاده از مشخصات عملکرد مطلوب، محاسبه می‌شوند.

#### ■ مثال ۱۰-۳

بازوی مکانیکی ماهر با یک رابط را که در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده است، در نظر بگیرید.



شکل ۱۰-۴ آونگ وارون و یا بازوی مکانیکی ماهر با یک رابط.

این بازو یک مفصل لولایی دارد. جرم بازو در نقطه انتهایی رابط فرض می‌شود و بنابراین، لنگر لختی آن  $ml^2$  است. بر این مفصل، نیروهای اصطکاک خشک و اصطکاک ویسکوز، و نیروی وزن، اعمال می‌شود. سیستم کنترلی طرح کنید که با استفاده از تقسیم قانون کنترل، این سیستم را همواره در حالت میرایی بحرانی نگه دارد. مدل این بازوی مکانیکی چنین است

$$\tau = ml^2 \ddot{\theta} + v\dot{\theta} + c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + mlg \cos(\theta) \quad (6-10)$$

مطابق معمول، سیستم کنترل دو قسمت دارد: قسمت وابسته به مدل خطی کننده، و قسمت سرو.

قسمت وابسته به مدل کنترل عبارت است از  $f = \alpha f' + \beta$ ، که در آن

$$\begin{aligned} \alpha &= ml^2 \\ \beta &= v\dot{\theta} + c \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + mlg \cos(\theta) \end{aligned} \quad (7-10)$$

و قسمت سرو نیز مطابق معمول چنین است

$$f' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (8-10)$$

■ که در آن بهره‌ها با داشتن مشخصات عملکرد مطلوب، محاسبه می‌شوند.

دیدیم که در برخی حالت‌های ساده، طراحی کنترل کننده غیرخطی دشوار نیست. روش کلی به‌کار رفته در مثال‌های فوق را برای طراحی کنترل کننده بازوی مکانیکی ماهر به‌ترتیب زیر به‌کار خواهیم برد:

۱. قانون کنترلی غیرخطی و وابسته به مدل را طوری به‌دست می‌آوریم که عوامل غیرخطی موجود در سیستم تحت کنترل را «خنثی» کند.
۲. با استفاده از قانون سروی خطی، که برای جرم واحد به‌دست آوردیم، سیستم تحت کنترل را به سیستمی خطی و قابل کنترل تبدیل می‌کنیم.

از برخی جهات، قانون کنترل خطی کننده فوق، در واقع مدلی وارون از سیستم تحت کنترل را به‌کار می‌گیرد، به‌طوری‌که عوامل غیرخطی موجود در سیستم اصلی، به‌وسیله عوامل در نظر گرفته شده در مدل وارون، خنثی می‌شوند. این مدل به همراه قانون سرو، یک سیستم مدار بسته خطی را پدید می‌آورد. روشن است که برای خنثی کردن عوامل غیرخطی، باید پارامترها و ساختار سیستم غیرخطی را بشناسیم. این موضوع غالباً در کاربردهای عملی این روش، مشکل آفرین است.



### ۳-۱۰ سیستمهای کنترل چند ورودی-چند خروجی

برخلاف آنچه در مثالهای ساده ارائه شده دیدیم، کنترل بازوی مکانیکی ماهر، مسئله‌ای از نوع چند ورودی-چند خروجی است. این بدان معناست که با داشتن برداری از مکانها، سرعتها، و شتابهای مورد نظر برای مفصل، قانون کنترل باید برداری از سیگنالهای کارانداز مفصلی را محاسبه کند. در این حالت، روش تقسیم قانون کنترل به قسمت وابسته به مدل و قسمت سرو، همچنان قابل استفاده است، اما صورت ماتریسی برداری خواهد داشت. قانون کنترل را می‌توان چنین نوشت

$$F = \alpha F' + \beta \quad (9-10)$$

که در آن، برای سیستمی با  $n$  درجه آزادی،  $F$ ،  $F'$ ، و  $\beta$  بردارهایی  $n \times 1$  هستند و  $\alpha$  ماتریسی  $n \times n$  است. توجه کنید که ماتریس  $\alpha$  لزوماً قطری نیست و تنها برای مستقل کردن  $n$  معادله حرکت از یکدیگر به کار می‌رود. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  به درستی انتخاب شوند، آنگاه از ورودی  $F'$  سیستم به صورت  $n$  جرم واحد مستقل به نظر می‌رسد. به همین دلیل، قسمت وابسته به مدل را در حالت چند بُعدی، قانون کنترل خطی و مستقل کننده می‌نامند. قانون سرو برای سیستم چند بُعدی به صورت زیر در می‌آید

$$F' = \ddot{X}_d + K_v \dot{E} + K_p E \quad (10-10)$$

که در آن  $K_p$  و  $K_v$  ماتریسهای  $n \times n$  هستند. این ماتریسها معمولاً قطری بوده، بهره‌های ثابتی بر روی قطر آنها در نظر گرفته می‌شوند.  $E$  و  $\dot{E}$  به ترتیب بردارهای خطای مکان و سرعت  $n \times 1$  هستند.

### ۴-۱۰ کنترل بازوهای مکانیکی ماهر

در فصل ۶، مدل و معادله‌های حرکت متناظر را برای بازوی مکانیکی ماهر به دست آوردیم. چنانکه دیدیم، این معادله‌های دینامیکی، بسیار پیچیده‌اند، و به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (11-10)$$

که در آن  $M(\Theta)$  ماتریس لختی  $n \times n$  بازوی مکانیکی ماهر،  $V(\Theta, \dot{\Theta})$  برداری  $n \times 1$  متشکل از جمله‌های گریز از مرکز و کوریولیس، و  $G(\Theta)$  برداری  $n \times 1$ ، متشکل از جمله‌های مربوط به گرانی است. هر عنصر  $M(\Theta)$  و  $G(\Theta)$ ، تابعی پیچیده است که به  $\Theta$ ، مکان کلیه مفصلهای بازو، بستگی دارد. هر عنصر  $V(\Theta, \dot{\Theta})$  نیز تابعی پیچیده از  $\Theta$  و  $\dot{\Theta}$  است.

علاوه بر این، می‌توانیم مدلی از اصطکاک (و یا دیگر اثرات جسم غیر صلب) را نیز به این رابطه اضافه کنیم. با فرض اینکه مدل اصطکاکی ما تابعی از مکانها و سرعتهای مفصلی است،

به رابطه (۱۰-۱۱) جمله  $F(\Theta, \dot{\Theta})$  را می‌افزاییم تا مدل زیر حاصل شود

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (۱۰-۱۲)$$

با کاربرد روش کنترل کننده تقسیم‌شده‌ای که در این فصل معرفی کردیم، می‌توانیم مسئله کنترل سیستم پیچیده‌ای چون (۱۰-۱۲) را حل کنیم. در این حالت، داریم

$$\tau = \alpha\tau' + \beta \quad (۱۰-۱۳)$$

که در آن  $\tau$  برداری  $1 \times n$  از گشتاورهای مفصلی است. حال انتخاب می‌کنیم

$$\alpha = M(\Theta)$$

$$\beta = V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (۱۰-۱۴)$$

و قانون سرو را نیز چنین در نظر می‌گیریم

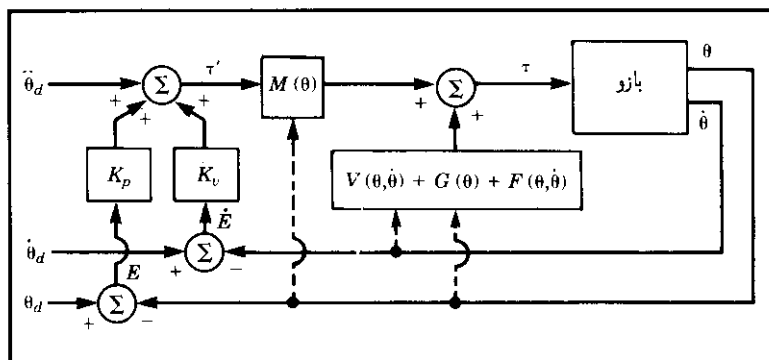
$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E \quad (۱۰-۱۵)$$

که در آن

$$E = \Theta_d - \Theta \quad (۱۰-۱۶)$$

سیستم کنترل حاصل، در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده است.

با استفاده از روابط (۱۰-۱۲) تا (۱۰-۱۵)، می‌توان به آسانی نشان داد که سیستم مدار بسته



شکل ۱۰-۵ سیستم کنترل وابسته به مدل برای بازوی مکانیکی ماهر.

با معادله خطای زیر مشخص می‌شود

$$\ddot{E} + K_v \dot{E} + K_p E = 0 \quad (10-17)$$

توجه کنید که این معادله برداری مستقل است، زیرا ماتریسهای  $K_v$  و  $K_p$  قطری‌اند، به‌طوری‌که می‌توان رابطه (10-17) را برای هر مفصل به‌طور جداگانه چنین نوشت

$$\ddot{e}_i + k_{vi} \dot{e}_i + k_{pi} e_i = 0 \quad (10-18)$$

در عمل نمی‌توان به عملکرد ایدئالی که با رابطه (10-17) نشان داده شده است، دست یافت. این امر، دلایل بسیاری دارد، که دو تا از مهمترین آنها عبارت‌اند از:

۱. طبیعت غیر پیوسته عملکرد کامپیوتر رقمی در مقابل قانون کنترل زمانی پیوسته ایدئالی که در روابط (10-14) و (10-15) نهفته است.
۲. عدم وجود دقت لازم در مدل بازوی مکانیکی ماهر برای محاسبه رابطه (10-14).
- در بخش آینده، این دو موضوع را (دست کم تا حدودی) بررسی خواهیم کرد.

## ۱۰-۵ ملاحظات عملی

در بخشهای قبل، برای کنترل خطی و مستقل کننده چند فرض را پذیرفتیم که در عمل به‌ندرت صادق‌اند.

### زمان لازم برای محاسبه مدل

در کلیه بررسیهای انجام شده درباره استراتژی قانون کنترل تقسیم شده، به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که کل سیستم در زمانی پیوسته عمل می‌کند، و همچنین زمان لازم برای انجام محاسبات قانون کنترل، صفر است. با داشتن کامپیوتری به‌قدر کافی بزرگ، می‌توان هر تعداد محاسبه را آنقدر سریع انجام داد که فرض دوم (صفر بودن زمان) معقول باشد، اما هزینه زیاد کامپیوتر مورد نیاز، ممکن است کاربرد این روش را از لحاظ اقتصادی غیر ممکن سازد. در هنگام کنترل بازو، کل معادله دینامیکی بازو (معادله (10-14)) را باید در قانون کنترل محاسبه کرد. این محاسبات بسیار پیچیده‌اند و در نتیجه، به‌طوری‌که در فصل ۶ دیده شد، روشهای محاسباتی بسیار سریعی، با بازده بالا، برای انجام آنها پیشنهاد شده است. هرچه امکان دسترسی به کامپیوترهای پرقدرت افزایش یابد، قوانین کنترلی که مستلزم محاسبات فراوان هستند، در عمل بیشتر مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در مراجع [۹-۵]، چندین مثال تجربی از کاربرد قوانین کنترل غیرخطی وابسته به مدل، گزارش شده است، و کاربرد پاره‌ای از این قوانین، در کنترل کننده‌های صنعتی نیز آغاز شده است. به‌طوری‌که در فصل ۹ گفته شد، در حال حاضر تقریباً در کلیه سیستمهای کنترل روبات از مدارهای رقمی استفاده می‌شود، و این سیستمها با آهنگ نمونه‌برداری معینی کار می‌کنند. این

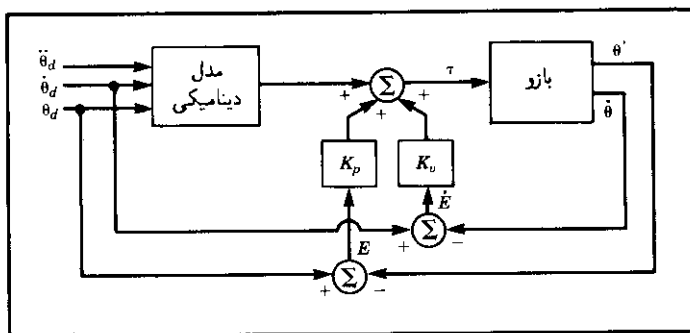
بدان معناست که حساسه‌های مکان (و احتمالاً دیگر حساسه‌ها) در نقاط ناپیوسته زمانی خوانده می‌شوند. بر اساس مقدار خوانده شده، فرمان کارانداز محاسبه، و به کارانداز فرستاده می‌شود. بدین ترتیب، خواندن حساسه‌ها و فرستادن فرمانهای کاراندازها، نه به‌طور پیوسته، بلکه با آهنگ نمونه‌برداری متناهی انجام می‌شود. برای بررسی اثرات تأخیر زمانی ناشی از انجام محاسبات و متناهی بودن آهنگ نمونه‌برداری، باید از ابزارهای موجود در حوزه کنترل زمانی ناپیوسته استفاده کنیم. در کنترل زمانی ناپیوسته، معادله‌های دیفرانسیل به معادله‌های تفاضلی تبدیل می‌شوند، و از ابزارهای بسیاری برای پاسخ به پرسشهای مربوط به پایداری و محل قطبها، می‌توان سود جست. بحث درباره نظریه کنترل زمانی ناپیوسته، خارج از محدوده این کتاب است، اگر چه پژوهشگرانی که در زمینه کنترل روباتها کار می‌کنند، باید بسیاری از مفاهیم سیستمهای زمانی ناپیوسته را بدانند (مرجع [۱۰] را ببینید).

ایده‌ها و روشهای مهم در کنترل زمانی ناپیوسته را غالباً به‌دشواری می‌توان در سیستمهای غیرخطی به‌کار برد. اگر چه ما توانسته‌ایم برای معادله دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر، معادله دیفرانسیل حرکت پیچیده‌ای بنویسیم، اما در حالت کلی پیدا کردن معادل زمانی ناپیوسته برای یک سیستم، همواره ممکن نیست. علت آن است که در هر بازوی عام، تنها راه به‌دست آوردن جواب معادله حرکت با داشتن شرایط اولیه، ورودی، و فاصله زمانی متناهی، استفاده از انتگرالگیری عددی (مطابق فصل ۶) است. ساختن مدل‌های زمانی ناپیوسته در صورتی ممکن خواهد بود که از جوابهای سری برای حل معادله‌های دیفرانسیل استفاده کنیم، یا تقریبهایی را در نظر بگیریم. اما اگر برای ساختن مدل زمانی ناپیوسته، ناگزیر از تقریب زدن شویم، آن‌گاه مشخص نخواهد بود که این مدل، از مدل ساخته شده بر اساس مدل پیوسته با تقریب زمانی پیوسته، بهتر خواهد بود یا نه. همین‌قدر می‌توان گفت که تحلیل زمانی ناپیوسته کنترل روبات دشوار است، و معمولاً برای قضاوت درباره اثر هر آهنگ نمونه‌برداری معین، باید به شبیه‌سازی روی آورد.

در حالت کلی، فرض می‌کنیم که محاسبات را می‌توان با سرعت بسیار زیاد انجام داد، و در نتیجه فرض تقریب زمانی پیوسته، معتبر است.

### کنترل غیرخطی پیشرو

استفاده از کنترل پیشرو، به منزله روشی برای کاربرد مدل دینامیکی غیرخطی در قانون کنترل، پیشنهاد شده است. در این روش، لازم نیست محاسبات پیچیده و وقت‌گیر با آهنگهای سرو [۱۱] انجام شوند. در شکل ۱۰-۵، قسمت وابسته به مدل قانون کنترل در «داخل حلقه سرو» قرار دارد، که در واقع با هر «تیک» از ساعت سرو، سیگنالها از میان این جعبه سیاه عبور می‌کنند. اگر آهنگ نمونه‌برداری را  $200\text{ Hz}$  انتخاب کنیم، آن‌گاه مدل دینامیکی بازو باید با این آهنگ محاسبه شود. سیستم کنترل دیگری که می‌توان به‌کار برد، در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده است. در اینجا کنترل وابسته به مدل، در «خارج» حلقه سرو قرار دارد. بدین ترتیب، می‌توان از یک حلقه سرو داخلی سریع استفاده کرد، که در آن تنها خطاها در بهره‌ها ضرب می‌شوند، و گشتاورهای وابسته به مدل



شکل ۱۰-۶ روش کنترل با قسمت وابسته به مدل «خارج» از حلقه سرو.

با آهنگی آهسته‌تر به آن اضافه می‌گردند. متأسفانه روش پیشرو در شکل ۱۰-۶، قادر نیست معادله‌ها را به‌طور کامل از یکدیگر مستقل کند. با نوشتن معادله‌های این سیستم<sup>۱</sup>، معادله خطا چنین به‌دست خواهد آمد

$$\ddot{E} + M^{-1}(\Theta)K_v\dot{E} + M^{-1}(\Theta)K_pE = 0 \quad (10-19)$$

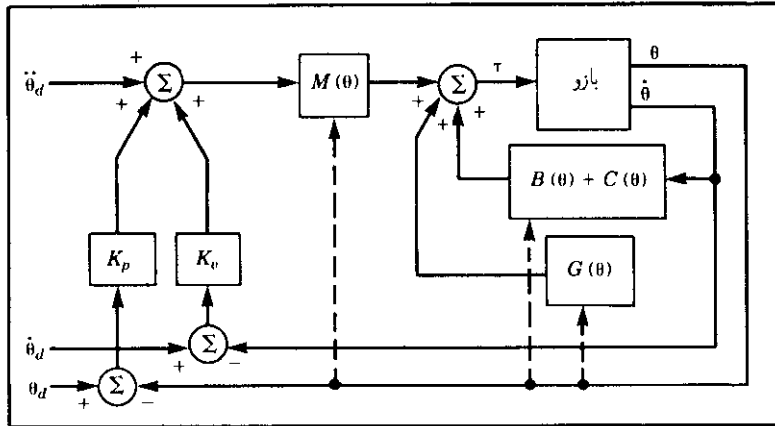
روشن است که با تغییر پیکربندی بازو، بهره مؤثر مدار بسته تغییر می‌کند، و قطبهای شبه استاتیکی در صفحه مختلط به حرکت در می‌آیند. اما معادله (۱۰-۱۹) را می‌توان به منزله نقطه آغازی برای طراحی یک کنترل کننده غیرظریف به‌کار برد؛ یعنی مجموعه‌ای از بهره‌های ثابت را طوری پیدا کرد که به‌رغم «حرکت» قطبها، قرارگیری آنها در نواحی نسبتاً مناسبی تضمین شود. روش دیگر، محاسبه قبلی بهره‌های متغیر با تغییر پیکربندی روبات است، به‌طوری‌که محل قطبهای شبه استاتیکی ثابت بمانند.

توجه کنید که در سیستم شکل ۱۰-۶، مدل دینامیکی فقط تابع مسیر مورد نظر است، و در نتیجه هنگامی که مسیر مورد نظر از پیش معلوم باشد، می‌توان مقادیر را به‌طور «خارج خط» و قبل از آنکه حرکت آغاز شود، محاسبه کرد. سپس مقادیر گشتاور از قبل محاسبه شده، در هنگام اجرای برنامه کامپیوتری از حافظه کامپیوتر خوانده خواهند شد. به همین ترتیب، بهره‌های متغیر با زمان را نیز می‌توان از قبل محاسبه و در حافظه کامپیوتر ذخیره کرد. به‌کارگیری این روش در هنگام اجرای برنامه، هزینه محاسباتی ناچیزی دارد، و در نتیجه آهنگ سروی آن بالاست.

### روش گشتاور محاسبه شده با آهنگ دوگانه

شکل ۱۰-۷، نمودار بلوکی یک کاربرد احتمالی سیستم کنترل مکان خطی و مستقل کننده را نشان می‌دهد. مدل دینامیکی در این سیستم در فضای پیکربندی خود توصیف شده است،

۱. برای به‌دست آوردن معادله‌ها، از فرضهای ساده‌کننده:  $M(\Theta_d) \cong M(\Theta)$ ،  $V(\Theta_d, \dot{\Theta}_d) \cong V(\Theta, \dot{\Theta})$  و  $G(\Theta_d) \cong G(\Theta)$  استفاده کرده‌ایم.



شکل ۱۰-۷ به کارگیری سیستم کنترل وابسته به مدل بازوی مکانیکی.

به طوری که پارامترهای بازوی مکانیکی ماهر، فقط تابع مکان اند. سپس می توان مقدار این توابع را به وسیله فرایندی زمینه ای، یا به وسیله یک کامپیوتر ثانویه [۸]، یا با جستجوی آنها در جدولی از قبل محاسبه شده [۱۲]، تعیین کرد. در این شکل محاسباتی، مقادیر جدید برای پارامترهای دینامیکی را می توان با آهنگی آهسته تر از آهنگ سروی مدار بسته، محاسبه کرد. مثلاً، محاسبات زمینه ای ممکن است با آهنگ ۶۰ Hz انجام شوند، در حالی که سروی مدار بسته می تواند با آهنگ ۲۵۰ Hz عمل کند.

### عدم شناخت دقیق پارامترهای سیستم

مشکل دومی که در به کارگیری الگوریتم کنترل گشتاور محاسبه شده بر سر راه ماست، عدم شناخت دقیق مدل دینامیکی است. این امر، به ویژه در مورد مؤلفه های معینی از دینامیک سیستم، مانند اثرات اصطکاکی، صادق است. در واقع حتی شناسایی ساختار مدل اصطکاکی بسیار دشوار است، چه رسد به دانستن مقدار پارامترهای آن [۱۳]. اگر بازوی مکانیکی ماهر قسمتی تکرار ناپذیر در دینامیک خود داشته باشد، مثلاً قسمتی که با افزایش عمر روبات تغییر کند، آن گاه نسبت دادن مقادیر مناسب به پارامترهای مدل برای کلیه زمانها، دشوار خواهد بود.

بیشتر روباتها برای بلند کردن قطعات و ابزارهای گوناگون در نظر گرفته شده اند. هنگامی که روبات ابزاری را در دست دارد، لختی و وزن آن ابزار، معادله های دینامیکی بازو را تغییر می دهد. در کاربردهای صنعتی، تعیین جرم و لختی ابزار امکان پذیر است، و می توان آنها را در قسمت وابسته به مدل قانون کنترل، در نظر گرفت. هنگامی که ابزاری در دست روبات قرار دارد، می توان ماتریس لختی، جرم کل، و مرکز جرم آخرین رابط بازوی مکانیکی ماهر را تغییر داد، و مقادیر جدید را بر اساس ترکیب رابط آخر و ابزار محاسبه کرد. اما در بسیاری از کاربردها، خواص جرمی اجسام

برداشته شده به وسیلهٔ روبات، معلوم نیست، و این موضوع در تعیین یک مدل دینامیکی دقیق، ایجاد اشکال می‌کند.

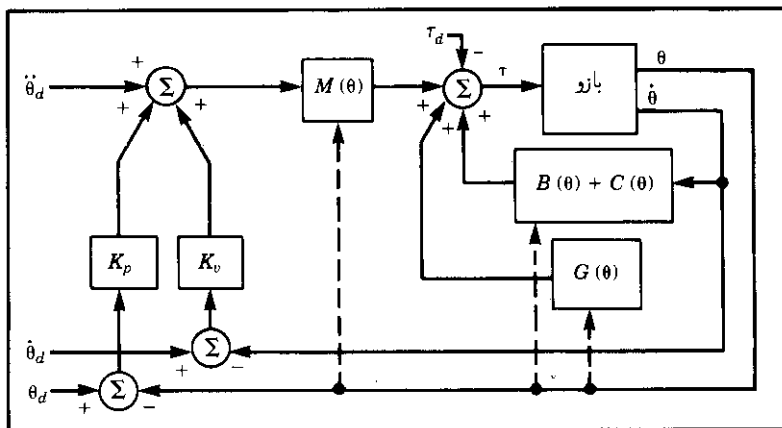
ساده‌ترین حالت غیر ایدئال ممکن، آن است که همچنان مدلی کامل را در زمان پیوسته، اما تحت تأثیر نویز خارجی در نظر بگیریم. در شکل ۱۰-۸ برداری از گشتاورهای اغتشاشی، بر مفصلهای روبات وارد می‌شود. معادلهٔ خطای سیستم، با در نظر گرفتن این اغتشاشهای نامعلوم، چنین به دست می‌آید

$$\ddot{E} + K_v \dot{E} + K_p E = M^{-1}(\Theta) \tau_d \quad (۱۰-۲۰)$$

که در آن بردار گشتاورهای اغتشاشی در مفصلهاست. سمت چپ معادلهٔ (۱۰-۲۰) مستقل است، اما از طرف راست می‌توان دید که وجود اغتشاش در هر مفصل خاص، در کلیهٔ مفصلهای دیگر نیز خطا ایجاد می‌کند. علت آن است که در حالت کلی،  $M(\Theta)$  ماتریسی قطری نیست. بر پایهٔ معادلهٔ (۱۰-۲۰)، می‌توان چند تحلیل ساده انجام داد. مثلاً به سادگی می‌توان خطای سرّوی حالت پایای ایجاد شده بر اثر اغتشاشی ثابت، را چنین محاسبه کرد

$$E = K_p^{-1} M^{-1}(\Theta) \tau_d \quad (۱۰-۲۱)$$

چنانچه مدل دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر کامل نباشد، تحلیل سیستم مدار بستهٔ حاصل، دشوارتر می‌شود. برای این حالت، نمادگذاری زیر را تعریف می‌کنیم: ماتریس  $\hat{M}(\Theta)$ ، مدل ماتریس لختی بازو،  $M(\Theta)$ ، است. همچنین، مدل‌های متناظر با سرعت، گرانی، و اصطکاک در مکانیزم واقعی را به ترتیب با نمادهای  $\hat{V}(\Theta, \dot{\Theta})$ ،  $\hat{G}(\Theta)$ ، و  $\hat{F}(\Theta, \dot{\Theta})$  مشخص می‌کنیم. داشتن اطلاعات کامل



شکل ۱۰-۸ کنترل کننده وابسته به مدل، که در آن اغتشاش خارجی وجود دارد.

از مدل، به مفهوم زیر است

$$\begin{aligned}\hat{M}(\Theta) &= M(\Theta) \\ \hat{V}(\Theta, \dot{\Theta}) &= V(\Theta, \dot{\Theta}) \\ \hat{G}(\Theta) &= G(\Theta) \\ \hat{F}(\Theta, \dot{\Theta}) &= F(\Theta, \dot{\Theta})\end{aligned}\quad (22-10)$$

بنابراین، اگرچه معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر چنین‌اند

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) + F(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (23-10)$$

قانون کنترل ما مقادیر زیر را محاسبه می‌کند

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha\tau' + \beta \\ \alpha &= \hat{M}(\Theta) \\ \beta &= \hat{V}(\Theta, \dot{\Theta}) + \hat{G}(\Theta) + \hat{F}(\Theta, \dot{\Theta})\end{aligned}\quad (24-10)$$

در نتیجه، مستقل‌سازی و خطی‌کردن معادله‌ها، در حالتی که پارامترها دقیقاً مشخص نیستند، به‌طور کامل انجام نخواهد شد. با نوشتن معادله مدار بسته برای این سیستم، داریم

$$\ddot{E} + K_v\dot{E} + K_pE = \hat{M}^{-1} \left[ (M - \hat{M})\ddot{\Theta} + (V - \hat{V}) + (G - \hat{G}) + (F - \hat{F}) \right] \quad (25-10)$$

که در آن به‌منظور رعایت سادگی، متغیرهای توابع دینامیکی نشان داده نشده‌اند. توجه کنید که اگر مدل دقیق بود، به‌طوری که رابطه‌های (22-10) صادق می‌بود، آنگاه طرف راست رابطه (25-10) صفر، و خطاها حذف می‌شد. هنگامی که پارامترها به‌درستی معلوم نیستند، اختلاف بین پارامترهای واقعی و پارامترهای مدل‌سازی شده، خطاهای سرو را بر اساس معادله نسبتاً پیچیده (25-10) پدید می‌آورند (در برخی موارد، حتی ممکن است سیستم ناپایدار شود [21]). درباره تحلیل پایداری هر سیستم مدار بسته غیرخطی در بخش 10-7 بحث می‌کنیم.

## ۱۰-۶ سیستمهای کنترل روباتهای صنعتی امروزی

به‌دلیل وجود مشکلاتی بر سر راه دستیابی به اطلاعات دقیق درباره پارامترها، باید دید آیا انجام محاسبات پیچیده قانون کنترل وابسته به مدل برای کنترل روبات، عاقلانه است یا نه. پرداخت هزینه سنگین توان کامپیوتری مورد نیاز برای انجام محاسبات مدل بازوی مکانیکی با آهنگی

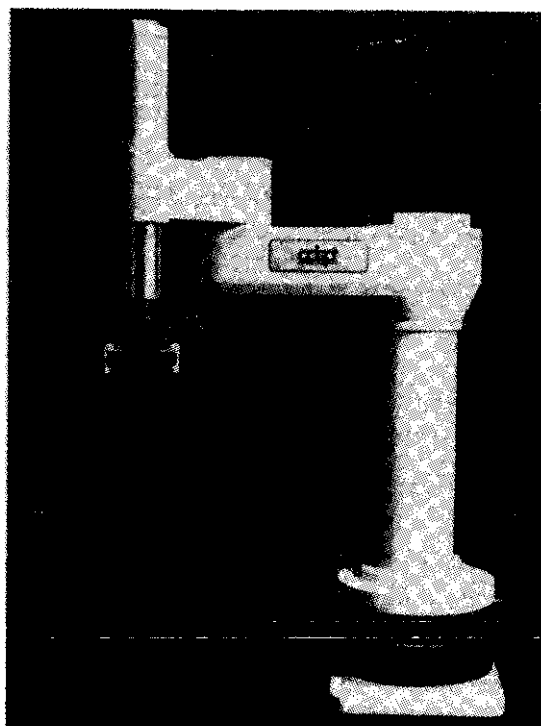


مناسب، ممکن است سودمند نباشد، به‌ویژه هنگامی که به‌دلیل عدم وجود اطلاعات دقیق دربارهٔ پارامترهای سیستم، مزایای استفاده از این روش خنثی می‌شوند. تولید کنندگان روبات، احتمالاً به‌دلیل اقتصادی، تصمیم گرفته‌اند از به‌کار بردن مدل کامل بازو در کنترل کننده، خودداری کنند. آنها در عوض بازوهای مکانیکی ماهر را با قوانین کنترل بسیار ساده‌ای که در حالت کلی بر اساس خطا عمل می‌کنند و ساختمانی مشابه با نمونه‌های ذکر شده در بخش ۹-۱۰ دارند، کنترل می‌کنند. در شکل ۹-۱۰، روباتی صنعتی با سیستم سرو با عملکرد بالا، نشان داده شده است.

### کنترل PID برای هر مفصل

بسیاری از روبانهای صنعتی امروزی، روش کنترلی دارند که بر اساس نمادگذاری ما چنین توصیف می‌شود

$$\begin{aligned}\alpha &= I \\ \beta &= 0\end{aligned}\quad (۱۰-۲۶)$$



شکل ۹-۱۰ روبات ادپت وان، روباتی است با رانش مستقیم که به‌وسیلهٔ شرکت ادپت تکنولوژی<sup>۱</sup> ساخته شده است.

1. Adept Technology Inc.

که در آن،  $I$  ماتریس همانی  $n \times n$  است. قسمت سرّ نیز عبارت است از

$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E dt \quad (27-10)$$

که در آن  $K_v$ ،  $K_p$ ، و  $K_i$  ماتریسهای قطری ثابت‌اند. در بسیاری حالتها،  $\ddot{\Theta}_d$  در دسترس نیست و برابر صفر قرار داده می‌شود. این بدان معناست که بسیاری از کنترل‌کننده‌های روبات، از قسمت وابسته به مدل در قانون کنترل خود، کاملاً صرف‌نظر می‌کنند. این روش کنترل PID، روشی ساده است، زیرا در آن هر مفصل به‌صورت سیستمی جداگانه کنترل می‌شود. اغلب برای اجرای رابطه (۲۷-۱۰)، در هر مفصل یک ریزپردازنده قرار داده می‌شود، که در بخش ۹-۱۰ درباره آن بحث شد.

توصیف عملکرد بازویی که بدین ترتیب کنترل می‌شود، ساده نیست. از آنجاکه برای مستقل‌سازی معادله‌ها اقدامی انجام نمی‌شود، حرکت هر مفصل بر حرکت مفصلهای دیگر تأثیر خواهد گذاشت. این برهمکنشها، خطاهایی را ایجاد می‌کنند، که توسط قانون کنترل با رانش خطا، خنثی می‌شوند. انتخاب بهره‌های ثابتی که پاسخ سیستم نسبت به اغتشاش را در کلیه حالتها به‌صورت میرای بحرانی درآورند، غیرممکن است. به‌همین دلیل، بهره‌های متوسطی که میرایی بحرانی را در ناحیه مرکزی فضای کاری روبات ایجاد می‌کنند، انتخاب می‌شوند. در پیکربندیهای حدی بازو، سیستم زیر میرایی یا فوق میرایی خواهد داشت. بسته به جزئیات طرح مکانیکی روبات، این اثرات ممکن است کوچک باشند، و در نتیجه کنترل روبات رضایتبخش شود. در چنین سیستمهایی، باید بهره‌ها را تا حد امکان بالا در نظر گرفت تا این اغتشاشهای اجتناب‌ناپذیر، در کوتاهترین زمان خنثی شوند.

### مدل جبران‌کننده گرانی

از آنجاکه جمله‌های مربوط به گرانی در معادله‌های روبات، باعث ایجاد خطاهایی در تعیین وضعیت استاتیکی می‌شوند، برخی تولیدکنندگان روبات یک مدل گرانی،  $G(\theta)$ ، را در قانون کنترل روبات در نظر می‌گیرند (یعنی در نمادگذاری ما  $\beta = \hat{G}(\Theta)$ ). در این صورت، قانون کنترل کامل، به‌صورت زیر در می‌آید

$$\tau' = \ddot{\Theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E + K_i \int E dt + \hat{G}(\Theta) \quad (28-10)$$

شاید چنین قانون کنترلی، ساده‌ترین مثال از کنترل‌کننده وابسته به مدل باشد. چون رابطه (۲۸-۱۰) را دیگر نمی‌توان صرفاً به‌صورت مفصل به مفصل به‌کار گرفت، باید بتوان در ساختمان کنترل‌کننده، بین کنترل‌کننده‌های مفصلی ارتباط برقرار کرد، یا از پردازنده‌ای مرکزی به‌جای پردازنده‌های مفصلی منفرد، استفاده کرد.

### ساده‌سازی کنترل مستقل کننده

راههای گوناگونی برای ساده کردن معادله‌های دینامیکی هر بازوی مکانیکی ماهر خاص وجود دارد [۱۴،۳]. پس از ساده کردن، باید یک قانون کنترل مستقل و خطی کننده به‌دست آورد. روشی معمول برای ساده‌سازی، صرف‌نظر کردن از مؤلفه‌های گشتاور ناشی از جمله‌های سرعت، یعنی تنها مدل‌سازی جمله‌های لختی و گرانی است. در کنترل کننده اغلب از مدل‌های اصطکاکی استفاده نمی‌شود، زیرا مدل‌سازی صحیح اصطکاک دشوار است. گاهی ماتریس لختی را طوری ساده می‌کنند که تنها اثرات ناشی از وابستگی‌های اصلی بین محورها را بیان کند، بدون آنکه اثرات ناشی از وابستگی‌های متقابل جزئی را در برگیرد. مثلاً در مرجع [۱۴]، نمونه ساده شده‌ای از ماتریس جرم پیوما ۵۶۰ معرفی شده است که در آن تنها ۱۰٪ از محاسبات لازم برای به‌دست آوردن ماتریس کامل جرم انجام می‌شود، اما دقت آن بالا و در حدود ۱٪ است.

### ۷-۱۰ تحلیل پایداری لیاپونوف

در فصل ۹ سیستم‌های کنترل خطی را به‌طور تحلیلی برای تعیین پایداری و عملکرد پاسخ دینامیکی، برحسب میرایی و پهنای باند مدار بسته، بررسی کردیم. این تحلیلها برای سیستمی غیرخطی، که معادله‌های آن به‌وسیله کنترل کننده‌ای غیرخطی و وابسته به مدل ایدئال، مستقل و خطی شده‌اند، نیز عیناً معتبرند. علت آن است که سیستم کامل به‌دست آمده در این حالت، بازهم سیستمی خطی است. اما اگر کنترل کننده مستقل‌سازی و خطی‌سازی را انجام ندهد، یا آنها را به‌طور غیر دقیق یا ناکامل انجام دهد، آن‌گاه سیستم مدار بسته کلی، غیرخطی باقی می‌ماند. در سیستم‌های غیرخطی تحلیل پایداری و عملکرد به مراتب دشوارتر است. در این بخش، روشی را برای تحلیل پایداری معرفی خواهیم کرد که هم برای سیستم‌های خطی و هم برای سیستم‌های غیرخطی به‌کار می‌رود.

سیستم ساده جرم-فنر دارای اصطکاک در فصل ۹ را که معادله حرکت آن به‌صورت زیر است، در نظر بگیرید

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (۲۹-۱۰)$$

انرژی کل سیستم چنین است

$$v = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (۳۰-۱۰)$$

که در آن جمله اول انرژی جنبشی جرم، و جمله دوم انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر را نشان می‌دهد. توجه کنید که مقدار انرژی سیستم،  $v$ ، همواره غیر منفی (مثبت یا صفر) است. حال

آهنگ تغییر انرژی کل سیستم را با مشتگیری از معادله (۱۰-۳۰) به دست می آوریم

$$\dot{v} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \quad (31-10)$$

با قرار دادن مقدار  $m\ddot{x}$  از (۱۰-۲۹) در (۱۰-۳۱)، نتیجه می شود

$$\dot{v} = -b\dot{x}^2 \quad (32-10)$$

این عبارت، چنانکه دیده می شود، همواره غیر مثبت است (زیرا  $b > 0$ ). پس سیستم همواره انرژی از دست می دهد، مگر آنکه  $\dot{x} = 0$  شود. این بدان معناست که سیستم در ابتدا به هر ترتیبی تحریک شود، آنقدر انرژی از دست خواهد داد تا به حال سکون درآید. با تحلیل حالت پایای رابطه (۱۰-۲۹)، به منظور تعیین وضعیتهای سکون سیستم، به نتیجه زیر می رسیم

$$kx = 0 \quad (33-10)$$

یا

$$x = 0 \quad (34-10)$$

بدین ترتیب، با استفاده از تحلیل انرژی، نشان دادیم که سیستم دارای معادله (۱۰-۲۹)، صرف نظر از شرایط اولیه (یعنی با هر انرژی اولیه ای که دارد)، سرانجام در نقطه تعادل خود، به حال سکون در خواهد آمد. این اثبات پایداری از طریق تحلیل انرژی، مثالی ساده از کاربرد روشی کلیتر به نام تحلیل پایداری لیاپونوف، یا روش دوم (یا مستقیم) لیاپونوف است. (لیاپونوف ریاضیدان روسی قرن نوزدهم میلادی است [۱۵]).

ویژگی جالب روش لیاپونوف، آن است که بدون حل معادله دیفرانسیل سیستم، می توان پایداری آن را بررسی کرد. روش لیاپونوف اگر چه برای تعیین پایداری مناسب است، اما قادر نیست هیچ گونه اطلاعاتی درباره پاسخ گذرا یا عملکرد سیستم به دست دهد. توجه کنید که تحلیل انرژی فوق، اطلاعاتی درباره زیر میرایی یا فوق میرایی سیستم، و یا زمان لازم برای خنثی شدن اغتشاش به وسیله سیستم، به دست نمی دهد. بین پایداری و عملکرد سیستم باید تفاوت قائل شد، زیرا هر سیستم پایدار ممکن است در کاربردی که برای آن در نظر گرفته شده است، از خود عملکرد کنترلی نامطلوبی نشان دهد.

روش لیاپونوف، از آنچه در مثال بالا دیدیم، کلیتر است. این روش، یکی از معدود روشهایی است که می تواند مستقیماً برای تعیین پایداری سیستمهای غیرخطی به کار روند. در اینجا به منظور درک سریع روش لیاپونوف (با جزئیات لازم برای این کتاب)، ابتدا این نظریه را به صورت بسیار مختصر معرفی، و سپس چند مثال را مطرح خواهیم کرد. نظریه لیاپونوف، در مرجعهای [۱۶، ۱۷] به طور کاملتری شرح داده شده است.

از روش لیاپونوف برای تعیین پایداری معادله دیفرانسیل با شکل کلی زیر استفاده می‌شود

$$\dot{X} = f(X) \quad (۳۵-۱۰)$$

که در آن  $X$  برداری  $m \times ۱$  است، و  $f(\cdot)$  می‌تواند غیرخطی باشد. توجه کنید که معادله‌های دیفرانسیل بالاتر از مرتبه یک را همواره می‌توان به صورت مجموعه‌ای از معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول به شکل (۳۵-۱۰) نوشت. برای اثبات پایداری هر سیستم به روش لیاپونوف، باید تابع انرژی تعمیم یافته  $v(X)$  را با ویژگیهای زیر پیدا کرد:

۱.  $v(X)$  باید دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشد، و به‌ازای کلیه مقادیر  $X$  بجز  $v(\cdot) = 0$  داشته باشیم  $v(X) > 0$ .

۲. شرط  $\dot{v}(X) \leq 0$  صادق باشد. در اینجا  $\dot{v}(X)$  به معنای تغییر  $v(X)$  در راستای کلیه مسیرهای سیستم است.

این ویژگیها ممکن است تنها در ناحیه‌ای معین، یا در کلیه نواحی، با پایداری کمتر یا بیشتر صادق باشند. ایده مشهود در اینجا، آن است که می‌توان ثابت کرد یک تابع حالت «انرژی مانند» معین مثبت، همواره کاهش می‌یابد، یا ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه، سیستم پایدار خواهد بود، زیرا اندازه بردار حالت آن، کراندار است.

اگر  $\dot{v}(X)$  قطعاً کمتر از صفر باشد، می‌توان همگرایی مجانبی آن با بردار صفر را نتیجه گرفت. لاسال<sup>۱</sup> و لفسچتز<sup>۲</sup> [۴] از کار اولیه لیاپونوف نتیجه مهمی گرفتند و نشان دادند که در موارد معین، حتی هنگامی که  $\dot{v}(X) \leq 0$  (به علامت مساوی توجه کنید)، می‌توان پایداری مجانبی را اثبات کرد. در اینجا، حالت  $\dot{v}(X) = 0$  را تحلیل حالت پایا خواهیم کرد تا مشخص شود که آیا پایداری از نوع مجانبی است، یا سیستم مورد مطالعه ممکن است در نقطه‌ای بجز  $v(X) = 0$  «گیر کند» (متوقف شود).

سیستم توصیف شده با رابطه (۳۵-۱۰) را خود مختار می‌نامند، زیرا در آن تابع  $f(\cdot)$ ، تابعی صریح از زمان نیست. روش لیاپونوف، به سیستمهای غیر خود مختار نیز قابل توسیع است. در این سیستمها، زمان شناسه‌ای در تابع غیرخطی است. برای جزئیات بیشتر در این مورد، مرجعهای [۴] و [۱۷] را ببینید.

#### ■ مثال ۴-۱۰

سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{X} = -AX \quad (۳۶-۱۰)$$

که در آن  $A$  ماتریس  $m \times m$  و معین مثبت است. نشان دهید تابع منتخب لیاپونوف این سیستم، به شکل زیر است

$$v(X) = \frac{1}{2} X^T X \quad (۳۷-۱۰)$$

این تابع پیوسته و همواره نامنفی است. با مشتقگیری از این تابع، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \dot{v}(X) &= X^T \dot{X} \\ &= X^T (-AX) \\ &= -X^T AX \end{aligned} \quad (۳۸-۱۰)$$

که همواره غیرمثبت است، زیرا  $A$  ماتریسی معین مثبت است. در نتیجه، (۳۷-۱۰) به‌راستی یک تابع لیاپونوف برای سیستم (۳۶-۱۰) خواهد بود. سیستم پایداری مجانبی دارد، زیرا  $\dot{v}(X)$  تنها در  $X = 0$  صفر می‌شود، و در کلیه نقاط دیگر،  $X$  باید کاهش یابد. ■

#### ■ مثال ۱۰-۵

سیستم مکانیکی جرم-فنر زیر را که در آن فنر و میراگر، هر دو غیرخطی‌اند، در نظر بگیرید

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + k(x) = 0 \quad (۳۹-۱۰)$$

توابع  $b(\cdot)$  و  $k(\cdot)$  توابع ربع اول و سوم پیوسته‌اند، به‌طوری‌که

$$\begin{array}{lll} \dot{x}b(\dot{x}) > 0 & \dot{x} \neq 0 & \text{به‌ازای} \\ xk(x) > 0 & x \neq 0 & \text{به‌ازای} \end{array} \quad (۴۰-۱۰)$$

تابع لیاپونوف را چنین پیشنهاد می‌کنیم

$$v(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x k(\lambda) d\lambda \quad (۴۱-۱۰)$$

با مشتقگیری از این تابع، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \dot{v}(x, \dot{x}) &= \dot{x}\ddot{x} + k(x)\dot{x} \\ &= -\dot{x}b(\dot{x}) - k(x)\dot{x} + k(x)\dot{x} \\ &= -\dot{x}b(\dot{x}) \end{aligned} \quad (۴۲-۱۰)$$

در نتیجه،  $\dot{v}(\cdot)$  نامثبت اما نیمه معین است، زیرا تابع  $x$  نیست و فقط تابع  $\dot{x}$  است. برای گرفتن نتیجه‌ای مبنی بر پایداری مجانبی، باید اطمینان حاصل کنیم که سیستم در مقادیر غیر صفر  $x$ ، «گیر نمی‌کند» (متوقف نمی‌شود). برای مطالعه کلیه مسیرهایی که در آنها  $\dot{x} = 0$  باید در نظر بگیریم که

$$\ddot{x} = -k(x) \quad (۴۳-۱۰)$$

تنها جواب این معادله،  $x = 0$  است. بنابراین سیستم تنها در وضعیت  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$  به حال سکون در می‌آید. ■

#### ■ مثال ۱۰-۶

بازوی مکانیکی ماهری با معادله‌های دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta) \quad (۴۴-۱۰)$$

که به وسیله قانون کنترل زیر، کنترل می‌شود

$$\tau = K_p E - K_d \dot{\Theta} + G(\Theta) \quad (۴۵-۱۰)$$

که در آن  $K_p$  و  $K_d$  ماتریسهای بهره قطری‌اند. توجه کنید که این کنترل‌کننده، بازو را وادار به حرکت در مسیری خاص نمی‌کند، بلکه آن را به نقطه هدف واقع بر مسیر تعیین شده به وسیله معادله‌های دینامیکی، هدایت، و در آنجا مکان را تنظیم می‌کند. سیستم مدار بسته حاصل از مساوی قرار دادن (۴۴-۱۰) و (۴۵-۱۰)، چنین است

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + K_d \dot{\Theta} + K_p \Theta = K_p \Theta_d \quad (۴۶-۱۰)$$

با استفاده از روش لیاپونوف، می‌توان نشان داد که این سیستم همواره پایداری مجانبی دارد [۱۸].

تابع منتخب لیاپونوف زیر را در نظر بگیرید

$$v = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T M(\Theta) \dot{\Theta} + \frac{1}{2} E^T K_p E \quad (۴۷-۱۰)$$

این تابع همواره مثبت یا صفر است، زیرا ماتریس جرم بازو،  $M(\Theta)$ ، و ماتریس بهره مکانی،  $K_p$ ،

ماتریسهای معین مثبت‌اند. با مشتق‌گیری از رابطه (۴۷-۱۰) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{M}(\Theta) \dot{\Theta} + \dot{\Theta}^T M(\Theta) \ddot{\Theta} - E^T K_p \dot{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{M}(\Theta) \dot{\Theta} - \dot{\Theta}^T K_d \dot{\Theta} - \dot{\Theta}^T V(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (48-10) \\ &= -\dot{\Theta}^T K_d \dot{\Theta}\end{aligned}$$

این عبارت، تا زمانی که  $K_d$  معین مثبت باشد، نامثبت است. در آخرین مرحله از رابطه (۴۸-۱۰)، از اتحاد جالب زیر استفاده کرده‌ایم

$$\frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{M}(\Theta) \dot{\Theta} = \dot{\Theta}^T V(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (49-10)$$

که می‌توان آن را با مطالعه ساختمان معادله‌های حرکت لاگرانژ [۱۸-۲۰]، نشان داد (تمرین ۶-۱۷ را نیز ببینید).

حال تحقیق می‌کنیم که آیا سیستم می‌تواند با خطای غیر صفر، «گیر» کند یا نه. نظر به اینکه  $\dot{v}$  تنها در راستای مسیرهایی که در آنها  $\dot{\Theta} = 0$  و  $\ddot{\Theta} = 0$  است، می‌تواند صفر باقی بماند، از رابطه (۴۶-۱۰) در می‌یابیم که در این حالت

$$K_p E = 0 \quad (50-10)$$

و چون  $K_p$  ناکین است، نتیجه می‌شود

$$E = 0 \quad (51-10)$$

در نتیجه، اگر قانون کنترل (۴۵-۱۰) برای سیستم (۴۴-۱۰) به‌کار رود، همواره پایداری مجانبی وجود خواهد داشت.

این اثبات، از آن نظر اهمیت دارد که تا حدودی دلیل کارکردن روباتهای صنعتی امروز را توضیح می‌دهد. بیشتر روباتهای صنعتی، از سیستم کنترل ساده سرو با رانش خطا، و گاهی همراه با مدل‌های گرانی، استفاده می‌کنند، که شباهت بسیاری به رابطه (۴۵-۱۰) دارند. ■

تمرینهای ۱۰-۱۱ تا ۱۰-۱۶ مثالهای دیگری از قوانین کنترل غیرخطی در بازوهای مکانیکی ماهرند که پایداری آنها با روش لیاپونوف قابل اثبات است. نظریه لیاپونوف، اخیراً در گزارشهای تحقیقاتی روباتیکی، موارد استفاده فراوانی پیدا کرده است [۱۸-۲۵].

## ۸-۱۰ سیستمهای کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی

در این بخش، کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی را معرفی می‌کنیم. اگر چه این روش کنترل، در حال حاضر در روباتهای صنعتی به‌کار نمی‌رود، اما در چندین مرکز تحقیقاتی، فعالیتهایی در



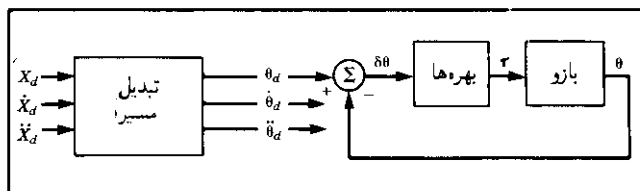
این زمینه انجام می‌شود.

### مقایسه با روشهای مبتنی بر مفصل

در کلیه روشهای کنترل بازوی مکانیکی ماهر که تاکنون شرح داده شد، فرض کردیم که مسیر مورد نظر، برحسب تابعهای زمانی مکان، سرعت، و شتاب مفصل، معلوم است. با داشتن این ورودیهای مورد نظر، روشهای کنترل مبتنی بر مفصل را طراحی کردیم. در این روشها، خطاهای مسیر با پیدا کردن اختلاف بین کمیتهای مطلوب و کمیتهای واقعی، که در فضای مفصلی بیان می‌شود، تعیین می‌شوند. در بسیاری موارد، می‌خواهیم مجری نهایی خط مستقیم، و یا مسیرهایی با شکل توصیف‌شده در مختصات دکارتی را دنبال کند. چنانکه در فصل ۷ دیدیم، می‌توان تابعهای زمانی مسیرهایی فضای مفصلی را، که با مسیرهایی راست‌خط دکارتی متناظرند، محاسبه کرد. شکل ۱۰-۱۰ کاربرد این روش را در کنترل مسیر بازوی مکانیکی ماهر، نشان می‌دهد. ویژگی مهم این روش، استفاده از فرایند تبدیل مسیر برای محاسبه مسیرهایی مفصلی است. به دنبال این عمل، از نوعی روش سروی مبتنی بر مفصل، مطابق آنچه مطالعه کرده‌ایم، استفاده خواهد شد. فرایند تبدیل مسیر در صورتی که به‌طور تحلیلی انجام شود، بسیار دشوار است (به سبب هزینه محاسباتی). محاسبات لازم برای این تبدیل، عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\Theta_d &= INVJIN(\mathcal{X}_d) \\ \dot{\Theta}_d &= J^{-1}(\Theta)\dot{\mathcal{X}}_d \\ \ddot{\Theta}_d &= \dot{J}^{-1}(\Theta)\dot{\mathcal{X}}_d + J^{-1}(\Theta)\ddot{\mathcal{X}}_d\end{aligned}\quad (۱۰-۵۲)$$

اگر محاسبات فوق اصولاً در سیستمهای کنونی اجرا شوند، آنگاه معمولاً  $\Theta_d$  با استفاده از معادله‌های سینماتیکی وارون به‌دست می‌آید، و سپس سرعتها و شتابهای مفصلی به‌طور عددی به‌وسیله تفاضلهای اول و دوم، محاسبه می‌شوند. اما چنین روشهای مشتقگیری عددی، باعث تقویت نویز می‌شوند و تأخیر ایجاد می‌کنند، مگر آنکه بتوان آنها را با یک فیلتر غیر سببی انجام داد.<sup>۱</sup> در



شکل ۱۰-۱۰ روش کنترل مبتنی بر مفصل با ورودی مسیر دکارتی.

۱. مشتقگیری عددی، ایجاد تأخیر می‌کند، مگر آنکه بتوان آن را بر اساس مقادیر قبلی، فعلی، و بعدی انجام داد. اگر کل مسیر از پیش طراحی شود، می‌توان از این نوع مشتقگیری عددی «غیر سببی» استفاده کرد.

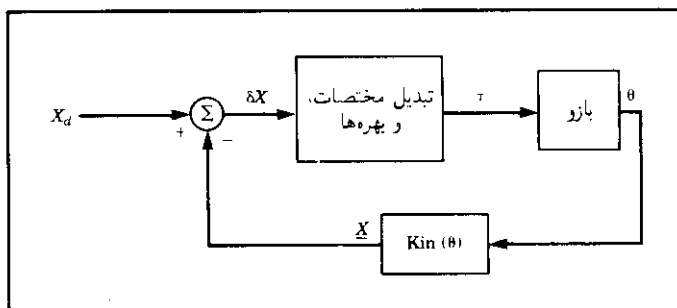
نتیجه، دو راه در پیش خواهیم داشت: پیدا کردن راهی کم هزینه‌تر برای محاسبه رابطه (۱۰-۵۲)، و یا پیشنهاد روش کنترلی متفاوت که به اطلاعات فوق نیازی نداشته باشد.

در شکل ۱۰-۱۱ رهیافت دیگری برای اعمال کنترل نشان داده شده است. در این روش، مکان حس شده بازو، بلافاصله به وسیله معادله‌های سینماتیکی به مختصات دکارتی انتقال داده می‌شود. سپس این توصیف دکارتی از مکان، با مکان دکارتی مطلوب مقایسه می‌شود، و خطاهای موجود در فضای دکارتی را تشکیل می‌دهد. روشهای کنترلی که در آنها خطاها در فضای دکارتی شکل می‌گیرند، روشهای کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی خوانده می‌شوند. برای سادگی، پس‌خواند سرعت در شکل ۱۰-۱۱ نشان داده نشده است، اما در کاربردها باید آن را در نظر گرفت.

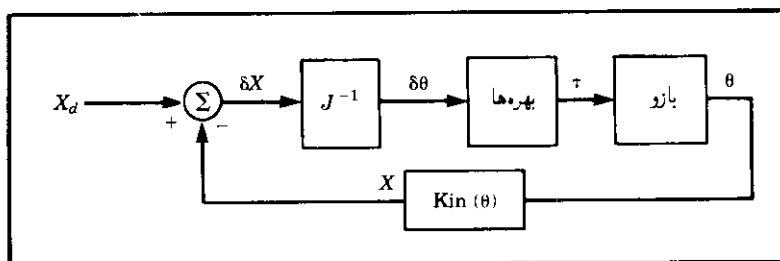
فرایند تبدیل مسیر را می‌توان با نوعی تبدیل مختصاتی در داخل حلقه سرو جایگزین کرد. توجه کنید که در کنترل کننده‌های مبتنی بر مختصات دکارتی، در حلقه سرو محاسبات بسیاری انجام می‌شود (به دلیل وجود معادله‌های سینماتیکی و تبدیلی که حالا در «داخل حلقه» قرار دارند). این یکی از عیبهای روشهای مبتنی بر مختصات دکارتی است، زیرا در این صورت، سیستم حاصل ممکن است در مقایسه با سیستمهای مبتنی بر مفصل، بسامد نمونه برداری پایینتری داشته باشد (به ازای ظرفیت کامپیوتری برابر). این امر، در حالت کلی، پایداری و قابلیت‌های دفع اغتشاش سیستم را کاهش می‌دهد.

### روشهای کنترل دکارتی شهودی

یک روش کنترل ممکن که بدون استدلال به ذهن خطور می‌کند، در شکل ۱۰-۱۲ نشان داده شده است. در این روش، مکان دکارتی واقعی با مکان مطلوب مقایسه می‌شود تا خطای  $\delta X$  در فضای دکارتی تشکیل شود. این خطا را، که اگر سیستم کنترل کار خود را به خوبی انجام دهد ناچیز است، می‌توان به وسیله ژاکوبی وارون، در محدوده جابه‌جایی کوچکی در فضای مفصلی، نگاشت. سپس خطاهای حاصل در فضای مفصلی،  $\delta\theta$ ، در بهره‌ها ضرب می‌شود و گشتاورهایی



شکل ۱۰-۱۱ مفهوم روش کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی.

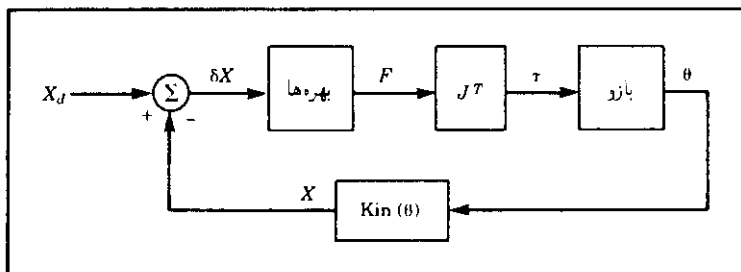


شکل ۱۰-۱۲ روش کنترل دکارتی با ژاکوبی وارون.

را به دست می‌دهد. این گشتاورها میزان خطاها را کاهش می‌دهند. توجه کنید که شکل ۱۰-۱۲، کنترل‌کننده ساده‌شده‌ای را نشان می‌دهد که در آن پس‌خوراند سرعت نشان داده نشده است (این پس‌خوراند را می‌توان به آسانی در نظر گرفت). روش فوق را کنترل‌کننده ژاکوبی وارون می‌نامند.

روش دیگری که به ذهن خطور می‌کند، در شکل ۱۰-۱۳ نشان داده شده است. در این روش، بردار خطای دکارتی، در بهره ضرب می‌شود و بردار نیروی دکارتی را به دست می‌دهد. این بردار را می‌توان به صورت نیروی دکارتی در نظر گرفت که اگر به مجری نهایی روبات اعمال شود، آن را در جهتی می‌راند که خطای دکارتی کاهش یابد. با نداشت این بردار نیروی دکارتی (در واقع بردار نیرو-گشتاور دکارتی) به وسیله ترانزفاده ژاکوبی، گشتاورهای مفصلی معادل محاسبه شده، برای کاهش خطاهای مشاهده شده به کار می‌روند. این روش را کنترل‌کننده ژاکوبی ترانزفاده می‌نامیم.

کنترل‌کننده‌های ژاکوبی وارون و ژاکوبی ترانزفاده، هر دو در واقع به طریق شهودی به دست آمده‌اند. به همین دلیل، حتی از پایداری آنها نیز مطمئن نیستیم، چه رسد از عملکرد درست آنها. همچنین، جالب اینجاست که این دو کنترل‌کننده، با یکدیگر شباهت کامل دارند؛ به استثنای آنکه در یکی از وارون ژاکوبی، و در دیگری از ترانزفاده آن استفاده شده است. به خاطر آورید که در حالت



شکل ۱۰-۱۳ روش کنترل دکارتی ژاکوبی ترانزفاده.

کلی، ماتریس وارون با ماتریس ترانزاده برابر نیست (تنها در بازویی کاملاً دکارتی است که داریم:  $J^T = J^{-1}$ ). عملکرد دینامیکی دقیق چنین سیستمهایی (مثلاً اگر در فضای خطای مرتبه دوم بیان شود)، بسیار پیچیده خواهد بود. با وجود این، هر دو روش را می‌توان پایدار کرد، اما عملکرد آنها در سراسر فضای کاری رضایتبخش نخواهد بود. پایداری با انتخاب بهره‌های مناسب، و اعمال نوعی پس‌خوراند سرعت، که در شکل ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳ نشان داده نشده است، انجام می‌شود. هر دو کنترل‌کننده فوق، اگر چه کار می‌کنند، اما هیچ‌یک درست نیستند، زیرا نمی‌توان بهره‌های ثابتی که قطبهای مدار بسته ثابت به دست دهند، انتخاب کرد. پاسخ دینامیکی این کنترل‌کننده‌ها، برحسب پیکربندی بازو، تغییر خواهد کرد.

### روش مستقل‌سازی دکارتی

در کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مختصات دکارتی نیز مانند کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مفصل، عملکرد خوب به معنای خطای دینامیکی ثابت و یکسان در کلیه پیکربندیهای بازوی مکانیکی ماهر است. از آنجا که در روشهای دکارتی، خطاها در فضای دکارتی بیان می‌شوند، باید سیستمی طراحی کنیم که در کلیه پیکربندیهای ممکن بازو، در حالت میرایی بحرانی باشد، و میزان خطا را به حداقل کاهش دهد.

در کنترل‌کننده دکارتی نیز، مانند کنترل‌کننده مبتنی بر مفصل (که برپایه مدل خطی و مستقل‌کننده بازو عمل می‌کند)، می‌توان به نتایج رضایتبخش دست یافت. ولی در این حالت، معادله‌های دینامیکی حرکت بازو را باید برحسب متغیرهای دکارتی نوشت. این کار را می‌توان با استفاده از آنچه در فصل ۶ گفته شد، انجام داد. شکل به دست آمده برای معادله‌های دکارتی، بسیار شبیه به شکل معادله‌های فضای مفصلی است. معادله‌های دینامیکی جسم صلب چنین نوشته می‌شوند

$$\mathcal{F} = M_x(\Theta)\ddot{\mathcal{X}} + V_x(\Theta, \dot{\Theta}) + G_x(\Theta) \quad (۱۰-۵۳)$$

که در آن  $\mathcal{F}$  بردار نیرو-گشتاور فرضی است که بر روی مجری نهایی روپات عمل می‌کند، و  $\mathcal{X}$  بردار دکارتی مشخص‌کننده مکان و جهتگیری مجری نهایی است [۸]. مانند آنچه در حالت فضای مفصلی دیدیم،  $M_x(\Theta)$  ماتریس جرم در فضای دکارتی،  $V_x(\Theta, \dot{\Theta})$  بردار جمله‌های وابسته به سرعت در فضای دکارتی، و  $G_x(\Theta)$  نیز بردار جمله‌های گرانی در فضای دکارتی است.

مانند حالت فضای مفصلی، در اینجا نیز می‌توانیم معادله‌های دینامیکی را در یک کنترل‌کننده مستقل و خطی‌کننده به کار ببریم. چون معادله (۱۰-۵۳)، بردار  $\mathcal{F}$  (بردار نیروی دکارتی فرضی که به دست روپات وارد می‌شود) را محاسبه می‌کند، در نتیجه برای اعمال کنترل، باید از ترانزاده ژاکوبی نیز استفاده کنیم. به عبارت دیگر، پس از آنکه  $\mathcal{F}$  را از (۱۰-۵۳) به دست آوریم، چون نمی‌توانیم واقعاً نیروی دکارتی به مجری نهایی وارد کنیم، در عوض گشتاورهای مفصلی لازم برای

متعادل ساختن سیستم را با فرض اینکه این نیرو اعمال شده است، محاسبه خواهیم کرد. پس

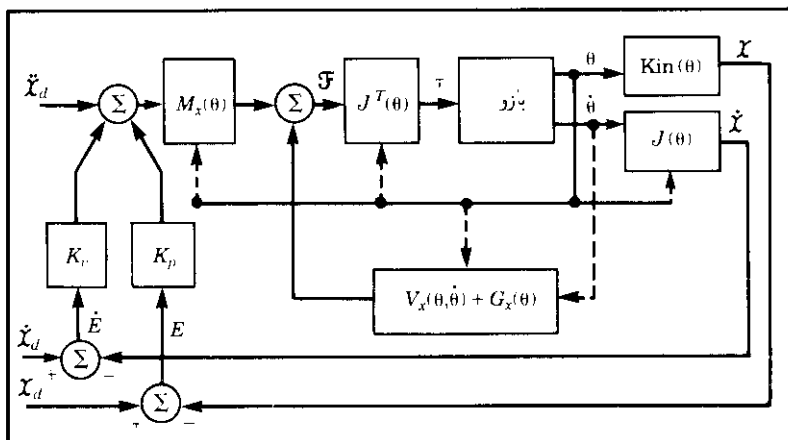
$$\tau = J^T(\theta) \mathcal{F} \quad (۱۰-۵۴)$$

در شکل ۱۰-۱۴، یک سیستم کنترل بازوی دکارتی، که در آن از مستقل سازی دینامیکی کامل استفاده شده است، دیده می شود. توجه کنید که ترانزادۀ ژاکوبی، پیش از بازو قرار گرفته است. همچنین، در این کنترل کننده مسیره های دکارتی را می توان مستقیماً و بدون نیاز به تبدیل مسیر، توصیف کرد.

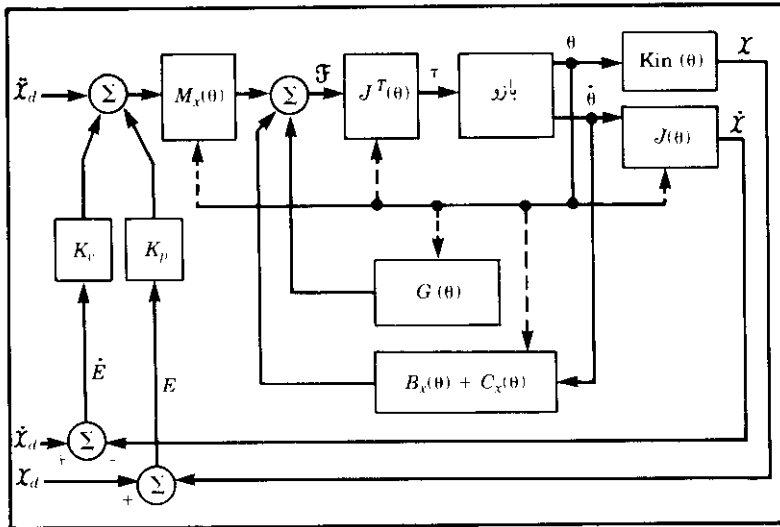
مانند حالت فضای مفصلی، در اینجا نیز با استفاده از سیستم کنترلی با آهنگ دوگانه، می توان کاربرد عملی سیستم فوق را به نمایش گذاشت. شکل ۱۰-۱۵، نمودار بلوکی یک کنترل کننده مستقل و خطی کننده دکارتی را نشان می دهد. در این کنترل کننده، پارامترهای دینامیکی به صورت تابعهایی از فقط مکان بازوی مکانیکی ماهر، نوشته شده اند. مقادیر جدید این پارامترها، با آهنگی آهسته تر از آهنگ سرؤ محاسبه می شوند (به وسیله فرایند زمینه ای، و یا کامپیوتر کنترل کننده ثانویه). این دوگانه بودن آهنگها، مناسب است، زیرا برای ماکزیمم کردن پایداری و دفع اغتشاش، به آهنگ سرؤ بالا (۵۰۰ Hz یا بیشتر) نیازمندیم. چون پارامترهای دینامیکی فقط تابع مکان بازو هستند، کافی است با آهنگی که سرعت تغییر وضعیت بازو را نشان می دهد، محاسبه شوند، و این آهنگ احتمالاً بیش از ۱۰۰ Hz نخواهد بود [۸].

## ۹-۱۰ کنترل تطبیقی

در بحث کنترل وابسته به مدل، مشاهده کردیم که پارامترهای بازوی مکانیکی ماهر، اغلب به طور دقیق مشخص نیستند. هنگامی که پارامترهای مدل بر پارامترهای دستگاه واقعی منطبق نباشند،



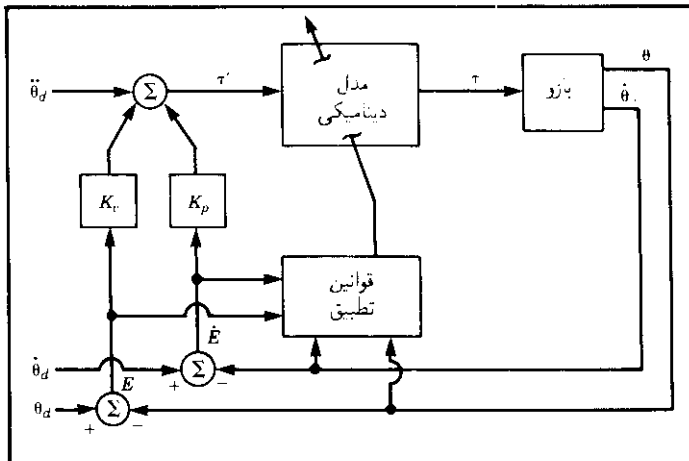
شکل ۱۰-۱۴ روش کنترل دکارتی وابسته به مدل.



شکل ۱۰-۱۵ کاربرد روش کنترل دکارتی وابسته به مدل.

خطاهای سر و پدید می‌آیند (چنانکه در رابطه (۱۰-۲۵) به‌طور صریح حاصل شدند). از این خطاهای سر و می‌توان برای پیدا کردن روشی تطبیقی، که مقادیر پارامترهای مدل را تا از بین رفتن کامل خطاها تغییر می‌دهد، استفاده کرد. تاکنون چندین روش تطبیقی برای این منظور پیشنهاد شده است.

یک روش تطبیقی ایدئال، در شکل ۱۰-۱۶ نشان داده شده است. در این روش، از قانون



شکل ۱۰-۱۶ مفهوم یک کنترل کننده تطبیقی در بازوی مکانیکی ماهر.

کنترل وابسته به مدل (که در این فصل به دست آمد)، استفاده می‌شود. در طی فرایند تطبیق، که بر اساس مشاهده حالت بازوی مکانیکی ماهر و خطاهای سرو انجام می‌شود، پارامترهای مدل غیرخطی تا محو کامل خطاها، تغییر داده می‌شوند. چنین سیستمی قادر به فراگیری خصوصیات دینامیکی خود است. طراحی و تحلیل سیستمهای تطبیقی، از محدوده این کتاب خارج است. در مرجعهای [۲۰، ۲۱]، روشی پیشنهاد شده است که ساختمانی دقیقاً مطابق با شکل ۱۰-۱۶ دارد، و در کلیه حالتها پایدار است. مرجع [۲۲] نیز روشی مشابه را ارائه می‌دهد.

## مراجع

- [1] R. P. Paul, "Modeling, Trajectory Calculation, and Servoing of a Computer Controlled Arm," Technical Report AIM-177, Stanford University Artificial Intelligence Laboratory, 1972.
- [2] B. Markiewicz, "Analysis of the Computed Torque Drive Method and Comparison with Conventional Position Servo for a Computed-Controlled Manipulator," Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33-601, March 1973.
- [3] A. Bejczy, "Robot Arm Dynamics and Control," Jet Propulsion Laboratory Technical Memo 33-669, February 1974.
- [4] J. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York, 1961.
- [5] P. K. Khosla, "Some Experimental Results on Model-Based Control Schemes," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.
- [6] M. Leahy, K. Valavanis, and G. Saridis, "The Effects of Dynamic Models on Robot Control," IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.
- [7] M. Leborgne, R. Dumas, J. Borrelly, C. Samson, and B. Espiau, "Nonlinear Control of Robot Manipulators Part 2: Simulation and

- Implementation of a Robust Control Method," Technical Report, IRISA/INRIA, Rennes, France, 1985.
- [8] O. Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 1, 1987.
  - [9] C. An, C. Atkeson, and J. Hollerbach, "Model-Based Control of a Direct Drive Arm, Part II: Control," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.
  - [10] G. Franklin and J. Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1989.
  - [11] A. Liegeois, A. Fournier, and M. Aldon, "Model Reference Control of High Velocity Industrial Robots," *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, 1980.
  - [12] M. Raibert, "Mechanical Arm Control Using a State Space Memory," SME paper MS77-750, 1977.
  - [13] B. Armstrong, "Friction: Experimental Determination, Modeling and Compensation," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, April 1988.
  - [14] B. Armstrong, O. Khatib, and J. Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm," IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.
  - [15] A.M. Lyapunov, "On the General Problem of Stability of Motion," (in Russian), Kharkov Mathematical Society, Soviet Union, 1892.
  - [16] C. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.
  - [17] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, 1978.
  - [18] S. Arimoto and F. Miyazaki, "Stability and Robustness of PID Feedback Control for Robot Manipulators of Sensory Capability," Third International Symposium of Robotics Research, Gouvieux, France, July 1985.



- [19] D. Koditschek, "Adaptive Strategies for the Control of Natural Motion," *Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control*, Ft. Lauderdale, December 1985.
- [20] J. Craig, P. Hsu, and S. Sastry, "Adaptive Control of Mechanical Manipulators," IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April 1986.
- [21] J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley Reading, Mass., 1988.
- [22] J.J. Slotine and W. Li, "On the Adaptive Control of Mechanical Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 3, 1987.
- [23] R. Kelly and R. Ortega, "Adaptive Control of Robot Manipulators: An Input-Output Approach," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.
- [24] H. Das, J.J. Slotine, and T. Sheridan, "Inverse Kinematic Algorithms for Redundant Systems," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.
- [25] T. Yabuta, A. Chona, and G. Beni, "On the Asymptotic Stability of the Hybrid Position/Force Control Scheme for Robot Manipulators," IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 1988.

## تمرینها

۱-۱۵ [۱۵] معادله‌های کنترل غیرخطی یک کنترل کننده تقسیم شده  $\alpha$ ,  $\beta$  را برای سیستم زیر تعیین کنید

$$\tau = (2\sqrt{\theta} + 1) \ddot{\theta} + 3\dot{\theta}^2 - \sin(\theta)$$

پره‌ها را طوری انتخاب کنید که این سیستم همواره در حالت میرایی بحرانی باشد، و داشته باشیم:  $k_{CL} = 10$ .

۲-۱۰ [۱۵] معادله‌های کنترل غیرخطی یک کنترل کننده تقسیم شده  $\alpha$ ,  $\beta$  را برای سیستم زیر تعیین کنید

$$\tau = 5\ddot{\theta}\ddot{\theta} + 2\ddot{\theta} - 13\dot{\theta}^2 + 5$$

بهره‌ها را طوری انتخاب کنید که این سیستم همواره در حالت میرایی بحرانی باشد، و داشته باشیم:  $k_{CL} = 10$ .

۳-۱۰ [۱۹] نمودار بلوکی کنترل کننده فضای مفصلی را برای بازوی با دو رابط بخش ۶-۷، طوری رسم کنید که بازو در سراسر فضای کاری خود، در حالت میرایی بحرانی باشد. معادله‌ها را در داخل بلوکهای نمودار بلوکی بنویسید.

۴-۱۰ [۲۰] نمودار بلوکی کنترل کننده فضای دکارتی را برای بازوی با دو رابط بخش ۶-۷، طوری رسم کنید که بازو در سراسر فضای کاری خود، در حالت میرایی بحرانی باشد (مثال ۶-۶ را ببینید). معادله‌ها را در داخل بلوکهای نمودار بلوکی بنویسید.

۵-۱۰ [۱۸] برای سیستمی با معادله‌های دینامیکی زیر، یک سیستم کنترل تعقیب مسیر طراحی کنید

$$\tau_1 = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\tau_2 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + v_2 \dot{\theta}_2$$

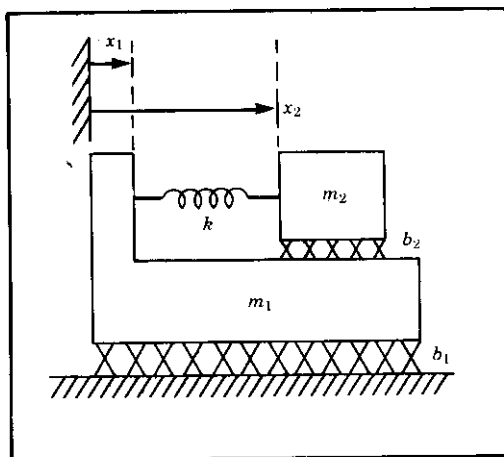
آیا این معادله‌ها می‌توانند معرّف یک سیستم واقعی باشند؟

۶-۱۰ [۱۷] در سیستم کنترل طرح شده برای بازوی با یک رابط مثال ۱۰-۳، خطای مکان حالت پایا را به صورت تابعی از خطای پارامتر جرم به دست آورید. فرض کنید:  $\psi_m = m - \hat{m}$ . نتیجه کلی باید تابعی از  $l$ ,  $g$ ,  $\theta$ ,  $\psi_m$  و  $k_p$  باشد. این تابع به ازای چه مکانی از بازو ماکزیمم خواهد بود؟

۷-۱۰ [۲۶] برای سیستم مکانیکی با دو درجه آزادی که در شکل ۱۰-۱۷ نشان داده شده است، کنترل کننده‌ای طرح کنید که بتواند  $x_1$  و  $x_2$  را به تعقیب مسیرهای مربوطه وا دارد، و همچنین با قرار گرفتن در حالت میرایی بحرانی، اغتشاشها را دفع کند.

۸-۱۰ [۳۰] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط را که در بخش ۶-۷ بررسی شد، در فضای دکارتی در نظر بگیرید. عبارتهایی برای حساسیت گشتاور محاسبه شده برحسب انحرافهای جزئی  $\Theta$  به دست آورید. درباره تعداد دفعات محاسبه معادله‌های دینامیکی در کنترل کننده شکل ۱۰-۷، به صورت تابعی از سرعتهای متوسط مفصلی در حین کار عادی، چه می‌توان گفت؟

۹-۱۰ [۳۲] معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر مثال ۶-۶ را در فضای دکارتی در نظر بگیرید. عبارتهایی برای حساسیت گشتاور محاسبه شده برحسب انحرافهای کوچک  $\Theta$  به دست آورید. درباره تعداد دفعات محاسبه معادله‌های دینامیکی در کنترل کننده مشابه



شکل ۱۰-۱۷ سیستم مکانیکی با دو درجه آزادی.

شکل ۱۰-۱۵، به صورت تابعی از سرعتهای متوسط مفصلی در حین کار عادی، چه می توان گفت؟

۱۰-۱۵ [۱۵] یک سیستم کنترل برای سیستم زیر طرح کنید

$$f = 5x\dot{x} + 2\ddot{x} - 12$$

بهره ها را طوری انتخاب کنید که سیستم همواره در حالت میرایی بحرانی، و سختی مدار بسته آن برابر با ۲۰ باشد.

۱۱-۱۰ [۲۰] یک سیستم تنظیم مکان را که (بدون از دست دادن حالت کلی خود)  $\Theta_d$  را برابر با صفر نگه می دارد، در نظر بگیرید. ثابت کنید قانون کنترل زیر

$$\tau = -K_p\Theta - M(\Theta)K_v\dot{\Theta} + G(\Theta)$$

سیستمی غیرخطی با پایداری مجانبی به دست می دهد. می توانید  $K_v$  را به شکل  $K_v = k_v I_n$  فرض کنید، که در آن  $k_v$  کمیتی اسکالر، و  $I_n$  ماتریس همانی  $n \times n$  است. راهنمایی: این مسئله شبیه مثال ۱۰-۶ است.

۱۲-۱۰ [۲۰] یک سیستم تنظیم مکان را که (بدون از دست دادن حالت کلی خود)  $\Theta_d$  را برابر با صفر نگه می دارد، در نظر بگیرید. ثابت کنید قانون کنترل زیر

$$\tau = -K_p\Theta - \hat{M}(\Theta)K_v\dot{\Theta} + G(\Theta)$$

سیستمی غیرخطی با پایداری مجانبی به دست می دهد. می توانید  $K_v$  را به شکل

۱۳-۱۰ [۲۵] یک سیستم تنظیم مکان را که (بدون از دست دادن حالت کلی خود)  $\Theta_d$  را برابر با صفر نگه می‌دارد، در نظر بگیرید. ثابت کنید که قانون کنترل زیر

$$\tau = -M(\Theta) [K_p \Theta + K_v \dot{\Theta}] + G(\Theta)$$

سیستمی غیرخطی با پایداری مجانبی به‌دست می‌دهد. می‌توانید  $K_v$  را به شکل  $K_v = k_v I_n$  فرض کنید، که در آن  $k_v$  کمیتی اسکالر، و  $I_n$  ماتریس همانی  $n \times n$  است. راهنمایی: این مسئله شبیه مثال ۶-۱۰ است.

۱۴-۱۰ [۲۵] یک سیستم تنظیم مکان را که (بدون از دست دادن حالت کلی خود)  $\Theta_d$  را برابر با صفر نگه می‌دارد، در نظر بگیرید. ثابت کنید قانون کنترل زیر

$$\tau = -\hat{M}(\Theta) [K_p \Theta + K_v \dot{\Theta}] + G(\Theta)$$

سیستمی غیرخطی با پایداری مجانبی به‌دست می‌دهد. می‌توانید  $K_v$  را به شکل  $K_v = k_v I_n$  فرض کنید، که در آن  $k_v$  کمیتی اسکالر، و  $I_n$  ماتریس همانی  $n \times n$  است. ماتریس  $\hat{M}(\Theta)$  برآوردی معین مثبت از ماتریس جرم بازوی مکانیکی ماهر است. راهنمایی: این مسئله شبیه مثال ۶-۱۰ است.

۱۵-۱۰ [۲۸] یک سیستم تنظیم مکان را که (بدون از دست دادن حالت کلی خود)  $\Theta_d$  را برابر با صفر نگه می‌دارد، در نظر بگیرید. ثابت کنید قانون کنترل زیر

$$\tau = -K_p \Theta - K_v \dot{\Theta}$$

سیستمی غیرخطی و پایدار به‌دست می‌دهد. نشان دهید که پایداری این سیستم مجانبی نیست و عبارتی برای خطای حالت پایا به‌دست آورید. راهنمایی: این مسئله شبیه مثال ۶-۱۰ است.

۱۶-۱۰ [۳۰] ثابت کنید کنترل‌کننده دکارتی «ترانهادۀ ژاکوبی»، که در بخش ۸-۱۰ معرفی شد، همواره پایدار است. پس‌خوراند سرعت مناسبی برای پایدار کردن سیستم، به‌دست آورید. راهنمایی: مرجع [۱۸] را ببینید.

۱۷-۱۰ [۱۵] یک کنترل‌کننده تعقیب مسیر برای سیستم داده شده با معادله‌های دینامیکی زیر، طراحی کنید

$$f = ax^T \dot{x} \ddot{x} + b \dot{x}^T + c \sin(x)$$

تمرینها ۴۰۳

طراحی را طوری انجام دهید که در کلیه وضعیتهای، خطاهای سیستم در حالت میرایی بحرانی، از بین بروند.

۱۸-۱۵ [۱۵] سیستمی با معادله دینامیکی مدار باز زیر

$$\tau = m\ddot{\theta} + b\dot{\theta}^2 + c\dot{\theta}$$

به وسیله قانون کنترل زیر، کنترل می شود

$$\tau = m[\ddot{\theta}_d + k_v\dot{e} + k_p e] + \sin(\theta)$$

معادله دیفرانسیلی بنویسید که عملکرد سیستم را در حالت مدار بسته نشان دهد.

تمرین برنامه نویسی (قسمت ۱۵)

تمرین برنامه نویسی قسمت ۹ را تکرار کنید، ولی این بار همان آزمونها را با استفاده از کنترل کننده جدیدی که در آن از مدل دینامیکی کامل بازوی با سه رابط برای مستقل و خطی سازی سیستم استفاده می شود، انجام دهید. برای این کار، از بهره زیر استفاده کنید

$$K_p = \begin{bmatrix} 100/0 & 0/0 & 0/0 \\ 0/0 & 100/0 & 0/0 \\ 0/0 & 0/0 & 100/0 \end{bmatrix}$$

همچنین،  $K_v$  را ماتریسی قطری در نظر بگیرید، به طوری که حالت میرایی بحرانی برای کلیه پیکربندیهای بازو برقرار باشد. نتایج به دست آمده را با نتایج حاصل از کنترل کننده ساده تر در تمرین برنامه نویسی (قسمت ۹)، مقایسه کنید.



## کنترل نیرو در بازوهای مکانیکی ماهر

### ۱-۱۱ مقدمه

کنترل مکان در بازوهای مکانیکی ماهر، تا هنگامی که بازو مسیری را در فضا دنبال می‌کند، مناسب است. اما هنگامی که مجری نهایی با محیط تماس پیدا می‌کند، این کنترل به تنهایی کافی نخواهد بود. یک بازوی مکانیکی ماهر را در نظر بگیرید که شیشه پنجره‌ای را با اسفنج می‌شوید. به دلیل انعطاف‌پذیری اسفنج، می‌توان با کنترل مکان مجری نهایی نسبت به شیشه، نیروی اعمال شده به پنجره را تنظیم کرد. اگر انعطاف‌پذیری اسفنج بسیار بالا باشد، یا تعیین مکان شیشه با دقت زیاد انجام گیرد، کنترل مکان به تنهایی می‌تواند نتیجه مورد نظر را به دست دهد.

اما اگر سختی مجری نهایی، ابزار، یا محیط بالا باشد، انجام کارهایی که در آنها بازوی مکانیکی ماهر با سطوح تماس پیدا می‌کند، بسیار دشوار خواهد شد. فرض کنید بازو به جای شستن پنجره با اسفنج، بخواهد رنگ روی شیشه پنجره را با استفاده از یک ابزار تراشنده، پاک کند. انجام این عمل، در صورت وجود هرگونه عدم قطعیت در مکان سطح شیشه، یا خطایی در سرّوی مکان بازو، غیرممکن خواهد شد. این بدان معناست که یا شیشه خواهد شکست، و یا بازو ابزار را در مجاورت سطح شیشه به صورت رفت و برگشتی حرکت خواهد داد، بدون آنکه با آن تماس پیدا کند. در هر دو مورد شستن شیشه و تراشیدن رنگ از روی آن، معقولتر خواهد بود اگر به جای تعیین مکان صفحه شیشه، نیرویی که باید عمود بر سطح شیشه وارد شود، را مشخص کنیم.

در این فصل، بیش از فصلهای دیگر، روشهایی را بررسی می‌کنیم که هنوز در روباتهای صنعتی (بجز به ساده‌ترین شکل ممکن) به کار گرفته نشده‌اند. تأکید این فصل، بر معرفی کنترل‌کننده ترکیبی مکان و نیروست. این روش کنترل، ممکن است روزی برای انجام کارهایی که به کنترل

نیرو نیاز دارند، در روباتهای صنعتی به کار رود. اما صرف نظر از اینکه کدام روش (روشها) کاربرد عملی پیدا خواهد کرد، بسیاری از مفاهیم مطرح شده در این فصل، همواره معتبر باقی خواهند ماند.

## ۱۱-۲ کاربرد روباتهای صنعتی در عملیات مونتاژ

بیشتر روباتهای صنعتی برای انجام عملیات نسبتاً ساده‌ای چون جوشکاری نقطه‌ای، پاشش رنگ، و بلند کردن و پایین گذاشتن اجسام، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در محدودی از کاربردها، کنترل نیرو به کار گرفته شده است. مثلاً، برخی روباتها می‌توانند کنترل نیروی ساده‌ای را که برای عملیاتی چون سنگزنی و پلیسه‌گیری لازم است، انجام دهند. کاربرد گسترده دیگر روباتها، در خطوط مونتاژ خواهد بود، که در آنها یک یا چند قطعه با یکدیگر «جفت» می‌شوند. در چنین عملیاتی است که تنظیم و کنترل نیروهای تماسی اهمیت فراوان پیدا می‌کند.

کنترل دقیق بازوهای مکانیکی ماهر را به رغم وجود تغییرات و عدم قطعیتها در محیطهای کاری، باید پیش‌نیازی برای کاربرد آنها در عملیات مونتاژ صنعتی دانست. به نظر می‌رسد می‌توان با قرار دادن حساسه‌هایی در دستهای روبات برای تهیه اطلاعات درباره چگونگی عملیات، به پیشرفت مهمی در به کارگیری روباتها در عملیات مونتاژ دست یافت. در حال حاضر، مهارت روباتها در سطح پایینی قرار دارد، و به همین دلیل کاربرد آنها در زمینه مونتاژ اتوماتیک، محدود است.

برای استفاده از بازوهای مکانیکی ماهر در عملیات مونتاژ، باید وضعیت قطعات مونتاژی نسبت به یکدیگر، با دقت زیاد تعیین شود. روباتهای صنعتی کنونی معمولاً برای انجام این عملیات به اندازه کافی دقیق نیستند. از سوی دیگر، شاید ساختن روباتهایی دقیق نیز بی‌معنا باشد، زیرا بازوهای با دقت بیشتر را فقط می‌توان با افزایش اندازه، وزن، و هزینه ساخت، به دست آورد. اما پدید آوردن توانایی اندازه‌گیری و کنترل نیروهای تماسی ایجاد شده در دست، می‌تواند راهی دیگر برای افزایش دقت مؤثر روبات باشد. از آنجا که در این حالت اندازه‌گیرها نسبی هستند، خطاهای مطلق در مکان بازوی مکانیکی و اجسام حمل شده به وسیله آن، در مقایسه با سیستمی که فقط کنترل مکانی دارد، از اهمیت کمتری برخوردارند. چون تغییرات کوچک در مکان نسبی (هنگامی که قطعات دارای سختی متوسط با یکدیگر برخورد می‌کنند)، نیروهای تماسی بزرگی را سبب می‌شوند، دانستن میزان این نیروها و کنترل آنها، دقت مکانی مؤثر را به طرز چشمگیری بالا خواهد برد.

## ۱۱-۳ چهارچوب اعمال کنترل در عملیات مقید شده جزئی

روش کنترل معرفی شده در این فصل، بر چهارچوب کنترلی مبتنی است که در آن حرکت بازوی مکانیکی ماهر، بر اثر تماس با یک یا چند سطح [۳-۱]، به شکل جزئی مقید می‌شود. در این چهارچوب، که برای درک عملیات مقید شده جزئی به کار می‌رود، از مدل ساده شده‌ای که نشان‌دهنده



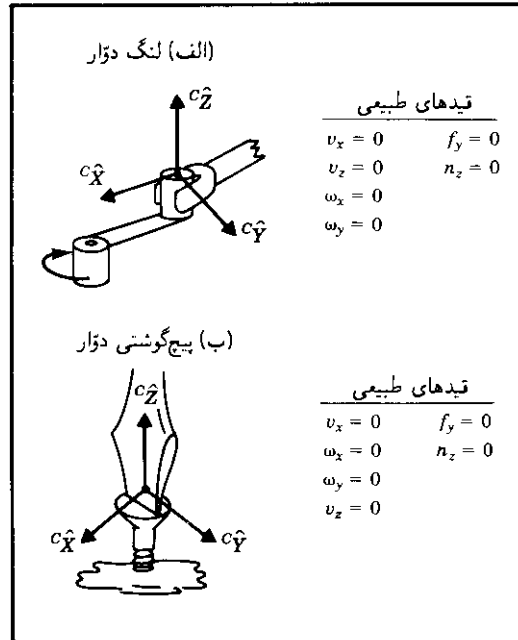
برهم کنش بین مجری نهایی بازو و محیط آن است، استفاده می‌شود. چون ما به توصیف تماس و درجات آزادی علاقه‌مند هستیم، در اینجا فقط نیروهای ناشی از تماس را در نظر می‌گیریم. این معادل است با انجام تحلیلی شبه استاتیکی، که در آن از نیروهای استاتیکی دیگری چون برخی از مؤلفه‌های اصطکاک و گرانی، صرف‌نظر می‌شود. این تحلیل هنگامی نتایج رضایتبخش به‌دست می‌دهد که نیروهای حاصل از تماس بین اجسام نسبتاً سخت، منبع غالب نیروهای وارد بر سیستم باشند.

هر کار انجام شده به‌وسیله بازو را می‌توان به چند کار فرعی تقسیم کرد که هر یک به‌وسیله موقعیت تماسی ویژه‌ای بین مجری نهایی (یا ابزار) و محیط کاری، تعریف می‌شود. به هر یک از این کارهای فرعی، می‌توان مجموعه‌ای از قیدها، به‌نام قیدهای طبیعی را نسبت داد. این مجموعه قیدها، از مشخصات مکانیکی و هندسی عملیات ناشی می‌شوند. مثلاً اگر دست روبات با سطحی صلب و ساکن تماس پیدا کند، مجاز به عبور از میان آن سطح نخواهد بود، و در نتیجه یک قید مکانی طبیعی وجود خواهد داشت. اگر سطح بدون اصطکاک باشد، دست برای اعمال نیروهای دلخواه مماس بر سطح، آزاد نخواهد بود، و در این حالت نیز یک قید نیرویی طبیعی وجود دارد.

در حالت کلی، برای هر کار فرعی، می‌توان یک سطح تعمیم داده شده تعریف کرد، به‌طوری‌که قیدهای مکانی در راستای عمود بر این سطح، و قیدهای نیرویی، در راستای مماس بر این سطح قرار گیرند. این دو نوع قید (مکانی و نیرویی)، درجات آزادی حرکت‌های ممکن مجری نهایی را به دو مجموعه متعامد تقسیم می‌کنند. این دو مجموعه باید بر اساس معیارهایی متفاوت کنترل شوند.

در شکل ۱۱-۱ دو عملیات نمونه با قیدهای طبیعی آنها نشان داده شده‌اند. توجه کنید که در هر مورد، عملیات در چهارچوب  $\{C\}$ ، که آن را چهارچوب قید می‌نامند و محل قرارگیری آن به عملیات بستگی دارد، توصیف شده است. برحسب عملیات انجام شده،  $\{C\}$  ممکن است نسبت به محیط ثابت باشد، یا به همراه مجری نهایی حرکت کند. در شکل ۱۱-۱ (الف)، چهارچوب قید، به لنگ متصل است، و طوری با آن حرکت می‌کند که جهت محور  $\hat{x}$  همواره متوجه مرکز لولای لنگ باشد. وجود اصطکاک در سرانگشتان روبات، باعث می‌شود که دسته لنگ به‌طرزی مطمئن گرفته شود. این دسته بر روی محور کوتاهی قرار دارد و می‌تواند نسبت به بازوی لنگ، دوران کند. در شکل ۱۱-۱ (ب)، چهارچوب قید به انتهای آچار پیچ‌گوشی متصل است، و با آن حرکت می‌کند. توجه کنید که در جهت  $\hat{y}$ ، نیرو به صفر مقید شده است، زیرا بر اثر وجود شیار در پیچ، آچار می‌تواند در این جهت بلغزد. در این مثالها، مجموعه‌ای معین از قیدها در حین انجام کار، ثابت باقی می‌مانند. در حالت‌های پیچیده‌تر، یک عمل را به کارهای فرعی تقسیم می‌کنند، به‌طوری‌که بتوان مجموعه‌ای ثابت از قیدهای طبیعی را شناسایی کرد.

در شکل ۱۱-۱، قیدهای مکانی به‌وسیله مقادیر مؤلفه‌های سرعت مجری نهایی،  $\dot{v}$ ، در چهارچوب  $\{C\}$ ، بیان گردیده‌اند. می‌توانستیم قیدهای مکانی را با بیان عبارتهایی برای مکان



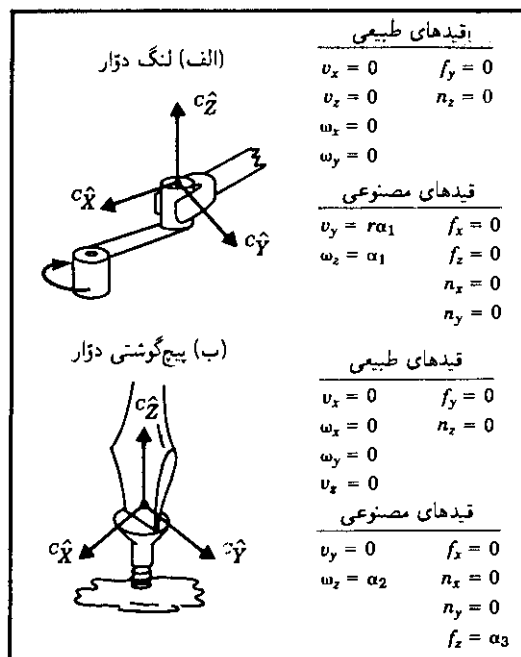
شکل ۱۱-۱ قیدهای طبیعی برای دو عمل مختلف.

(به‌جای سرعت) مشخص کنیم. اما در بسیاری موارد، ساده‌ترین است که قید مکانی را به صورت قید «سرعت برابر با صفر» مشخص کنیم. به همین ترتیب، قیدهای نیرویی نیز با دادن مقدار به مؤلفه‌های بردار نیرو-گشتاور،  $F$ ، که بر مجری نهایی وارد و در چهارچوب  $\{C\}$  توصیف می‌شود، بیان شده‌اند. توجه کنید که منظور از قیدهای مکانی، «قیدهای مکانی یا جهت‌گیری»، و منظور از قیدهای نیرویی، قیدهای «نیرویی یا گشتاوری» است. اصطلاح قیدهای طبیعی برای شناسایی قیدهایی که طبیعتاً از وضعیت تماسی خاصی ناشی می‌شوند، به‌کار گرفته شده است. به عبارت دیگر، قیدهای طبیعی، با حرکت مورد نظر برای بازوی مکانیکی ماهر، کوچکترین ارتباطی ندارند. برای مشخص کردن حرکتها یا نیروهای اعمالی مطلوب برای بازو، علاوه بر قیدهای طبیعی، قیدهای مصنوعی نیز استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، هر بار که استفاده کننده مسیری مطلوب را به صورت مکانی یا نیرویی مشخص می‌کند، قیدی مصنوعی نیز تعریف می‌شود. این قیدهای مصنوعی نیز، مانند قیدهای طبیعی، در راستاهای مماس و عمود بر سطح قید تعمیم یافته، قرار می‌گیرند؛ اما برخلاف قیدهای طبیعی، قیدهای نیرویی مصنوعی در راستای عمود بر سطح، و قیدهای مکانی مصنوعی در راستای مماس بر سطح مشخص می‌شوند. بدین ترتیب، هماهنگی

آنها با قیدهای طبیعی، حفظ می‌شود.

در شکل ۲-۱۱ قیدهای طبیعی و مصنوعی برای دو عمل مختلف نشان داده شده‌اند. توجه کنید که اگر یک قید مکانی طبیعی برای درجه آزادی خاصی در  $\{C\}$  داده شده باشد، باید یک قید نیرویی مصنوعی نیز مشخص شود، و برعکس. هر درجه آزادی مفروض در چهارچوب قید، در هر لحظه طوری کنترل می‌شود که یک قید نیرویی یا مکانی را برآورده کند.

استراتژی مونتاز اصطلاحی است که به تعدادی قید مصنوعی طرحریزی شده برای انجام عملی به صورت مطلوب، اطلاق می‌شود. در این استراتژی، باید روشهایی در نظر گرفته شوند که سیستم به کمک آنها بتواند تغییر وضعیت تماس را تشخیص دهد، به طوری که مراحل گذرا در قیدهای طبیعی قابل ردیابی باشند. به ازای هر تغییر در قیدهای طبیعی، مجموعه جدیدی از قیدهای مصنوعی از مجموعه استراتژیهای مونتاز فراخوانده می‌شود، و به وسیله سیستم کنترل اعمال می‌گردد. تحقیق درباره روشهای انتخاب خودکار قید برای عمل مونتازی معین، هنوز ادامه دارد. در این فصل، فرض می‌کنیم که عملی به منظور تعیین قیدهای طبیعی تحلیل شده است، و نیز انسانی طرحریز، استراتژی مونتاز را برای کنترل بازوی مکانیکی ماهر مشخص کرده است.



شکل ۲-۱۱ قیدهای طبیعی و مصنوعی در دو عمل مختلف.

توجه کنید که ما معمولاً در تحلیل عملیات، از نیروهای اصطکاک موجود بین سطوح در تماس، چشم‌پوشی می‌کنیم. این روش، برای معرفی مسئله کافی است، و در واقع با استفاده از آن، می‌توان برای بسیاری از حالتها استراتژیهای مناسبی تعیین کرد. معمولاً نیروهای اصطکاک حاصل از لغزش، در راستاهایی وارد می‌شوند که برای کنترل مکانی انتخاب شده‌اند، و در نتیجه این نیروها برای سروی مکان به شکل اغتشاش ظاهر شده، به وسیله سیستم کنترل حذف می‌شوند.

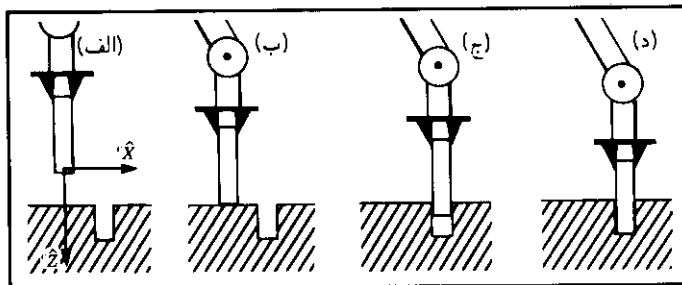
### ■ مثال ۱۱-۱

در شکل ۱۱-۳ (الف)، مراحل مونتاژ برای قرار دادن یک پین‌گرد در داخل سوراخی دایره شکل، نشان داده شده است. پین روی سطح سمت چپ سوراخ، پایین آورده شده، سپس بر روی آن لغزانه می‌شود تا به داخل سوراخ بیفتد. سپس در داخل سوراخ پایین رانده می‌شود تا به ته آن برسد، و بدین ترتیب، عملیات مونتاژ پایان می‌یابد. هریک از چهار وضعیت تماسی نشان داده شده، یک کار فرعی را تعریف می‌کند. برای هریک از این کارهای فرعی، قیدهای طبیعی و مصنوعی را تعیین کنید. همچنین، نشان دهید سیستم چگونه تغییر قیدهای طبیعی را در هنگام پیشرفت کار، حس می‌کند.

ابتدا چهارچوب (قید) را به پین متصل می‌کنیم (شکل ۱۱-۳ (الف)). در شکل ۱۱-۳ (الف)، پین در فضای آزاد است، و در نتیجه قیدهای طبیعی عبارتند از

$${}^c F = 0 \quad (11-1)$$

در نتیجه، در این حالت، قیدهای مصنوعی مسیر مکانی کاملی را تشکیل می‌دهند. پین در راستای



شکل ۱۱-۳ چهار وضعیت تماسی پی در پی برای داخل کردن پین در سوراخ.

این مسیر، در جهت  ${}^C \hat{Z}$  به طرف سطح حرکت می‌کند. مثلاً

$${}^C v = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ v_{approach} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

که در آن  $v_{approach}$  سرعت نزدیک شدن پین به سطح است.

در شکل ۳-۱۱ (ب)، پین به سطح رسیده است. برای تحقیق اینکه این عمل واقعاً اتفاق افتاده است یا نه، نیروی وارد در جهت  ${}^C \hat{Z}$  را مشاهده می‌کنیم. هنگامی که این نیروی حس شده از حدی آستانه‌ای بیشتر شود، تماس را حس می‌کنیم. این به معنای یک وضعیت تماسی جدید با مجموعه‌ای جدید از قیدهای طبیعی است. اگر فرض کنیم شکل ۳-۱۱ (ب) وضعیت تماس را نشان می‌دهد، پین نباید در جهت  ${}^C \hat{Z}$  آزادی حرکت، و یا حول  ${}^C \hat{X}$  یا  ${}^C \hat{Y}$  آزادی دوران داشته باشد. در سه درجه آزادی دیگر نیز مجاز به اعمال نیرو نخواهد بود. بدین ترتیب، قیدهای طبیعی به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned} {}^C v_z &= \circ \\ {}^C \omega_x &= \circ \\ {}^C \omega_y &= \circ \\ {}^C f_x &= \circ \\ {}^C f_y &= \circ \\ {}^C n_z &= \circ \end{aligned} \quad (3-11)$$

قیدهای مصنوعی، استراتژی لغزش بر روی سطح در جهت  ${}^C \hat{X}$  را توصیف می‌کنند، و در عین حال با اعمال نیروهای کوچک، برقراری تماس پین با سطح، را تضمین می‌کنند. پس داریم

$$\begin{aligned} {}^C v_x &= v_{slide} \\ {}^C v_y &= \circ \\ {}^C \omega_z &= \circ \\ {}^C f_z &= f_{contact} \\ {}^C n_x &= \circ \\ {}^C n_y &= \circ \end{aligned} \quad (4-11)$$

که در آن  $f_{contact}$  نیروی قائم وارد بر سطح در حین لغزش پین، و  $v_{slide}$  سرعت لغزش پین بر روی سطح است.

در شکل ۱۱-۳ (ج)، پین به داخل سوراخ افتاده، کمی در آن فرو رفته است. این وضعیت، با مشاهده سرعت در جهت  $\hat{Z}^C$ ، و گذشتن آن از آستانه (تا در حالت ایدئال، مقدار آن غیر صفر شود)، حس می‌شود. رخ دادن این حالت، بدان معناست که قیدهای طبیعی یکبار دیگر تغییر کرده‌اند، و در نتیجه استراتژی ما نیز (همچون حالت قیدهای مصنوعی) باید تغییر کند. قیدهای طبیعی جدید، چنین‌اند

$$\begin{aligned} {}^C v_x &= 0 \\ {}^C v_y &= 0 \\ {}^C \omega_x &= 0 \\ {}^C \omega_y &= 0 \\ {}^C f_z &= 0 \\ {}^C n_z &= 0 \end{aligned} \quad (۱۱-۵)$$

قیدهای مصنوعی را نیز چنین اختیار می‌کنیم

$$\begin{aligned} {}^C v_z &= v_{insert} \\ {}^C w_z &= 0 \\ {}^C f_x &= 0 \\ {}^C f_y &= 0 \\ {}^C n_x &= 0 \\ {}^C n_y &= 0 \end{aligned} \quad (۱۱-۶)$$

که در آن  $v_{insert}$  سرعت فروبردن پین در سوراخ است. سرانجام، وضعیت نشان داده شده در شکل ۱۱-۳ (د)، هنگامی تشخیص داده می‌شود که نیرو در جهت  $\hat{Z}^C$  از آستانه‌ای معین بیشتر شود. ■

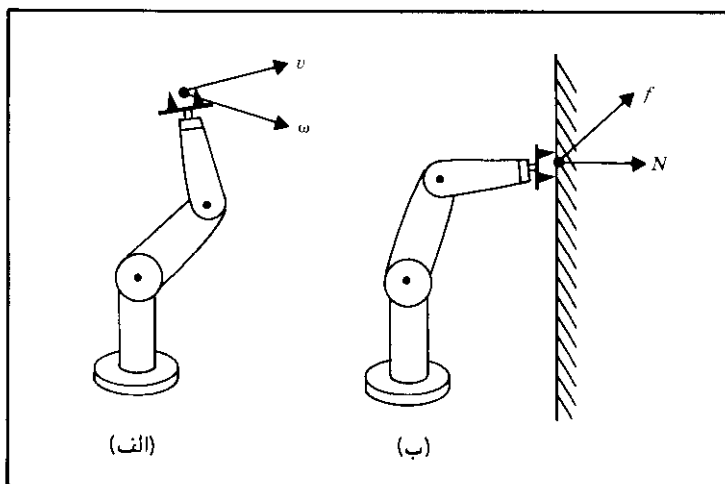
توجه به این نکته جالب است که تغییرات در قیدهای طبیعی، همواره با مشاهده متغیر مکان یا نیرویی که کنترل نمی‌شود، آشکارسازی می‌شود. مثلاً، برای آشکار ساختن گذار از شکل ۱۱-۳ (ب) به شکل ۱۱-۳ (ج)، سرعت در جهت  $\hat{Z}^C$  را در نظر می‌گیریم، در حالی که نیروی  $\hat{Z}^C$  را کنترل می‌کنیم. یا برای تعیین اینکه پین چه موقع به ته سوراخ می‌رسد،  ${}^C f_z$  را در نظر می‌گیریم در صورتی که  ${}^C v_z$  را کنترل می‌کنیم.

تعیین استراتژیهای مونتاژ برای متصل کردن قطعات پیچیده‌تر به یکدیگر، بسیار دشوار است. ما در تحلیل ساده خود از این عمل، از اثرات ناشی از عدم قطعیت چشم‌پوشی کرده‌ایم. تکامل سیستمهای اتوماتیکی که اثرات عدم قطعیت را در نظر بگیرند، و در موارد عملی به‌کار روند، هنوز در مرحله پژوهشی است [۴-۸]. برای آگاهی بیشتر از این روشها، مرجع [۹] را ببینید.

## ۴-۱۱ مسئله کنترل ترکیبی مکان-نیرو

شکل ۴-۱۱ دو حالت فرین از وضعیتهای تماسی بازو را نشان می‌دهد. در شکل ۴-۱۱(الف)، بازوی مکانیکی ماهر در فضای آزاد حرکت می‌کند. در این حالت، قیدهای طبیعی همه قید نیرویی خواهند بود، زیرا به دلیل عدم وجود سطح برای واکنش، کلیه نیروها به‌ناچار صفر می‌شوند.<sup>۱</sup> اگر بازو شش درجه آزادی داشته باشد، می‌توانیم مکان آن را در شش درجه آزادی تغییر دهیم، اما قادر به اعمال نیروها در هر جهت دلخواه نخواهیم بود. شکل ۴-۱۱(ب) حالت فرین بازو را در هنگام چسبیدن مجری نهایی به دیوار، نشان می‌دهد. در این حالت، بازو تحت شش قید مکانی طبیعی قرار دارد، زیرا مکان آن را نمی‌توان تغییر داد. اما از سوی دیگر، بازو آزاد است تا در شش درجه آزادی به دیوار نیرو و گشتاور وارد کند.

در فصلهای ۹ و ۱۰، مسئله کنترل مکانی را که برای وضعیت نشان داده شده در شکل



شکل ۴-۱۱ دو حالت فرین از وضعیتهای تماسی. بازوی (الف) در فضای آزاد حرکت می‌کند، و هیچ‌گونه سطح واکنشی وجود ندارد. بازوی (ب) به دیوار چسبانده شده است، به‌طوری‌که هیچ‌گونه حرکت آزادانه امکان‌پذیر نیست.

۱. باید به‌خاطر داشت که در اینجا با نیروهای تماسی بین مجری نهایی و محیط آن سروکار داریم و نه نیروهای لختی.

۴-۱۱ (الف) به کار می رود، مطالعه کردیم. چون وضعیت شکل ۱۱-۴ (ب) در عمل به ندرت رخ می دهد، باید کنترل نیرو را طوری در نظر بگیریم که برخی از درجات آزادی سیستم تحت کنترل مکان، و برخی دیگر تحت کنترل نیرو قرار داشته باشند. بنابراین، در این فصل روشهای کنترل ترکیبی مکان-نیرو را بررسی می کنیم.

کنترل کننده ترکیبی مکان-نیرو، باید قادر به حل سه مسئله زیر باشد:

۱. کنترل مکان بازو در راستاهایی که قید نیروی طبیعی وجود دارد.
۲. کنترل نیرو بازو در راستاهایی که قید مکان طبیعی وجود دارد.
۳. ترکیب اختیاری دو حالت فوق در راستای درجات آزادی عمود برهم در چهارچوب اختیاری  $\{C\}$ .

## ۵-۱۱ کنترل نیروی سیستم جرم-فنر

در فصل ۹، مطالعه بر روی مسئله کنترل کامل مکان را با در نظر گرفتن حالت بسیار ساده ای از کنترل یک جرم آغاز کردیم. سپس در فصل ۱۰، بازوی مکانیکی ماهر را طوری مدلسازی کردیم که مسئله کنترل آن، با کنترل  $n$  جرم مستقل، معادل شود (برای بازویی با  $n$  مفصل). در این بخش نیز به روشی مشابه، بررسی مسئله کنترل نیرو را، با کنترل نیروی وارد بر جرمی با یک درجه آزادی، آغاز می کنیم.

به هنگام بررسی نیروهای تماسی، باید مدلی از محیطی که بر آن نیرو وارد می شود، تهیه کنیم. در اینجا برای درک ساده تر مطلب، از مدلی بسیار ساده برای نمایش برهم کنش جسم کنترل شده و محیط آن، استفاده می کنیم. تماس با محیط را به صورت فنری مدلسازی می کنیم. به عبارت دیگر، فرض می کنیم که سیستم صلب، و سختی محیط  $k_e$  است.

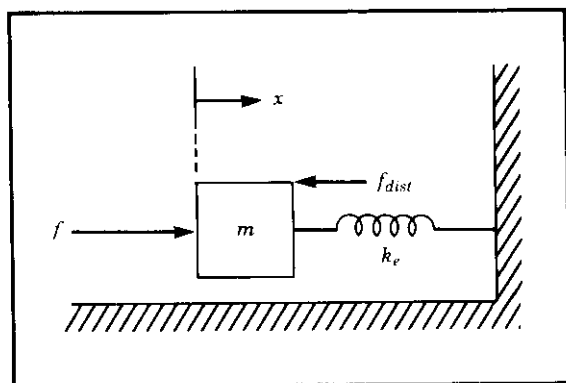
حال کنترل جرم متصل به فنر را مطابق شکل ۱۱-۵ در نظر می گیریم. همچنین، نیروی اغتشاشی نامعلوم  $f_{dist}$  را نیز به سیستم اضافه می کنیم. این نیرو را می توان به صورت مدلی از نیروی اصطکاک یا نیروی بین چرخنده ها در جعبه دنده بازوی مکانیکی ماهر، در نظر گرفت. متغیری که می خواهیم کنترل کنیم، نیروی وارد بر محیط،  $f_e$ ، است که با نیروی اعمال شده بر فنر برابر است

$$f_e = k_e x \quad (7-11)$$

معادله توصیف کننده این سیستم فیزیکی، چنین است

$$f = m\ddot{x} + k_e x + f_{dist} \quad (8-11)$$





شکل ۱۱-۵ یک سیستم جرم فنر.

اگر این معادله را برحسب  $f_e$ ، متغیری که می‌خواهیم کنترل کنیم، بنویسیم، نتیجه می‌شود

$$f = m k_e^{-1} \ddot{f}_e + f_e + f_{dist} \quad (۹-۱۱)$$

با توجه به مفهوم کنترل‌کننده تقسیم‌شده، می‌توان نوشت

$$\alpha = m k_e^{-1}$$

$$\beta = f_e + f_{dist}$$

پس قانون کنترل چنین نوشته می‌شود

$$f = m k_e^{-1} [\ddot{f}_d + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f] + f_e + f_{dist} \quad (۱۰-۱۱)$$

که در آن  $e_f = f_d - f_e$ ، خطای نیروی بین  $f_d$ ، نیروی مطلوب، و  $f_e$ ، نیروی حس‌شده وارد بر محیط، است. اگر می‌توانستیم (۱۰-۱۱) را محاسبه کنیم، به سیستم مدار بسته زیر می‌رسیدیم

$$\ddot{e}_f + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f = 0 \quad (۱۱-۱۱)$$

اما به دلیل مجهول بودن  $f_{dist}$ ، نمی‌توانیم مقدار آن را در قانون کنترل قرار دهیم، و در نتیجه رابطه (۱۰-۱۱) قابل حل نیست. می‌توانیم عبارت  $f_{dist}$  را از قانون کنترل حذف کنیم، اما تحلیل حالت پایا نشان می‌دهد که راه بهتری وجود دارد. استفاده از این راه، به‌ویژه در هنگامی که  $k_e$ ، سختی محیط، بالاست (غالباً این‌طور است)، مناسب است.

چنانچه عبارت  $f_{dist}$  را از قانون کنترل کنار بگذاریم و معادله‌های (۹-۱۱) و (۱۰-۱۱) را مساوی قرار دهیم، با تحلیل حالت پایا، از طریق برابر صفر قرار دادن کلیه مشتقات زمانی، نتیجه

می‌شود

$$e_f = \frac{f_{dist}}{\alpha} \quad (۱۲-۱۱)$$

که در آن  $\alpha = m k_e^{-1} k_{pf}$ ، بهره مؤثر پسخوراند نیروست. اما اگر بخواهیم به جای عبارت  $(f_e + f_{dist})$ ، از  $f_d$  در قانون کنترل (۱۱-۱۰) استفاده کنیم، آنگاه خطای حالت پایا چنین خواهد شد

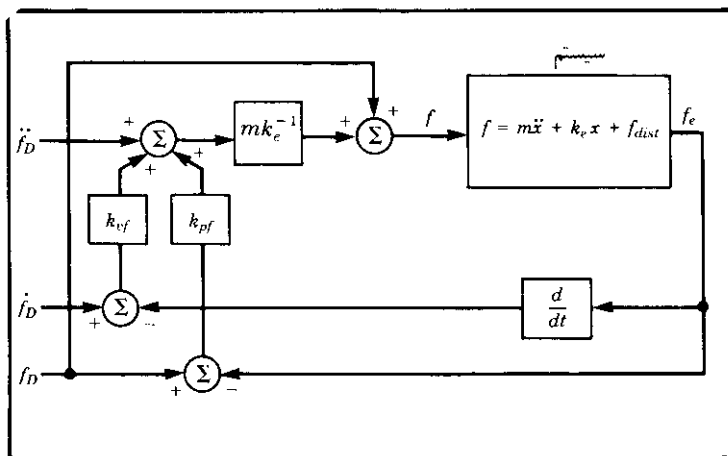
$$e_f = \frac{f_{dist}}{1 + \alpha} \quad (۱۳-۱۱)$$

اگر محیط سخت باشد (اغلب این‌طور است)،  $\alpha$  کوچک می‌شود، و در نتیجه خطای حالت پایای محاسبه‌شده در (۱۳-۱۱)، در مقایسه با خطای حاصل از (۱۲-۱۱)، به مراتب کمتر خواهد بود. به همین دلیل، قانون کنترل زیر را پیشنهاد می‌کنیم

$$f = m k_e^{-1} [\ddot{f}_d + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f] + f_d \quad (۱۴-۱۱)$$

در شکل ۶-۱۱، نمودار بلوکی سیستم مدار بسته‌ای که در آن قانون کنترل (۱۴-۱۱) به کار رفته است، دیده می‌شود.

در حالت کلی، به سبب ملاحظات عملی، سروی کنترل نیرو به صورتی متفاوت با حالت ایدئال نشان داده شده در شکل ۶-۱۱، به کار گرفته می‌شود. مسئله اول آن است که معمولاً مسیرهای



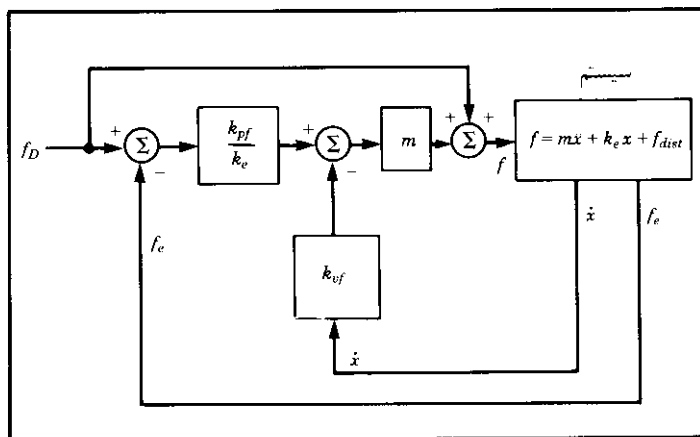
شکل ۶-۱۱ یک سیستم کنترل نیرو برای سیستم جرم-فنر.

نیروی ثابت هستند. به عبارت دیگر، معمولاً می‌خواهیم نیروی تماسی را در سطحی ثابت نگه داریم. در عمل، مواردی که در آنها نیروهای تماسی باید تابعی از زمان را دنبال کنند، نادر است. در نتیجه، ورودیهای  $f_d$  و  $\dot{f}_d$  در سیستم کنترل را اغلب به طور دائم برابر با صفر قرار می‌دهند. واقعیت دیگر آن است که نیروهای حس شده اغلب با نویز همراه‌اند، و به همین دلیل، برای محاسبه  $\dot{f}_e$ ، روشهای مشتگیری عددی پیشنهاد نمی‌شوند. اما چون  $f_e = k_e x$ ، می‌توان مشتق نیرو را از رابطه  $\dot{f}_e = k_e \dot{x}$  به دست آورد. این بسیار واقع‌گرایانه‌تر است، زیرا بسیاری از بازوهای مکانیکی ماهر، وسایل اندازه‌گیری دقیق سرعت دارند. پس از در نظر گرفتن دو واقعیت یاد شده، می‌توان قانون کنترل را چنین نوشت

$$f = m [k_{pf} k_e^{-1} \dot{e}_f - k_{vf} \dot{x}] + f_d \quad (۱۱-۱۵)$$

نمودار بلوکی این قانون کنترل، در شکل ۱۱-۷ نشان داده شده است. یکی از تغییرهای سیستم شکل ۱۱-۷ آن است که خطاهای نیرویی، برای حلقه کنترل سرعت داخلی با بهره  $k_{vf}$ ، یک نقطه تنظیم ایجاد می‌کنند. برخی از قوانین کنترل نیز شامل یک جمله انتگرالی برای بهبود عملکرد حالت پایا هستند.

مسئله دیگری که باقی می‌ماند و بسیار اهمیت دارد، آن است که اگر چه سختی محیط  $k_e$  در قانون کنترل ظاهر می‌شود، اما مقدار آن غالباً معلوم نیست، و احتمالاً با زمان نیز تغییر می‌کند. ولی روبات مونتاژ کننده، اغلب با قطعات صلب در تماس است، و در نتیجه می‌توان حدس زد که سختی  $k_e$  بسیار بالا خواهد بود. در حالت کلی، این فرض در نظر گرفته می‌شود، و بهره‌ها نیز طوری منظور می‌شوند که سیستم در مقابل تغییرات  $k_e$  مقاوم باشد.



شکل ۱۱-۷ یک سیستم کنترل نیروی عملی، برای سیستم جرم-فنر.

تاکنون هدف از به دست آوردن قانون کنترل برای کنترل نیروی تماسی، نشان دادن ساختاری پیشنهادی و آشکار کردن برخی نکته‌ها بوده است. در بخشهای باقیمانده از این فصل، فرض خواهیم کرد که چنین سروکنترل نیرویی را می‌توان ساخت، و آن را در داخل یک جعبه سیاه مطابق شکل ۸-۱۱ قرار داد. در عمل، ساختن یک سیستم سروکنترل نیرویی با عملکرد بالا آسان نیست، و در حال حاضر، بر روی این موضوع فعالانه پژوهش می‌شود [۱۴-۱۱]. برای آشنایی بیشتر با این زمینه، مرجع [۱۵] را ببینید.

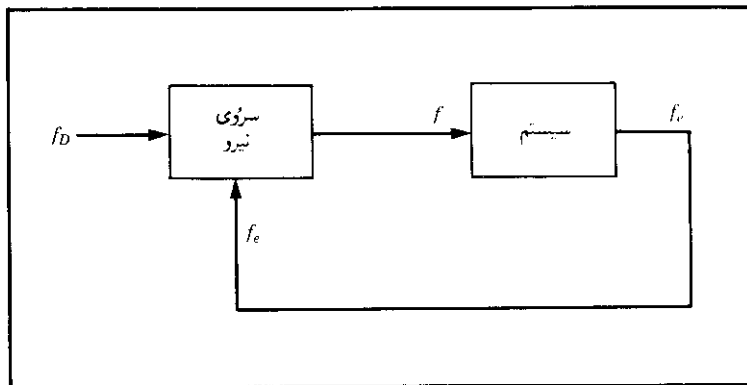
## ۱۱-۶ روش کنترل ترکیبی مکان-نیرو

در این بخش، ساختمان سیستم کنترلی را که از کنترل کننده ترکیبی مکان-نیرو استفاده می‌کند، معرفی می‌کنیم.

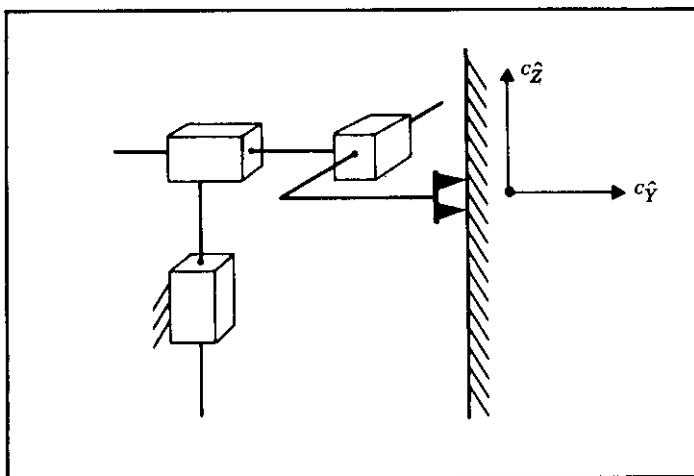
### بازوی مکانیکی دکارتی همراه با $\{C\}$

ابتدا حالت ساده‌ای را که در آن بازو سه درجه آزادی با مفصلهای کشویی در جهت‌های  $\hat{Y}$ ،  $\hat{Z}$  و  $\hat{X}$  دارد، در نظر می‌گیریم. برای سادگی، فرض می‌کنیم جرم هر رابط  $m$  است و در یاتاقانهای بدون اصطکاک می‌لغزد. همچنین، فرض می‌کنیم که حرکت‌های مفصلها دقیقاً با چهارچوب قید  $\{C\}$  همراه است. مجری نهایی با سطحی با سختی  $k_e$ ، که جهتگیری آن به وسیله بردار عمود بر سطح در جهت  ${}^C\hat{Y}$  تعیین می‌شود، در تماس است. پس در جهت  ${}^C\hat{Y}$  به کنترل نیرو، و در جهت‌های  ${}^C\hat{X}$  و  ${}^C\hat{Z}$ ، به کنترل مکان نیاز داریم. شکل ۱۱-۹ را ببینید.

در این حالت، جواب مسئله کنترل ترکیبی مکان-نیرو، روشن است. مفصلهای ۱ و ۳ را باید به وسیله کنترل کننده مکانی که در فصل ۹ برای جرم واحد ساختیم، کنترل کنیم. مفصل ۲ که در



شکل ۱۱-۸ کنترل سرو نیرو به صورت یک جعبه سیاه.

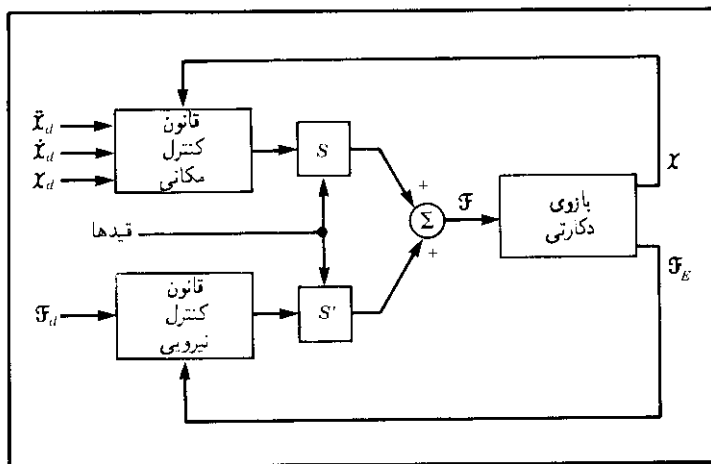


شکل ۱۱-۹ بازوی مکانیکی ماهر دکارتی با سه درجه آزادی در حال تماس با یک سطح.

جهت  $\hat{Y}$  عمل می‌کند، باید با کنترل‌کننده نیرویی به دست آمده در بخش ۱۱-۴ کنترل شود. اکنون می‌توانیم در جهت‌های  ${}^c\hat{X}$  و  ${}^c\hat{Z}$  یک مسیر مکانی را ایجاد کنیم، و در عین حال در جهت  ${}^c\hat{Y}$  نیز یک مسیر نیرویی (مثلاً یک مقدار ثابت) را دنبال کنیم.

اگر بخواهیم طبیعت سطح قید را طوری تغییر دهیم که بردار عمود بر آن بتواند بر  ${}^c\hat{X}$  یا  ${}^c\hat{Z}$  نیز منطبق شود، باید سیستم کنترل بازوی دکارتی خود را به صورت زیر کمی تعمیم دهیم: ساختمان کنترل‌کننده را طوری می‌سازیم که بتوان در هر سه درجه آزادی، یک مسیر مکانی کامل را همراه با یک مسیر زمانی مشخص کرد. البته نمی‌توانیم هر شش قید فوق را به طور همزمان برقرار سازیم، و در عوض باید حالت‌هایی را تنظیم کنیم که نشان دهند در هر زمان مفروض مؤلفه‌های کدام مسیر دنبال خواهد شد.

کنترل‌کننده نشان داده شده در شکل ۱۱-۱۰ را در نظر بگیرید. در اینجا کنترل هر سه مفصل بازوی دکارتی، با نشان دادن کنترل‌کننده مکان و کنترل‌کننده نیرو در یک نمودار، مشخص می‌شود. ماتریسهای  $S$  و  $S'$  برای تعیین نوع کنترل (مکان یا نیرو) به کار رفته برای هر مفصل، معرفی شده‌اند. ماتریس  $S$  ماتریسی قطری است که قطر آن از اعداد صفر و یک تشکیل شده است. در جایی که در ماتریس  $S$  عدد یک وجود دارد، در ماتریس  $S'$  عدد صفر موجود است، و کنترل مکان برقرار می‌شود. در جایی که در ماتریس  $S$  عدد صفر وجود دارد، در ماتریس  $S'$  عدد یک وجود خواهد داشت، و کنترل نیرو برقرار خواهد شد. بدین ترتیب، ماتریسهای  $S$  و  $S'$  به صورت کلیدهایی برای تعیین نوع کنترل به کار رفته برای هر درجه آزادی در چهارچوب  $\{C\}$ ، عمل می‌کنند. به ازای هر  $S$ ، همواره سه مؤلفه مسیر کنترل می‌شود، اگر چه نسبت ترکیب کنترل نیرو با کنترل مکان، می‌تواند



شکل ۱۱-۱۰ کنترل کننده ترکیبی برای بازویی دکارتی با سه درجه آزادی.

دلخواه باشد. از سه مؤلفه دیگر مسیر مورد نظر و خطاهای سرؤی مربوط به آنها، صرف نظر می شود. بنابراین هنگامی که یک درجه آزادی مشخص تحت کنترل نیرو است، از خطاهای مکانی آن درجه آزادی صرف نظر می شود.

#### ■ مثال ۱۱-۲

برای وضعیت نشان داده شده در شکل ۱۱-۹، که در آن حرکت در جهت  $\hat{Y}^C$  به وسیله واکنش سطح محدود می شود، ماتریسهای  $S$  و  $S'$  را به دست آورید.

چون مؤلفه های  $\hat{X}$  و  $\hat{Z}$  باید کنترل مکان شوند، به ازای این دو مؤلفه در روی قطر ماتریس  $S$ ، عدد یک قرار می دهیم. این کار باعث فعال شدن سرؤی مکان در این دو جهت می شود، و مسیر ورودی دنبال خواهد شد. از هر ورودی مسیر مکانی برای مؤلفه  $\hat{Y}$  صرف نظر می کنیم. در ماتریس  $S'$ ، جای صفرها و یکهای روی قطر، عوض می شوند، و در نتیجه داریم

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11-16)$$

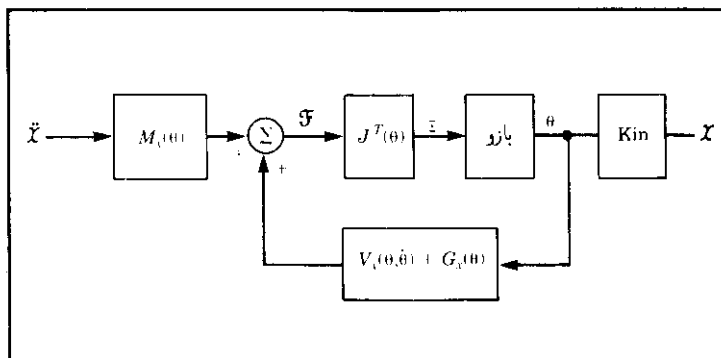
$$S' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در شکل ۱۱-۱۰ کنترل‌کننده ترکیبی برای حالت خاصی که در آن محورهای مفصلها درست با محورهای چهارچوب قید  $\{C\}$  همراستا می‌شوند، نشان داده شده است. در بخش بعدی، از روشهایی که در فصلهای پیش به‌کار رفتند، استفاده می‌کنیم، و کنترل‌کننده فوق را تعمیم می‌دهیم تا بدین ترتیب، بتوان از آن برای هر بازوی مکانیکی ماهر عام، و هر چهارچوب اختیاری  $\{C\}$ ، استفاده کرد. اما در حالت ایدئال، سیستم به‌گونه‌ای عمل می‌کند که گویی بازو کاراندازی «همراستا» با هر یک از درجات آزادی در  $\{C\}$  دارد.

### بازوی مکانیکی ماهر عام

تعمیم کنترل‌کننده ترکیبی نشان داده شده در شکل ۱۱-۱۰، به‌گونه‌ای که بتوان از یک بازوی مکانیکی عام استفاده کرد، با به‌کارگیری مفهوم کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی، ساده می‌شود. در فصل ۶ دیدیم که چگونه معادله‌های حرکت بازوی مکانیکی ماهر را می‌توان برحسب حرکت مجری نهایی در مختصات دکارتی نوشت، و در فصل ۱۰، از این روابط برای به‌دست آوردن معادله‌های دکارتی مستقل مربوط به کنترل مکان بازو، استفاده کردیم. ایده اصلی در این مورد، آن است که با به‌کارگیری یک مدل دینامیکی نوشته شده در فضای دکارتی، بتوان کنترل را طوری انجام داد که سیستم مرکب از بازوی واقعی و مدل محاسبه شده، به‌صورت مجموعه‌ای مستقل از جرمهای واحد در آید. پس از انجام عملیات مستقل و خطی‌سازی، می‌توانیم از سرو کنترل ساده‌ای که در بخش ۱۱-۴ پی‌ریزی شد، استفاده کنیم.

در شکل ۱۱-۱۱ مراحل جبرانی (تصحیح‌کننده)، بر پایه معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر در فضای دکارتی، طوری انجام شده‌اند که بازو به‌صورت مجموعه‌ای از جرمهای واحد غیروابسته به‌نظر می‌رسد. به منظور استفاده از این مسئله در روش کنترل ترکیبی، معادله‌های دینامیکی دکارتی و ژاکوبی در چهارچوب قید  $\{C\}$  نوشته می‌شوند. به همین ترتیب، معادله‌های سینماتیکی نیز



شکل ۱۱-۱۱ روش مستقل‌سازی دکارتی معرفی شده در فصل ۱۰.

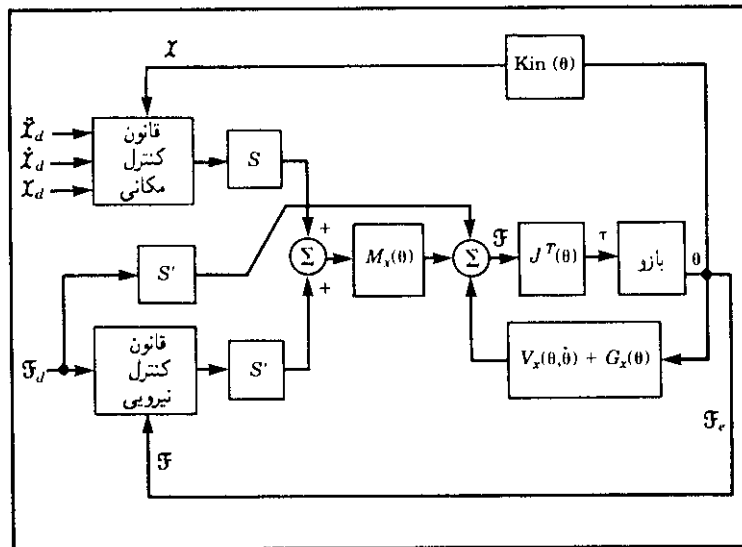
نسبت به چهارچوب قید محاسبه می‌شوند.

چون کنترل‌کننده ترکیبی را برای بازوی مکانیکی ماهر دکارتی همراستا با چهارچوب قید  $\{C\}$  طرح کرده‌ایم، و چون با استفاده از روش مستقل‌سازی دکارتی سیستمی با مشخصات یکسان ورودی-خروجی ایجاد می‌شود، کافی است این دو را با هم ترکیب کنیم، و کنترل‌کننده ترکیبی مکان-نیروی تعمیم‌یافته‌ای به دست آوریم.

در شکل ۱۱-۱۲ نمودار بلوکی کنترل‌کننده ترکیبی برای یک بازوی مکانیکی عام نشان داده شده است. توجه کنید که معادله‌های دینامیکی و ژاکوبی، در چهارچوب قید نوشته شده‌اند. معادله‌های سینماتیکی شامل تبدیل کلی مختصات به چهارچوب قید هستند، و نیروهای حس شده نیز به چهارچوب  $\{C\}$  تبدیل می‌شوند. خطاهای سر و نسبت به  $\{C\}$  محاسبه می‌شوند، و حالت‌های گوناگون کنترل در  $\{C\}$ ، با انتخاب بجای ماتریس  $S$  ایجاد می‌شوند.<sup>۱</sup> شکل ۱۱-۱۳ بازوی مکانیکی ماهری را نشان می‌دهد که به این روش کنترل می‌شود.

### افزودن سختی متغیر

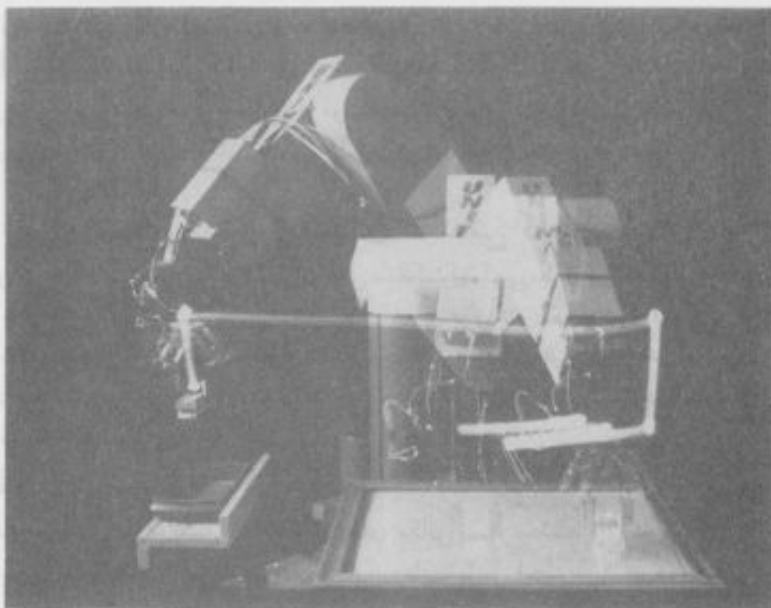
کنترل یک درجه آزادی به صورت صرفاً مکانی یا صرفاً نیرویی، نشان‌دهنده کنترل در دو انتهای طیف سختی سر و است. سر و مکانی ایدئال، بینهایت سخت است، و می‌تواند کلیه اغتشاشهای



شکل ۱۱-۱۲ کنترل‌کننده ترکیبی مکان-نیرو برای یک بازوی مکانیکی عمومی. برای سادگی، از نشان دادن حلقه پسخوراند سرعت، خودداری شده است.

۱. در مرجع [۱۰] تقسیم‌بندی حالت‌های کنترلی در جهت‌های کاری معین، با استفاده از روش ابتدایی ارائه شده در این فصل، تعمیم داده شده است.





شکل ۱۱-۱۳. بازوی مکانیکی ماهر پیما ۵۶۰، تحت کنترل سیستم COSMOS. پنجره را می‌شوید. این سیستم کنترل در دانشگاه استنفورد گسترش یافته است. در آزمایشهای انجام شده، از انگشتهای حس‌کننده نیرو و روش کنترلی مشابه با روش به‌کار رفته در شکل ۱۱-۱۲ استفاده شده است [۱۰].

نیروی وارد بر سیستم را دفع کند. به همین ترتیب، سرّی نیرویی ایدئال، دارای سختی صفر است، و با وجود اغتشاشهای مکانی، می‌تواند نیروی اعمالی مورد نظر را حفظ کند. کنترل مجری نهایی به‌گونه‌ای که سختی مقادیر دیگری بجز صفر یا بینهایت را اختیار کند، سودمند است. در حالت کلی، ممکن است بخواهیم امیدانسی مکانیکی مجری نهایی را کنترل کنیم [۱۴، ۱۶، ۱۷].

در تحلیل تماس مجری نهایی با محیط، فرض کردیم سختی محیط بسیار بالاست. هنگامی که تماس با محیط سخت صورت گیرد، از کنترل نیرو با سختی صفر استفاده می‌کنیم، و وقتی سختی محل تماس صفر باشد (حرکت در فضای آزاد)، کنترل مکان با سختی بالا را به‌کار می‌بریم. بنابراین، به‌نظر می‌رسد که کنترل مجری نهایی به‌گونه‌ای که سختی آن تقریباً برابر با عکس سختی محیط باشد، استراتژی مناسبی خواهد بود. در نتیجه، به‌هنگام تماس با قطعات پلاستیکی یا فنرها، می‌توانیم سختی سرّ را برابر با مقداری بجز صفر یا بینهایت، در نظر بگیریم.

در چهارچوب کنترل‌کننده ترکیبی، این عمل با کاربرد کنترل مکان، و کاهش بهره مکان متناظر با درجه آزادی مناسب در  $\{C\}$ ، انجام می‌گیرد. در حالت کلی، در صورت انجام این عمل، بهره سرعت متناظر نیز باید طوری کاهش داده شود که درجه آزادی فوق در حالت میرایی بحرانی باقی

بماند. قابلیت تغییر بهره‌های مکان و سرعت سرّی مکانی در راستای درجات آزادی چهارچوب  $\{C\}$ ، به کنترل‌کننده ترکیبی مکان-نیرو امکان می‌دهد که امیدانس تعمیم یافته‌ای را برای مجری نهایی به‌کارگیرد [۱۷]. اما در بسیاری از موارد عملی، با برهم کنش قطعانی با سختی بالا روبه‌رو هستیم، به‌طوری که کنترل مکان خالص یا کنترل نیروی خالص، مطلوب خواهد بود.

## ۷-۱۱ روشهای کنترل روباتهای صنعتی کنونی

در روباتهای صنعتی کنونی، کنترل نیروی واقعی مانند کنترل ترکیبی مکان-نیرو که در این فصل معرفی شد، به‌کار گرفته نمی‌شود. برخی از دشواریهای عملی موجود بر سر راه استفاده از این نوع کنترل عبارت‌اند از: نیاز به محاسبات فراوان، عدم وجود پارامترهای دقیق برای مدل دینامیکی، عدم وجود حساسه‌های نیرویی مقاوم، و مشکلات ایجاد شده برای استفاده‌کننده در مشخص ساختن استراتژی مکانی-نیروی.

### انعطاف‌پذیری غیر فعال

بازوهای مکانیکی ماهر بسیار صلب با سرّوهای مکانی بسیار سخت، برای کاربردهایی که در آنها قطعات با یکدیگر تماس می‌یابند و در نتیجه نیروهای تماسی ایجاد می‌کنند، مناسب نیستند. در چنین مواردی، اغلب قطعات به یکدیگر فشرده می‌شوند و یا به‌صورتی دیگر آسیب می‌بینند. از هنگامی که آزمایشهای اولیه بر روی روباتهای موتاژ کار آغاز شد، پژوهشگران می‌دانستند که روباتها در صورتی قادر به انجام عملیات موتاژ خواهند بود که قطعات، بستها، و یا خود بازوی مکانیکی اندکی انعطاف‌پذیر باشند. غالباً وجود قابلیت «جابه‌جایی» اندکی در یک یا چند قطعه، برای جفت کردن قطعانی که باید موتاژ می‌شدند، کافی بود.

پس از آنکه به این موضوع پی برده شد، دستگاههایی برای افزایش انعطاف‌پذیری سیستمهای روباتی، طراحی شد. موفقترین این دستگاهها، دستگاه RCC<sup>۱</sup> یا انعطاف‌پذیری مرکزی از راه دور است که در آزمایشگاه دراپر<sup>۲</sup> [۱۸] ساخته شد. RCC به شیوه‌ای زیرکانه طوری طراحی شد که بتواند با اعمال انعطاف‌پذیری مناسب، عملیات معین را به نرمی و با سرعت، بدون اینکه قطعات در هم فرو روند، به انجام رساند. RCC در واقع فنری با شش درجه آزادی است که بین میج دست و مجری نهایی روبات قرار داده می‌شود. با تنظیم سختیهای شش فنر RCC، می‌توان میزان انعطاف‌پذیری سیستم را تغییر داد. این‌گونه روشهای اعمال انعطاف در سیستم را روشهای انعطاف‌پذیری غیر فعال می‌نامند. از این روشها، در روباتهای صنعتی برای انجام برخی کارها استفاده می‌شود.

### انعطاف‌پذیری حاصل از تعدیل بهره‌های مکانی

به‌جای استفاده از انعطاف‌پذیری غیر فعال و ثابت در روبات، می‌توان از روشی استفاده کرد که در آن سختی ظاهری بازوی مکانیکی، با تنظیم بهره‌های سیستم کنترل مکان، قابل تغییر باشد. در

تعدادی از روباتهای صنعتی، از این روش برای عملیاتی چون سنگزنی، که در آن تماس با سطح باید حفظ شود، اما به کنترل نیروی دقیق نیاز نیست، استفاده می‌شود.

در مرجع [۱۶] روش عملی بسیار جالبی پیشنهاد شده است. در این روش، بهره‌های مکانی در سیستم سروی وابسته به مفصل، طوری تغییر داده می‌شوند که مجری نهایی در راستای درجات آزادی دکارتی، سختی معینی از خود نشان دهد. این مطلب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: فیزی را در حالت کلی با شش درجه آزادی در نظر بگیرید. عمل این فیزی را می‌توان چنین توصیف کرد

$$\mathcal{F} = K_{px} \delta \mathcal{X} \quad (۱۷-۱۱)$$

که در آن  $K_{px}$  ماتریسی  $6 \times 6$  و قطری است که عنصرهای قطر آن را سه سختی خطی و سه سختی پیچشی تشکیل می‌دهند. چگونه می‌توان مجری نهایی روبات را به پیروی از این مشخصه سختی وادار کرد؟

با استفاده از تعریف ژاکوبی بازوی مکانیکی ماهر، می‌توان نوشت

$$\delta \mathcal{X} = J(\Theta) \delta \Theta \quad (۱۸-۱۱)$$

اگر رابطه فوق را با (۱۷-۱۱) ترکیب کنیم، خواهیم داشت

$$\mathcal{F} = K_{px} J(\Theta) \delta \Theta \quad (۱۹-۱۱)$$

با توجه به نیروهای استاتیکی، داریم

$$\tau = J^T(\Theta) \mathcal{F} \quad (۲۰-۱۱)$$

و با ترکیب این رابطه با رابطه (۱۹-۱۱)، نتیجه می‌شود

$$\tau = J^T(\Theta) K_{px} J(\Theta) \delta \Theta \quad (۲۱-۱۱)$$

در رابطه فوق، معمولاً ژاکوبی را در چهارچوب ابزار می‌نویسند. معادله (۲۱-۱۱)، چگونگی ایجاد گشتاورهای مفصلی را به صورت تابعی از تغییرات جزئی در زاویه‌های مفصلی،  $\delta \Theta$ ، برای آنکه مجری نهایی به صورت فیزی دکارتی با شش درجه آزادی رفتار کند، نشان می‌دهد. در کنترل‌کننده ساده مکان مبتنی بر مفصل، می‌توان از قانون کنترل زیر استفاده کرد

$$\tau = K_p E + K_v \dot{E} \quad (۲۲-۱۱)$$

که در آن  $K_p$  و  $K_v$  ماتریسهای بهره قطری ثابت، و  $E$  خطای سرو است که به صورت اختلاف  $\Theta_d - \Theta$  تعریف می‌شود. اما سالیسبوری<sup>۱</sup>، به جای رابطه (۲۲-۱۱)، استفاده از قانون کنترل زیر

را پیشنهاد می‌کند

$$\tau = J^T(\Theta)K_{px}J(\Theta)E + K_v\dot{E} \quad (11-23)$$

که در آن  $K_{px}$  سختی مورد نظر برای مجری نهایی در فضای دکارتی است. برای بازویی با شش درجه آزادی،  $K_{px}$  ماتریسی قطری خواهد بود که روی قطر آن، سه سختی خطی و سه سختی پیچشی مورد نظر برای مجری نهایی، قرار می‌گیرند. در اینجا، با استفاده از ژاکوبی، در واقع سختی دکارتی به سختی فضای مفصلی تبدیل شده است.

### حس نیرو

حس نیرو به بازوی مکانیکی ماهر امکان می‌دهد تا تماس با یک سطح را آشکارسازی کند، و بر اساس آن عملیات لازم را انجام دهد. مثلاً، اصطلاح حرکت محتاطانه را گاهی به معنای استراتژی حرکت تحت کنترل مکان تا زمانی که نیرویی حس شود و حرکت متوقف گردد، به کار می‌برند. علاوه بر این، از حس نیرو می‌توان برای توزین اجسامی که بازو بلند می‌کند، استفاده کرد. از وزن اجسام می‌توان برای کنترل عملیات حمل قطعات، و اطمینان از اینکه قطعه مورد نظر برداشته شده است، استفاده کرد.

در برخی از روباتهای صنعتی موجود در بازار، مجری نهایی به حس‌کننده نیرو مجهز شده است. این روباتها را می‌توان برای توقف حرکت و یا انجام عملی دیگر، هنگامی که نیروی حس شده از میزانی معین بیشتر باشد، برنامه‌ریزی کرد. این روباتها را می‌توان طوری برنامه‌ریزی کرد که وزن اجسام گرفته شده توسط مجری نهایی را تعیین کنند.

### مراجع

- [1] M. Mason, "Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators," M. S. Thesis, MIT AI Laboratory, May 1978.
- [2] J. Craig and M. Raibert, "A Systematic Method for Hybrid Position/Force Control of a Manipulator," *Proceedings of the 1979 IEEE Computer Software Applications Conference*, Chicago, November 1979.
- [3] M. Raibert and J. Craig, "Hybrid Position /Force Control of Manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, June 1981.

- [4] T. Lozano-Perez, M. Mason, and R. Taylor, "Automatic Synthesis of Fine- Motion Strategies for Robots," 1st International Symposium of Robotics Research, Bretton Woods, N.H., August 1983.
- [5] M. Mason, "Automatic Planning of Fine Motions: Correctness and Completeness," IEEE International Conference on Robotics, Atlanta, March 1984.
- [6] M. Erdmann, "Using Backprojections for the Fine Motion Planning with Uncertainty," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1, 1986.
- [7] S. Buckley, "Planning and Teaching Compliant Motion Strategies," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, January 1986.
- [8] B. Donald, "Error Detection and Recovery for Robot Motion Planning with Uncertainty," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, July 1987.
- [9] J.C. Latombe, "Motion Planning with Uncertainty: On the Preimage Backchaining Approach," in *The Robotics Review*, O. Khatib, J. Craig, and T. Lozano-Perez, Editors, MIT Press, 1988.
- [10] O. Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 1, 1987.
- [11] D. Whitney, "Force Feedback Control of Manipulator Fine Motions," Proceedings Joint Automatic Control Conference, San Francisco, 1976.
- [12] S. Eppinger and W. Seering, "Understanding Bandwidth Limitations in Robot Force Control," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, N.C., 1987.
- [13] W. Townsend and J.K. Salisbury, "The Effect of Coulomb Friction and Stiction on Force Control," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, N.C., 1987.

- [14] N. Hogan, "Stable Execution of Contact Tasks Using Impedance Control," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, N. C., 1987.
- [15] N. Hogan and E. Colgate, "Stability Problems in Contact Tasks," in *The Robotics Review*, O. Khatib, J. Craig, and T. Lozano-Perez, Editors, MIT Press, 1988.
- [16] J.K. Salisbury, "Active Stiffness Control of a Manipulator in Cartesian Coordinates," 19th IEEE Conference on Decision and Control, December 1980.
- [17] J.K. Salisbury and J. Craig, "Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1.
- [18] S. Drake, "Using Compliance in Lieu of Sensory Feedback for Automatic Assembly," Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering Department, MIT, September 1977.

## تمرینها

- ۱-۱۱ [۱۲] قیدهای طبیعی را برای یک پین با سطح مقطع مربع هنگامی که در داخل سوراخی مربع شکل می‌لغزد، تعیین کنید. چهارچوب  $\{C\}$  تعریف شده را با رسم شکل نشان دهید.
- ۲-۱۱ [۱۰] کدام قیدهای مصنوعی (مسیرها) را برای لغزاندن پین تمرین ۱-۱۱ به داخل سوراخ، بدون آنکه گیر کند، پیشنهاد می‌کنید؟
- ۳-۱۱ [۲۰] نشان دهید که استفاده از قانون کنترل (۱۱-۱۴) در سیستم داده شده توسط معادله (۱۱-۹)، به معادله خطای زیر می‌انجامد

$$\ddot{e}_f + k_v \dot{e}_f + (k_p f + m^{-1} k_e) e_f = m^{-1} k_e f_{dist}$$

همچنین نشان دهید که انتخاب بهره‌ها برای ایجاد میرایی بحرانی، تنها در صورتی که سختی محیط،  $k_e$ ، معلوم باشد، امکانپذیر است.

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} ۰,۸۶۶ & -۰,۵۰۰ & ۰,۰۰۰ & ۱۰,۰ \\ ۰,۵۰۰ & ۰,۸۶۶ & ۰,۰۰۰ & ۰,۰ \\ ۰,۰۰۰ & ۰,۰۰۰ & ۱,۰۰۰ & ۵,۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و در صورتی که بردار نیروگشتاور در مبدأ چهارچوب  $\{A\}$  چنین باشد

$$A_\nu = \begin{bmatrix} ۰,۰ \\ ۲,۰ \\ -۳,۰ \\ ۰,۰ \\ ۰,۰ \\ ۴,۰ \end{bmatrix}$$

بردار نیروگشتاور  $۱ \times ۶$  را در حالی که نقطه مرجع بر مبدأ چهارچوب  $\{B\}$  منطبق است، به دست آورید.

۵-۱۱ [۱۷] با داشتن

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} ۰,۸۶۶ & ۰,۵۰۰ & ۰,۰۰۰ & ۱۰,۰ \\ -۰,۵۰۰ & ۰,۸۶۶ & ۰,۰۰۰ & ۰,۰ \\ ۰,۰۰۰ & ۰,۰۰۰ & ۱,۰۰۰ & ۵,۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و در صورتی که بردار نیروگشتاور در مبدأ چهارچوب  $\{A\}$  چنین باشد

$$A_\nu = \begin{bmatrix} ۶,۰ \\ ۶,۰ \\ ۰,۰ \\ ۵,۰ \\ ۰,۰ \\ ۰,۰ \end{bmatrix}$$

بردار نیروگشتاور  $۱ \times ۶$  را در حالی که نقطه مرجع بر مبدأ چهارچوب  $\{B\}$  منطبق است، به دست آورید.

- ۶-۱۱ [۱۸] به زبان فارسی مراحل قرار دادن یک کتاب در شکاف موجود بین دو کتاب دیگر در قفسه‌ای پراز کتاب را توصیف کنید.
- ۷-۱۱ [۲۰] قیده‌های طبیعی و مصنوعی را برای بستن یک در لولایی به وسیله بازوی مکانیکی ماهر، تعیین کنید. هرگونه فرض معقول مورد نیاز را در نظر بگیرید. چهارچوب تعریف شده  $\{C\}$  را رسم کنید.
- ۸-۱۱ [۲۰] قیده‌های طبیعی و مصنوعی را برای برداشتن چوب‌پنبه‌ای از سر یک بطری نوشابه به وسیله بازوی مکانیکی ماهر، تعیین کنید. هرگونه فرض معقول مورد نیاز را در نظر بگیرید. چهارچوب تعریف شده  $\{C\}$  را رسم کنید.
- ۹-۱۱ [۴۱] در سیستم سروی سختی در بخش ۷-۱۱، هیچ‌گونه ادعایی مبنی بر پایداری سیستم نکرده‌ایم. فرض کنید از رابطه (۲۳-۱۱) به عنوان قسمت سروی یک بازوی مکانیکی مستقل و خطی شده استفاده شود (به طوری که  $n$  مفصل بازو به صورت جرم‌های واحد ظاهر شوند). ثابت کنید که برای هر  $K_v$  معین منفی، این کنترل کننده پایدار است.
- ۱۰-۱۱ [۴۸] برای سیستم سروی سختی در بخش ۷-۱۱، هیچ‌گونه ادعایی مبنی بر اینکه سیستم میرایی بحرانی دارد و یا می‌تواند داشته باشد، نکرده‌ایم. فرض کنید از رابطه (۲۳-۱۱) به عنوان قسمت سروی بازوی مکانیکی مستقل و خطی شده‌ای استفاده می‌شود (به طوری که  $n$  مفصل بازو به صورت جرم‌های واحد ظاهر شوند). آیا می‌توان  $K_p$  را به صورت تابعی از  $\Theta$  طوری طراحی کرد که سیستم در کلیه پیکربندی‌ها میرایی بحرانی داشته باشد؟
- ۱۱-۱۱ [۱۵] حرکت جسمی مکعب شکل، مطابق با شکل ۱۱-۱۴، از پایین به وسیله کف، و از پهلو به وسیله دیواری مقید شده است. با فرض اینکه این حالت تماسی در فاصله زمانی معینی برقرار باشد، قیده‌های طبیعی موجود را تعیین کنید.

### تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۱۱)

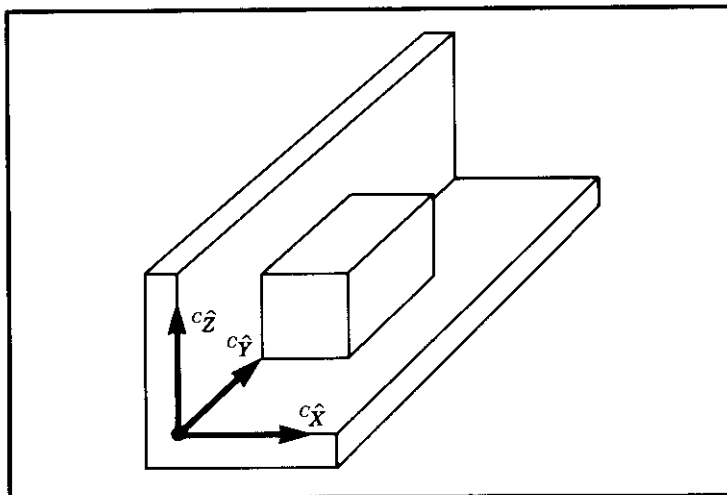
برای کنترل حرکت بازوی شبیه‌سازی شده از روایات صفحه‌ای با سه رابط، یک سیستم کنترل سختی دکارتی را که در آن از قانون کنترل (۲۳-۱۱) استفاده شده است، به کار گیرید. ژاکوبی را در چهارچوب  $\{3\}$  بنویسید.

در حالتی که بازو در مکان  $\Theta = [60^\circ \quad 30^\circ \quad 90^\circ]$  قرار دارد، و  $K_{ps}$  برابر با مقدار زیر است

$$K_{ps} = \begin{bmatrix} k_{small} & 0/^\circ & 0/^\circ \\ 0/^\circ & k_{big} & 0/^\circ \\ 0/^\circ & 0/^\circ & k_{big} \end{bmatrix}$$

بازو را به هنگام اعمال نیروهای استاتیکی زیر شبیه‌سازی کنید:





شکل ۱۱-۱۴ جسمی مکعب شکل که حرکت آن از پایین به وسیله کف، و از پهلو به وسیله دیوار مقید شده است.

۱. نیرویی برابر با  $1\text{ N}$  در مبدأ چهارچوب  $\{3\}$  در جهت  $\hat{X}_P$  وارد می شود.
  ۲. نیرویی برابر با  $1\text{ N}$  در مبدأ چهارچوب  $\{3\}$  در جهت  $\hat{Y}_P$  وارد می شود.
- مقادیر  $k_{small}$  و  $k_{big}$  باید با آزمایش تعیین شوند. برای سختی بالا در جهت  $\hat{Y}_P$ ، مقدار  $k_{big}$  را بزرگ در نظر بگیرید، و برای سختی پایین در جهت  $\hat{X}_P$ ، به  $k_{small}$  مقداری کوچک بدهید. در دو حالت فوق، تغییر شکل خمشی حالت پایا چقدر است؟



## سیستمها و زبانهای برنامه ریزی روبات

### ۱-۱۲ مقدمه

در این فصل، فصل مشترک (وسیله ارتباط) بین انسان استفاده کننده و روبات صنعتی را مورد توجه قرار می دهیم. به وسیله همین فصل مشترک است که استفاده کننده می تواند از کلیه الگوریتمهای مکانیکی و کنترلی معرفی شده در فصلهای قبل، بهره برداری کند.

با گسترش کاربرد صنعتی بازوهای مکانیکی ماهر و سایر وسایل اتوماسیون برنامه پذیر در رشته های گوناگون صنعتی، بغرنجی فصل مشترک استفاده کننده و روبات نیز اهمیت روزافزونی می یابد. ماهیت این فصل مشترک، مسئله ای بسیار مهم است و در حقیقت بخش بزرگی از طراحی و کاربرد روباتهای صنعتی، بر این جنبه از کار متمرکز است.

تفاوت بازوهای مکانیکی ماهر با اتوماسیون ثابت در آن است که این بازوها «انعطاف پذیر»، یعنی برنامه پذیرند. بازوهای مکانیکی ماهر، نه تنها از لحاظ حرکتهایشان برنامه پذیرند، بلکه با استفاده از حساسه ها و سیستمهای ارتباط با سایر وسایل اتوماسیون کارخانه ای، می توانند خود را با تغییرات ناشی از پیشرفت کار تطبیق دهند.

در بررسی برنامه ریزی بازوهای مکانیکی ماهر، باید به خاطر داشت که آنها در حالت عادی تنها قسمت کوچکی از هر فرایند اتوماسیون را تشکیل می دهند. برای توصیف مجموعه ای موضعی از تجهیزات، که ممکن است شامل یک یا چند بازوی مکانیکی ماهر، سیستمهای نقاله، تغذیه کننده های قطعات، و بستها باشد، از اصطلاح سلول کاری استفاده می شود. در سطحی بالاتر، سلولهای کاری را می توان به صورت شبکه های کارخانه ای طوری با یکدیگر مربوط ساخت که یک کامپیوتر مرکزی بتواند جریان کل عملیات انجام شده در کارخانه را کنترل کند. بدین ترتیب، برنامه ریزی بازوهای

مکانیکی ماهر، غالباً به صورت جزئی از برنامه‌ریزی ماشینهای مرتبط با هم در یک سلول کاری اتوماتیک کارخانه، در نظر گرفته می‌شود.

## ۱۲-۲ سه شیوه برنامه‌ریزی روبات

برای برنامه‌ریزی روباتها، چندین نوع فصل مشترک استفاده کننده، ابداع شده است. پیش از سرازیر شدن سریع میکرو کامپیوترها به صنعت، کنترل کننده‌های روبات به مرتب کننده‌های ساده اطلاعات که برای کنترل اتوماسیون ثابت به کار می‌رفتند، شباهت داشتند. اما رهیافتهای مدرن، بر برنامه‌ریزی کامپیوتری متمرکزند، و مسائل برنامه‌ریزی روباتها نیز شامل کلیه مسائل مطرح شده در برنامه‌ریزی کامپیوتری عام، و حتی بیش از آن است.

### آموزش از طریق نمایش

روباتهای اولیه، همگی به شیوه‌ای که آموزش از طریق نمایش می‌نامیم، برنامه‌ریزی می‌شدند. در این شیوه، روبات به نقطه هدف هدایت می‌شد، و مکان آن در حافظه‌ای که به وسیله مرتب کننده در هنگام تکرار حرکت خوانده می‌شد، ضبط می‌گردید. در مرحله آموزش، استفاده کننده، روبات را با دست، و یا با استفاده از جعبه آموزش، هدایت می‌کرد. جعبه‌های آموزش، جعبه‌های دستی دگمه‌داری هستند، که به وسیله آنها می‌توان هر مفصل بازو، و یا هر درجه آزادی دکارتی، را کنترل کرد. در برخی از این جعبه‌ها، امکان آزمون و انشعاب وجود دارد، به طوری که می‌توان برنامه‌های منطقی ساده را در آنها وارد کرد. برخی از جعبه‌های آموزش، صفحه نمایش عددی و القابایی دارند، و از نظر پیچیدگی به تمینالهای کامپیوتری دستی شباهت دارند. شکل ۱۲-۱، متصدی روبات را در حال استفاده از یک جعبه آموزش برای برنامه‌ریزی یک روبات بزرگ صنعتی، نشان می‌دهد.

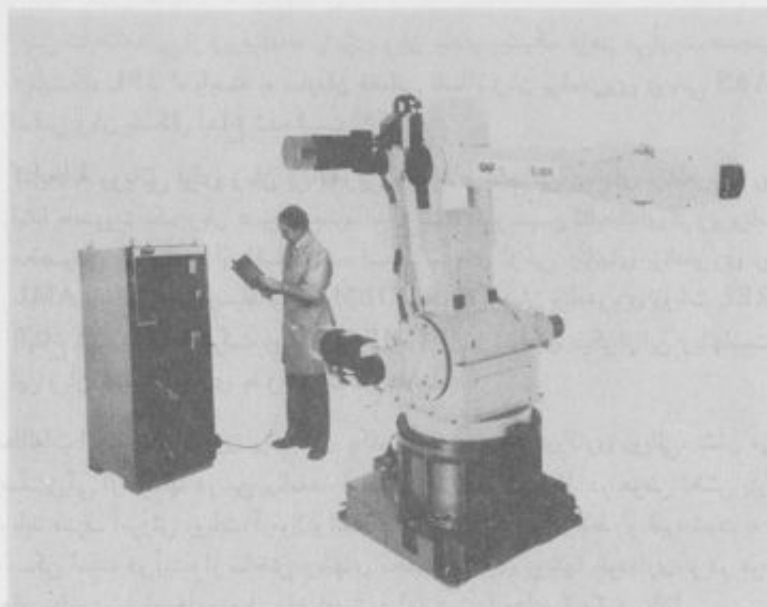
### زبانهای صریح برنامه‌ریزی روبات

با ورود کامپیوترهای پر قدرت و ارزان به میدان صنعت، تمایل روزافزونی برای برنامه‌ریزی روباتها به وسیله برنامه‌های نوشته شده به زبانهای کامپیوتری، احساس می‌شود. این زبانهای برنامه‌نویسی کامپیوتری، غالباً خصوصیات ویژه‌ای دارند که به مسائل برنامه‌ریزی روباتها مربوط می‌شود، و به همین دلیل، آنها را زبانهای برنامه‌ریزی روبات (RPL)<sup>۱</sup> می‌نامند. در بیشتر سیستمهایی که به یک زبان برنامه‌ریزی روبات مجهزند، سیستم قدیمتر جعبه آموزش نیز حفظ شده، قابل استفاده است.

زبانهای برنامه‌ریزی روبات، انواع گوناگونی دارند. در اینجا این زبانها را به سه دسته زیر تقسیم می‌کنیم:

۱. زبانهای تخصصی روبات. این زبانهای برنامه‌ریزی روبات، کاملاً جدیدند، و با اینکه مخصوص روباتها نوشته شده‌اند، اما ممکن است گاهی زبان برنامه‌ریزی کامپیوتری عام نیز

1. Robot Programming Languages



شکل ۱۲-۱ از روبات GMF S۳۸۰ اغلب برای جوشکاری نقطه‌ای بدنه اتومبیل استفاده می‌شود. در اینجا متصدی یا استفاده از جعبه آموزش، این روبات را برنامه‌ریزی می‌کند.

به شمار آیند. نمونه‌ای از این زبانها، زبان VAL است که برای کنترل روباتهای صنعتی شرکت یونیمیشن<sup>۱</sup> [۱] ابداع شده است. زبان VAL به‌ویژه برای کنترل روبات وضع شده است، و به‌عنوان زبان برنامه‌ریزی کامپیوتری عام، نقاط ضعف بسیار دارد. مثلاً، این زبان قادر به انجام عملیات با اعداد اعشاری (نقطه شناور) یا متغیرهای الفبایی نیست و در آن متغیرها به زیربرنامه‌ها منتقل نمی‌شوند. اخیراً، در شکل اصلاح شده این زبان تحت عنوان VAL II، این نواقص برطرف شده است [۲]. نمونه‌ای دیگر از زبانهای برنامه‌ریزی تخصصی روبات، زبان AL است، که در دانشگاه استنفورد ابداع شده است [۳].

۲. کتابخانه روباتی برای زبان کامپیوتری موجود. این زبانهای برنامه‌ریزی روبات، در اصل زبانهای کامپیوتری همه‌گیری بوده‌اند (مانند پاسکال) که به آنها کتابخانه‌ای از زیربرنامه‌های مخصوص روباتها، اضافه شده است. بدین ترتیب، استفاده کننده می‌تواند برنامه‌ای به زبان پاسکال بنویسد، و برای اصطلاحات خاص روباتی، زیربرنامه‌هایی از پیش آماده شده را فراخواند. نمونه‌های دیگری از این نوع زبانها، عبارت‌اند از AR-بیسیک<sup>۳</sup> (شرکت آمریکن سیمفلکس)<sup>۴</sup>، و روبات-بیسیک (شرکت اینتلدکس)<sup>۵</sup>. هر دو زبان، در

1. Unimation Inc. 2. AR-BASIC 3. American Cimflex

اصل کتابخانه‌هایی از زیربرنامه‌ها را برای زبان عادی بیسیک فراهم می‌آورند. همچنین در آزمایشگاه JPL<sup>۱</sup>، وابسته به سازمان فضایی ناسا<sup>۲</sup>، زبان برنامه‌ریزی روباتی JARS، بر اساس زبان پاسکال ابداع شده است [۶].

۳. کتابخانه روباتی برای زبان برنامه‌ریزی جدید و عام. این زبانهای برنامه‌ریزی روبات، ابتدا به صورت یک زبان عمومی جدید ابداع شده‌اند، و سپس کتابخانه‌ای از زیربرنامه‌های مخصوص روبات، به آن اضافه شده است. نمونه‌ای از این زبانهای برنامه‌ریزی روبات، AML (ابداع شده به وسیله شرکت IBM) است [۷]. زبان برنامه‌ریزی روبات KAREL (ابداع شده به وسیله شرکت روباتیکس GMF<sup>۳</sup>) نیز نمونه‌ای دیگر از این زبانهاست [۸]. این زبان شباهت زیادی به زبان پاسکال دارد.

مطالعات انجام شده بر روی برنامه‌های به کار رفته برای سلولهای کاری روباتی، نشان می‌دهد که درصد بزرگی از فرمانها در این برنامه‌ها، خاص روباتها نیستند [۷]. در عوض بخش بزرگی از برنامه، باید صرف آموزش روبات، آزمون و انشعاب منطقی، برقراری ارتباط، و غیره شود. به همین دلیل، ممکن است در آینده از ساختن زبانهای مخصوص برای روباتها خودداری، و در عوض به برنامه‌های عام، زیربرنامه‌های روباتی اضافه شود (مانند شماره‌های ۲ و ۳ در بالا).

### زبانهای برنامه‌ریزی عملیاتی

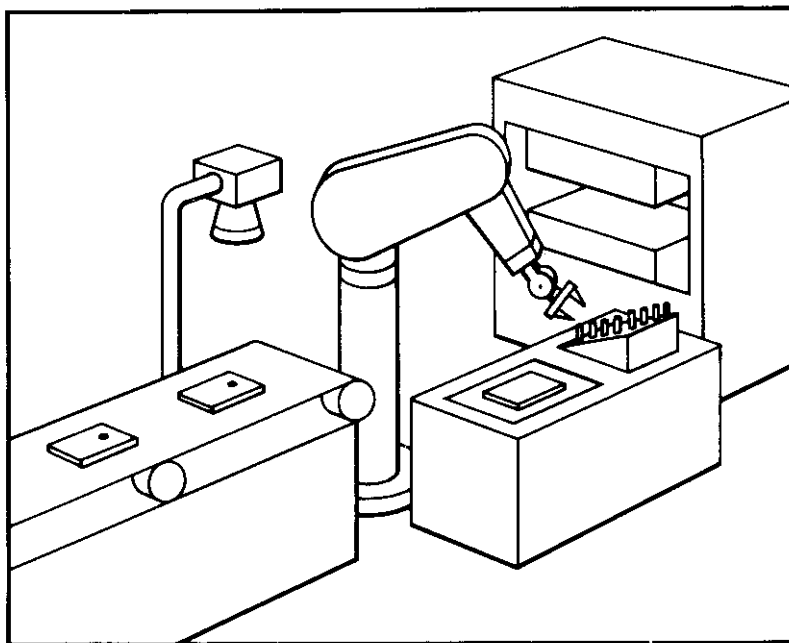
سومین شیوه برنامه‌ریزی روبات، استفاده از زبانهای برنامه‌ریزی عملیاتی است. این زبانها، به استفاده کنند، اجازه می‌دهند به جای آنکه جزئیات هر حرکت روبات را مشخص کنند، مستقیماً فرمان کاری را که مایل است روبات انجام دهد، صادر کنند. در این شیوه، استفاده کننده می‌تواند دستورات را در سطحی بسیار بالاتر از زبانهای برنامه‌ریزی صریح، در برنامه خود وارد کند. یک سیستم روباتی با برنامه‌ریزی عملیاتی، باید بتواند به طور اتوماتیک «نقشه» انجام عملیات بسیاری را اجرا کند. مثلاً، اگر دستور «پیچ را در دست بگیر» صادر شود، سیستم باید برای بازوی مکانیکی ماهر مسیری را طرح کند که در آن امکان برخورد با مانع وجود نداشته باشد، به طور خودکار نقطه‌ای مناسب برای گرفتن را روی پیچ در نظر بگیرد، و سپس پیچ را در دست بگیرد. تفاوت این زبان با زبان برنامه‌ریزی صریح، آن است که در زبان صریح، کلیه این دستورات را برنامه‌نویس باید در برنامه خود منظور کند.

بین زبانهای برنامه‌ریزی صریح و زبانهای برنامه‌ریزی عملیاتی، مرزی مشخص وجود دارد. در حال حاضر، اقداماتی برای ساده کردن برنامه‌ریزی صریح در جریان است، اما پیشرفتهای حاصل را نمی‌توان به صورت اجزای سیستم برنامه‌ریزی در نظر گرفت. برنامه‌ریزی عملیاتی بازوهای مکانیکی ماهر، هنوز در عمل مورد بهره‌برداری قرار نگرفته است، اما به منزله زمینه پژوهشی فعالی مطرح است [۹، ۱۰].

## ۱۲-۳ کاربردی نمونه

شکل ۱۲-۲ سلول کاری اتوماتیک شده‌ای را نشان می‌دهد. این سلول، در یک فرایند تولید فرضی، قسمت کوچکی از عملیات مونتاژ را به انجام می‌رساند و شامل یک تسمه نقاله برای حمل قطعه‌است که با کامپیوتر کنترل می‌شود. از یک دوربین که به سیستم بینایی متصل است، برای تشخیص مکان قطعه کار بر روی نقاله، استفاده می‌شود. در این سلول کاری (که در شکل پیوما ۵۶۰ است) یک روبات صنعتی وجود دارد که به حس‌کننده نیرو در مج مجهز است. تغذیه‌کننده کوچکی مستقر بر روی سطح کاری، قطعه کار دیگری را به روبات تحویل می‌دهد. روبات قطعات را در پرس مجهز به کنترل کامپیوتری می‌گذارد، و سپس قطعات آماده شده را در سکوی حمل قرار می‌دهد. کل فرایند فوق، به وسیله کنترل‌کننده روبات، به ترتیب زیر کنترل می‌شود:

۱. به نقاله فرمان حرکت داده می‌شود و هنگامی که سیستم بینایی گزارش دهد که قطعه‌ای بر روی نقاله دیده شده است، نقاله متوقف می‌شود.
۲. سیستم بینایی، مکان و جهتگیری این قطعه را بر روی نقاله تعیین می‌کند، و آن را برای تشخیص معایب احتمالی، معاینه می‌نماید.



شکل ۱۲-۲ سلول کاری اتوماتیک شده شامل یک روبات صنعتی.

۳. بازوی مکانیکی، با استفاده از خروجی سیستم بینایی، قطعه را با نیروی مشخص، در دست می‌گیرد. فاصله بین سرانگشتان بازو کنترل می‌شود تا از درست گرفته شدن قطعه، اطمینان حاصل شود. اگر قطعه درست گرفته نشده باشد، روبات کنار می‌رود و سیستم بینایی کار خود را تکرار می‌کند.

۴. قطعه در بست واقع بر روی میز کار قرار داده می‌شود. در این مرحله، می‌توان فرمان حمل قطعه بعدی را به نقاله فرستاد. به عبارت دیگر، مراحل ۱ و ۲ را می‌توان به موازات مراحل بعدی انجام داد.

۵. از تغذیه کننده یک بین برداشته می‌شود، و تا نیمه به داخل سوراخی مخروطی در قطعه کار فرو برده می‌شود. از کنترل نیرو برای انجام این عمل، و آزمون کامل انجام شدن آن، استفاده می‌شود. اگر تغذیه کننده بین خالی باشد، به متصدی علامت داده می‌شود، و روبات صبر می‌کند تا متصدی فرمان ادامه کار را صادر کند.

۶. روبات مجموعه قطعه و بین را برمی‌دارد، و در پرس قرار می‌دهد.

۷. در این مرحله پرس فعال می‌شود، و بین را به طور کامل در قطعه کار فرو می‌برد. سپس پرس فرمان خاتمه کار را اعلام می‌کند، و قطعه کار برای معاینه نهایی در بست قرار داده می‌شود.

۸. با استفاده از حس نیرو، از درست فرو رفتن بین در قطعه اطمینان حاصل می‌شود. روبات با اعمال نیروی جانبی به بین، نیروی واکنش آن را حس می‌کند، و با انجام چند آزمون دیگر، میزان فرورفتگی بین را تعیین می‌نماید.

۹. اگر تشخیص داده شود که موتاز درست صورت گرفته است، روبات قطعه تمام شده را در محل دیگری بر روی سکوی حمل قرار می‌دهد. اگر سکوی حمل پر باشد، به متصدی علامت داده می‌شود. در صورتی که عملیات موتاز به خوبی انجام نشده باشد، قطعه کار در سطل ضایعات انداخته خواهد شد.

۱۰. روبات صبر می‌کند تا مرحله ۲ (که به موازات مراحل ۵ تا ۱۰ انجام می‌گیرد) کامل شود، و سپس مرحله ۳ را آغاز می‌کند.

این مثال بود از عملیاتی که می‌توان به وسیله روباتهای صنعتی کنونی انجام داد (البته عملیات فوق برای روباتهای امروزی کمی مشکل است). باید توجه داشت که تعریف فرایند فوق به روش «آموزش از طریق نمایش»، احتمالاً امکانپذیر نخواهد بود. علت آن است که به هنگام کار با سکوی حمل، تنها مکان گوشه‌ای از سکو به روبات تعلیم داده می‌شود، و سپس مکان قسمتهای دیگر آن از طریق محاسبه، و با توجه به ابعاد سکو، به دست می‌آید (زیرا آموزش همه نقاط از سکوی حمل به روبات، بسیار طولانی و خسته کننده خواهد بود). همچنین، با استفاده از جعبه آموزش، یا فصل مشترک انتخابی، معمولاً به هیچ وجه امکان فرستادن فرمانهایی در حین عملیات، و برقراری



عملیاتی به موازات یکدیگر، وجود ندارد. در نتیجه، در این نوع کاربرد، به یک زبان برنامه‌ریزی روبات برای توصیف فرایند، نیاز خواهیم داشت (تمرین ۱۲-۵ را ببینید). از سوی دیگر، توصیف مستقیم کاربرد فوق، برای زبانهای برنامه‌ریزی عملیاتی کنونی بسیار دشوار است. غالباً بسیاری از کاربردها را باید به وسیله زبانهای برنامه‌ریزی صریح برای روباتها توصیف کرد. این کاربرد نمونه را در خاطر نگه می‌داریم و در بحث ویژگیهای زبانهای برنامه‌ریزی روبات، به آن اشاره می‌کنیم.

## ۱۲-۴ شرایط لازم برای زبان برنامه‌ریزی روبات

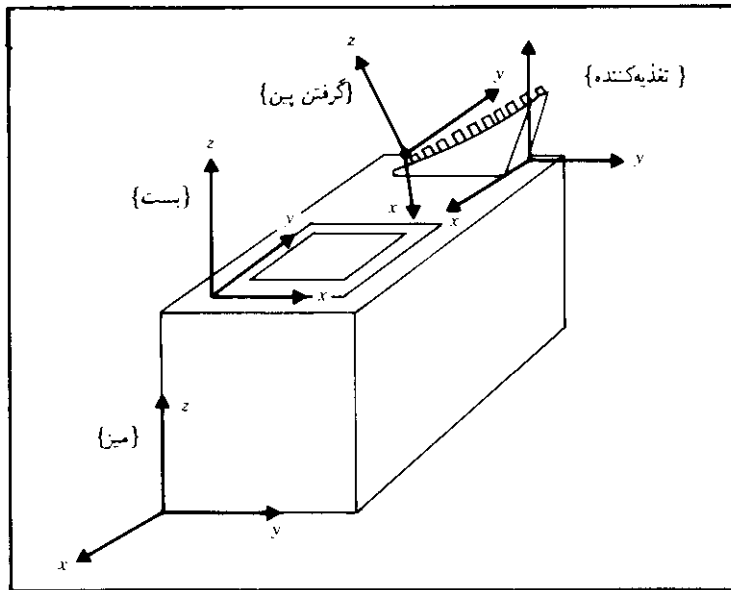
### مدلسازی جهانی

از آنجا که برنامه‌های نوشته شده برای روبات، طبق تعریف باید شامل به حرکت در آوردن اجسام در فضای سه بعدی باشند، پس روشن است که هر زبان برنامه‌ریزی، باید به نحوی قادر به توصیف این حرکات باشد. متداولترین عنصر زبانهای برنامه‌ریزی روبات، نوعهای هندسی است. مثلاً، از نوعهای برای مشخص کردن مجموعه زوایای مفصلی، به علاوه مکانها، جهتگیرها، و چهارچوبهای دکارتی، استفاده می‌شود. معمولاً عملگرهای ریاضی تعریف شده‌ای برای انجام عملیات مربوط به نوعها در دسترس است. از «چهارچوبهای استاندارد» معرفی شده در فصل ۳، می‌توان به منزله مدلی جهانی به صورت زیر استفاده کرد: کلیه حرکات به صورت حرکت چهارچوب ابزار نسبت به چهارچوب ایستگاه بیان می‌شوند، و چهارچوبهای هدف نیز از عبارتهایی اختیاری، شامل نوعهای هندسی، ساخته می‌شوند.

با داشتن محیط برنامه‌ریزی روباتی که نوعهای هندسی را شامل می‌شود، می‌توان روبات و دیگر ماشینها، قطعات، و بستها را از طریق تعریف متغیرهای نامگذاری شده مربوط به هر یک از آنها، مدلسازی کرد. در شکل ۱۲-۳، قسمتی از سلول کاری مورد بحث ما، که در آن چهارچوبها در مکانهای کاری مربوط قرار گرفته‌اند، دیده می‌شود. هر یک از این چهارچوبها در برنامه روبات به وسیله متغیری از نوع «frame» (چهارچوب) مشخص می‌شوند.

در بسیاری از زبانهای برنامه‌ریزی روبات، اساس مدلسازی جهانی را همین قابلیت تعریف متغیرهای نامگذاری شده از نوعهای هندسی گوناگون، تشکیل می‌دهد. توجه کنید که شکل فیزیکی اجسام یا سطوح، حجمها، جرهما، و دیگر ویژگیهای آنها، در مدلسازی جهانی وارد نمی‌شود. یکی از مهمترین تصمیمهایی که در هنگام طراحی یک سیستم برنامه‌ریزی روبات باید گرفته شود، دامنه مدلسازی اجسام در چهارچوب جهانی است. در بیشتر سیستمهای کنونی، تنها از شیوه‌ای که در بالا بدان اشاره شد، استفاده می‌شود.

در برخی سیستمهای مدلسازی جهانی، بین اجسام نامگذاری شده، متصل‌سازی انجام می‌شود [۳]، بدین ترتیب که دو یا چند جسم نامگذاری شده، به عنوان اجسام «متصل‌شده» به سیستم معرفی می‌شوند، و از آن پس، هرگاه یکی از این اجسام به وسیله یک دستور برنامه‌ریزی صریح حرکت داده شود، کلیه اجسام متصل‌شده به آن نیز حرکت خواهند کرد. بدین ترتیب، در



شکل ۱۲-۳ غالباً سلول کاری را به وسیله مجموعه‌ای از چهارچوبهای متصل به اجسام مورد نظر، مدلسازی می‌کنند.

سلول کاری شکل ۱۲-۲، بعد از آنکه پین به داخل سوراخ قطعه کار فرو رفت، به سیستم (به وسیله دستور برنامه‌ای) اطلاع داده می‌شود که پین و قطعه «متصل شده» اند. از آن پس، حرکت‌های قطعه (یعنی تغییرات در مقدار متغیر frame، که «bracket» نامگذاری شده است)، باعث می‌شود مقدار ذخیره شده برای متغیر «pin» نیز تغییر کند.

در حالت ایدئال، سیستم مدل‌سازی جهانی شامل اطلاعات بسیار بیشتری درباره خود روبات و اجسامی است که روبات با آنها کار می‌کند. مثلاً، سیستمی را در نظر بگیرید که اجسام را به صورت مدل‌های CAD توصیف می‌کند. این مدل‌ها شکل فضایی هر جسم را با تعریف لبه‌ها، سطوح، یا حجم آن به دست می‌دهند. با داشتن چنین داده‌هایی، به تدریج می‌توان از بسیاری از ویژگی‌های یک سیستم برنامه‌ریزی کاری استفاده کرد. امکانات استفاده از این ویژگی‌ها، در فصل ۱۳ بررسی می‌شود.

### مشخصات حرکتی

ویژگی بسیار مهم دیگر زبانهای برنامه‌ریزی روبات، قابلیت توصیف حرکت‌های مورد نظر برای روبات است. با به کارگیری دستورهای حرکتی زبان برنامه‌ریزی، استفاده کننده قادر به برقراری ارتباط با طرح‌ریزها و تولید کننده‌های مسیر (توصیف شده در فصل ۷) خواهد بود. این دستورات، امکان

تعیین نقاط بینایی و نقطه هدف، و تصمیم‌گیری درباره استفاده از حرکت مفصلی درونیایی شده یا حرکت دکارتی راست‌خط، را برای استفاده کننده فراهم می‌آورند. همچنین، استفاده کننده می‌تواند سرعت یا مدت حرکت را کنترل کند.

به‌منظور نمایش سینتاکس‌های (دستورات) حرکتی مختلف، حرکت‌های نمونه زیر را برای روبات در نظر می‌گیریم

۱. به مکان "goal1" برو،

۲. در راستای خط راست، به مکان "goal2" برو،

۳. بدون آنکه توقف کنی، از طریق "via1" به "goal3" برو، و سپس بایست.

با فرض اینکه کلیه این نقاط مسیر قبلاً به روبات آموزش داده شده، یا در برنامه آن گنجانده شده است، می‌توان این بخش از برنامه را چنین نوشت  
به زبان VAL II:

```
move goal1  
moves goal2  
move via1  
move goal3
```

به زبان AL (در اینجا بازوی مکانیکی ماهر "garm" کنترل می‌شود):

```
move garm to goal1;  
move garm to goal2 linearly;  
move garm to goal3 via via1;
```

و به زبان روبات بیسیک اینتلدکس<sup>۱</sup>:

```
10 move goal1  
20 move straight goal2  
30 cpon  
40 move via1  
50 move goal3  
60 cpoff
```

بیشتر زبانهای برنامه‌ریزی، سینتاکس‌های مشابهی برای توصیف حرکت‌های ساده دارند. اما هنگامی که به عوامل زیر توجه کنیم، تفاوت زبانهای برنامه‌ریزی روبات با یکدیگر، آشکارتر خواهد شد:

۱. قابلیت انجام عملیات ریاضی بر روی نوعهای دارای ساختار مانند چهارچوبها، بردارها، و ماتریسهای دوران.
۲. قابلیت توصیف مشخصات هندسی مانند چهارچوبها در چندین دستگاه گوناگون و مناسب، و قابلیت تبدیل این دستگاهها به یکدیگر.
۳. قابلیت ایجاد قید در مدت یا سرعت یک حرکت خاص. مثلاً، در بسیاری از سیستمها، استفاده کننده می‌تواند سرعت را برابر با کسری از سرعت ماکزیمم قرار دهد. در تعداد کمتری از سیستمها نیز به استفاده کننده امکان داده می‌شود مستقیماً مدت حرکت، یا ماکزیمم سرعت مفصل را به دلخواه تعیین کند.
۴. قابلیت تعیین نقاط هدف نسبت به چهارچوبهای گوناگون، که شامل چهارچوبهای مشخص شده به وسیله استفاده کننده، و چهارچوبهای متحرک (مثلاً متصل به یک نقاله) می‌باشند.

### ترتیب اجرای برنامه

در زبانهای برنامه‌ریزی روبات نیز، مانند بیشتر زبانهای برنامه‌ریزی کامپیوتری، به استفاده کننده امکان داده می‌شود ترتیب اجرای برنامه را مشخص کند. این بدان معناست که مفاهیمی چون آزمون و انشعاب منطقی، ایجاد حلقه (لوپ) در برنامه، فراخوانی زیر برنامه‌ها، و حتی قطع برنامه، در زبانهای برنامه‌ریزی روبات نیز وجود دارند.

در کاربرد سلولهای کاری اتوماتیک شده، پردازش همزمان در مقایسه با بسیاری از کاربردهای کامپیوتری دیگر، از اهمیت بیشتری برخوردار است. علت اصلی آن است که در بسیاری موارد، به منظور کاهش زمان چرخه عملیات، در سلول کاری از دو یا چند روبات که به طور همزمان کار می‌کنند، استفاده می‌شود. ولی حتی اگر در سلولهای کاری یک روبات موجود باشد (مانند سلول کاری شکل ۱۲-۲)، باز هم تجهیزات دیگری وجود خواهند داشت که باید به موازات یکدیگر، به وسیله روبات کنترل شوند. به همین دلیل، اغلب در زبانهای برنامه‌ریزی روبات، دستورهای «سیگنال و صبر کردن» در نظر گرفته شده، و در برخی زبانها ساختمانهای پیچیده‌تری نیز برای عملکرد همزمان تعبیه شده است [۳].

مطلب دیگری که باید در زبانهای برنامه‌ریزی روبات در نظر گرفته شود، نظارت بر فرایندهای گوناگون به وسیله نوعی حساسه است. در این حالت، سیستم روبات باید بتواند به علامتهایی که از حساسه‌ها دریافت می‌کند، پاسخ دهد. این پاسخ ممکن است به صورت قطع عملیات، یا به صورت پرسش از حساسه‌ها، داده شود. در برخی از زبانهای برنامه‌ریزی روبات، توانایی نظارت بر رویدادها فراهم شده است [۲، ۳].

### محیط برنامه‌ریزی

در زبانهای برنامه‌ریزی روبات، همانند زبانهای کامپیوتری دیگر، محیط برنامه‌ریزی مناسب می‌تواند کارایی برنامه‌ریز را بالا ببرد. برنامه‌ریزی بازوهای مکانیکی ماهر، کاری دشوار و نیازمند ارتباط

مقابل بین روبات و متصدی آن است و در آن از روش آزمون و خطا بسیار استفاده می‌شود. اگر استفاده‌کننده ناچار به تکرار چرخه «ویرایش برنامه، کمپایل برنامه، اجرای برنامه» از زبانهای کمپایل شده باشد، آنگاه کارایی او پایین خواهد آمد. به همین دلیل، در حال حاضر بسیاری از زبانهای برنامه‌ریزی روبات را طوری تفسیر می‌کنند که دستورهای برنامه، در حین نوشتن و غلط‌گیری برنامه، تک‌تک قابل اجرا باشند. همچنین، در این زبانها باید استفاده از برنامه‌های پشتیبانی چون ویرایشگرهای نوشتاری، غلط‌گیرها، و سیستم تشکیل فایل نیز امکان داشته باشد.

### تجمیع حساسه با روبات

یکی از ویژگیهای بسیار مهم در زبان برنامه‌ریزی روبات، قابلیت ایجاد ارتباط متقابل با حساسه‌هاست. سیستم روباتی باید دستکم به مکانیزم پرسش از حساسه‌های لمسی و نیرویی مجهز باشد، و بتواند از پاسخ دریافتی در دستورهای برنامه‌ریزی "if, then, else" استفاده کند. برخورداری از قابلیت مود زمینه برای نظارت بر عملکرد حساسه‌ها نیز بسیار سودمند خواهد بود.

«تجمیع» روبات با سیستم بینایی، به این سیستم امکان می‌دهد تا مختصات جسم مورد نظر را به روبات بفرستد. مثلاً، در شکل ۱۲-۲، سیستم بینایی قطعات کار را بر روی نقاله تشخیص می‌دهد، و مکان و جهتگیری آنها را نسبت به دوربین، به کنترل‌کننده روبات گزارش می‌دهد. نظر به اینکه وضعیت چهارچوب دوربین نسبت به چهارچوب ایستگاه معلوم است، می‌توان با استفاده از اطلاعات مربوط به این وضعیت نسبی، برای بازوی مکانیکی ماهر، چهارچوب هدفی مطلوب را محاسبه کرد.

برخی حساسه‌ها ممکن است جزئی از تجهیزات دیگر در سلول کاری باشند. مثلاً، بعضی از کنترل‌کننده‌های روبات، می‌توانند از ورودی به‌دست آمده از حساسه متصل به تسمه نقاله استفاده کنند، به‌طوری‌که روبات بتواند حرکت تسمه را ردیابی کند، و اجسام را در حین حرکت از روی آن بردارد [۲].

ارتباط با قابلیت‌های کنترل نیرو را که در فصل ۹ مورد بحث قرار گرفت، می‌توان با استفاده از دستورهای زبان برنامه‌ریزی، که استفاده‌کننده را قادر به تعیین استراتژی نیرویی [۳] می‌کند، برقرار کرد. این استراتژیهای نیرویی را به‌ناچار باید به‌صورت یکپارچه با سیستم کنترل روبات در نظر گرفت. زبان برنامه‌ریزی روبات، تنها به‌صورت فصل‌مشترک روبات و این قابلیت‌ها عمل می‌کند. روباتهای برنامه‌پذیر که از کنترل فعال نیرویی استفاده می‌کنند، ممکن است به مشخصات ویژه دیگری، چون قابلیت نمایش اطلاعات نیرویی گردآوری شده در طول یک حرکت مقید نیز نیاز داشته باشند [۳].

در سیستمهایی با کنترل نیرویی فعال، توصیف اعمال نیروی مطلوب را نیز می‌توان به‌صورت بخشی از مشخصات حرکتی در نظر گرفت. زبان AL، کنترل نیروی فعال را به‌وسیله تعیین شش مؤلفه سختی (سه مؤلفه انتقالی و سه مؤلفه دورانی) و یک نیروی متمایزکننده، توصیف می‌کند. بدین ترتیب، سختی ظاهری بازو قابل برنامه‌ریزی خواهد شد. در هنگام اعمال نیرو، معمولاً سختی

در آن جهت برابر با صفر قرار داده می‌شود، و مقداری برای نیروی متمایز کننده به دست می‌آید.  
مثلاً

```
move garm to goal
with stiffness=(80,80,0,100,100,100)
with force=20*ounces along zhat;
```

## ۱۲-۵ کاربرد نمونه به سه زبان برنامه‌ریزی روبات

شاید تنها راه کسب آگاهی دربارهٔ وضع کنونی زبانهای برنامه‌ریزی روبات، خواندن مثالهایی از برنامه‌های نوشته شده به زبانهای گوناگون باشد. در این بخش، مثال انتقال قطعات بین دو سکوی حمل را از مرجع [۱۱] انتخاب، و عملیات آن را به سه زبان برنامه‌ریزی مختلف بیان می‌کنیم. همهٔ این برنامه‌ها، مسئله یکسانی را حل می‌کنند: قطعه‌ای را به وسیلهٔ روبات از روی سکوی حملی با ردیف ۳۱ و ردیف ۱ ستون برداشته، آن را بر روی سکوی حمل دومی با ۳۲ ردیف و ۲ ستون بگذار، سپس برای آوردن سکوی پر، یا بردن سکوی خالی، به متصدی علامت بده، و یا صبر کن. این برنامه‌ها، در صورتی که با دقت خوانده شوند، کاملاً قابل درک خواهند بود.

### انتقال قطعات بین دو سکوی حمل به زبان AL

در زیر، برنامهٔ AL [۳] برای عملیات انتقال قطعات بین دو سکوی حمل (از مرجع [۱۱]) داده می‌شود:

```
BEGIN "Palletizing sample program"
  FRAME in.pallet, out.pallet, part;
  COMMENT
    The (1,1) positions of the pallets and
    grasping position of the parts;
  VECTOR del.r1, del.c1;
  VECTOR del.r2, del.c2;
  COMMENT Relative displacements along the rows and columns;
  SCALAR r1, c1, ir1, ic1;
  SCALAR r2, c2, ir2, ic2;
  COMMENT counters;
  EVENT in.pallet.empty, in.pallet.replaced;
  EVENT out.pallet.full, out.pallet.replaced;
  COMMENT
    Here insert the frame definitions for IN_PALLET
    and OUT_PALLET and the vector value for displacements
    along the rows and columns. These would be taught and
    recorded using the robot. FRAME definitions are typically
    unreadable by humans;
  COMMENT
    Now define the procedure PICK and PLACE called in the
    main program later on;
```

```

PROCEDURE PICK;
BEGIN
    FRAME pick_frame;
    ir1:= ir1 + 1;
    IF ir1 GT r1
    THEN
        BEGIN
            ir1 := 1;
            ic1 := ic1 + 1;
            IF ic1 GT c1
            THEN
                BEGIN
                    SIGNAL in.pallet.empty;
                    WAIT in.pallet.replaced;
                    ic1 := 1;
                END;
            END;
        pick_frame := in.pallet+(ir1-1)*del.r1+(ic1-1)*del.c1;
        MOVE BHAND TO pick_frame;
        CENTER BARM;
        AFFIX part TO BARM;
    END;
PROCEDURE PLACE;
BEGIN
    FRAME place_frame;
    ir2:= ir2 + 1;
    IF ir2 GT r2
    THEN
        BEGIN
            ir2 := 1;
            ic2 := ic2 + 1;
            IF ic2 GT c2
            THEN
                BEGIN
                    SIGNAL out.pallet.empty;
                    WAIT out.pallet.replaced;
                    ic2 := 1;
                END;
            END;
        place_frame := out.pallet+(ir2-1)*del.r2+(ic2-1)*del.c2;
        MOVE part TO place_frame;
        OPEN BHAND TO 3.0*IN;
        UNFIX part FROM BARM;
    END;
COMMENT The main program;
OPEN BHAND TO 3.0*IN;
WHILE TRUE DO
BEGIN
    PICK;
    PLACE;
END;
END;

```

## انتقال قطعات بین دو سکوی حمل به زبان KAREL

در زیر، برنامه انتقال قطعات بین دو سکوی حمل (از مرجع [۱۱]) به زبان KAREL [۸] ارائه می‌شود:

```

program PALLET
-- Transfers workpieces from one pallet to another.
var
-- Variables for the input pallet:
  BASE1 : position      -- (1,1) position on pallet
  IR1,IC1 : integer     -- counters for rows & cols
  NR1,NC1 : integer     -- limits for rows & cols
  DR1,DC1 : vector      -- delta between rows & cols
  ISIG1,OSIG1 : integer -- signals for pallet changing
-- Variables for the output pallet:
  BASE2 : position      -- (1,1) position on pallet
  IR2,IC2 : integer     -- counters for rows & cols
  NR2,NC2 : integer     -- limits for rows & cols
  DR2,DC2 : vector      -- delta between rows & cols
  ISIG2,OSIG2 : integer -- signals for pallet changing
-----
routine PICK
-- Pick a workpiece from the input pallet.
var
  TARGET : position      -- target pose
begin
  IR1 = IR1 + 1
  if IR1 > NR1
  then
    IR1 = 1
    IC1 = IC1 + 1
    if IC1 > NC1
    then
      IC1 = 1
      -- get a new pallet
      dout[OSIG1] = true
      -- notify pallet-changer
      wait for din[ISIG1]+
      -- wait for input line to go high,
      -- meaning pallet has been changed
      dout[OSIG1] = false
      -- turn off our output signal
      -- compute target pose
    endif
  endif
  TARGET = BASE1
      -- start with (1,1) pose
  shift(TARGET,(IR1-1)*DR1+(IC1-1)*DC1)
      -- shift for row and col offset
      -- get the part
  move near TARGET by 50 -- move to 50 mm away from TARGET
  move to TARGET
  close hand 1

```



## کاربردی نمونه به سه زبان برنامه ریزی روبات ۴۴۷

```

    move away 50    -- back away from TARGET by 50 mm
end PICK
-----
routine PLACE
-- Place a workpiece on the output pallet.
var
    TARGET : position    -- target pose
begin
    IR2 = IR2 + 1
    if IR2 > NR2
    then
        IR2 = 1
        IC2 = IC2 + 1
        if IC2 > NC2
        then
            IC2 = 1
            -- get a new pallet
            dout[OSIG2] = true
            -- notify pallet-changer
            wait for din[ISIG2]+
            -- wait for input line to go high,
            -- meaning pallet has been changed
            dout[OSIG2] = false
            -- turn off our output signal
            -- compute target pose
        endif
    endif
    TARGET = BASE2
        -- start with (1,1) pose
    shift(TARGET, (IR2-1)*DR2+(IC2-1)*DC2)
        -- shift for row and col offset
    move near TARGET by 50    -- move to 50 mm away from TARGET
    move to TARGET
    open hand 1
    move away 50    -- back away from TARGET by 50 mm
end PLACE
-----
                                MAIN PROGRAM
-----
begin
    IR1 = 0 ; IC1 = 0    -- initialize counters
    IR2 = 0 ; IC2 = 0
    -- initialize other variables:
    --
    --    BASE1 , NR1 , NC1 , DR1 , DC1 , ISIG1 , OSIG1
    --
    --    BASE2 , NR2 , NC2 , DR2 , DC2 , ISIG2 , OSIG2
    --
    -- numerical pose definitions omitted here
    open hand 1
    while true do        -- loop
        pick
        place
    endwhile
end PALLET

```

## انتقال قطعات بین دو سکوی حمل به زبان VAL II

برنامه نوشته شده به زبان VAL II [۲]، برای انتقال قطعات بین دو سکوی حمل، با کاربرد سیگنالهای I/O (ورودی/خروجی)، تقاضای سکوی حمل اضافی می‌کند. این برنامه از طریق ترمینال سیستم، با استفاده کننده ارتباط برقرار کرده، پرسشهایی مطرح می‌کند، و یا درباره عملکرد سیستم اطلاعاتی می‌دهد. محل سکوی حمل، از طریق حرکت دادن روبات به گوشه‌های سکو به وسیله متصدی (با استفاده از جعبه آموزش) به روبات آموزش داده می‌شود. سپس برنامه محل کلیه نقاط سکو را محاسبه می‌کند. پس از آنکه هر دو سکوی حمل آموزش داده شدند، روبات انتقال قطعات را آغاز می‌کند. و این کار را ادامه می‌دهد تا آنکه به طور دستی به وسیله متصدی متوقف شود.

```
.PROGRAM main()
;
; ABSTRACT: This is the top level program to move parts
; between two pallets. It allows the operator to teach
; the pallet locations if desired, and then moves parts
; from one pallet to the next.
;
; DATA STRUCTURES:
;
;   in.pallet[] = An array of locations for items on the
;                 pallet to be unloaded.
;   in.height   = Approach/depart height for input pallet.
;   in.max      = The number of items on a full input pallet.
;   in.count    = The number of items left on this input
;                 pallet.
;   out.pallet[] = An array of locations for items on the
;                 pallet to be loaded.
;   out.height  = Approach/depart height for output pallet.
;   out.max     = The number of items on a full output pallet.
;   out.count   = The number of items left on this output
;                 pallet.
;   #safe       = Safe robot location reachable from both
;                 pallets.
;
;   LOCAL $ans, in.count, out.count
; Define binary signal numbers used to control pallets
; transfer = 1001 ;Input signal TRUE when transfers permitted
; in.ready = 1002 ;Input signal TRUE when input pallet ready
; out.ready = 1003 ;Input signal TRUE when output pallet ready
; in.change = 4    ;Output signal requests new input pallet
; out.change = 5   ;Output signal requests new output pallet
; Ask operator about setup and teach new pallets if desired
; PROMPT "Do you want to define the pallet (Y/N):", $ans
; IF $ans == "Y" THEN
;     DETACH() ;Detach robot from program control
;     TYPE "Use the PENDANT to teach the input pallet location"
```

```

CALL setup.pallet(in.count, in.pallet[], in.height)
TYPE "Use the PENDANT to teach the output pallet location"
CALL setup.pallet(out.count, out.pallet[], out.height)
TYPE "Press the COMP button on the PENDANT to continue"
ATTACH() ;Attach robot (wait for COMP button)
END
; Initialize transfer data
transfer.count = 0 ;Count of parts transferred
in.count = 0 ;Assume empty input pallet at start
out.count = 0 ;Assume full output pallet at start
; Wait for transfer signal, then start the pallet transfer
MOVES #safe ;Move robot to a safe place
TYPE "Waiting for transfer signal ...", /S
WAIT SIG(transfer) ;Wait until transfer signal seen
TYPE "starting transfer", /C2
; Main loop transferring from one pallet to the other, requesting
; new pallets as necessary. Quit when transfer signal becomes FALSE
WHILE SIG(transfer) DD ;While transfer is still ok...
    IF in.count <= 0 THEN ;If out of input parts, ask for new
        SIGNAL in.change ;Request pallet change
        WAIT SIG(~in.ready) ;Wait for input not ready
        WAIT SIG(in.ready) ;Followed by input ready
        in.count = in.max ;Indicate full pallet
    END
    IF out.count <= 0 THEN ;If output pallet full, ask for new
        SIGNAL out.change ;Request pallet change
        WAIT SIG(~out.ready) ;Wait for output not ready
        WAIT SIG(out.ready) ;Followed by output ready
        out.count = out.max ;Indicate empty pallet
    END
    ; Acquire input part
    OPEN ;Open gripper
    APPROX in.pallet[in.count], in.height ;Move over part
    SPEED 20 ;Move at 20% speed
    MOVES in.pallet[in.count] ;Move to part
    CLOSEI ;Close immediately
    DEPARTS in.height ;Move up again
    in.count = in.count - 1 ;Count down
    ; Place output part
    APPROX out.pallet[out.count], out.height ;Move over output
    SPEED 20 ;Move at 20% speed
    MOVES out.pallet[out.count] ;Move to empty place
    DPENI ;Open immediately
    DEPARTS out.height ;Move up again
    out.count = out.count - 1 ;Count down
    ; Count transfer and display it
    transfer.count = transfer.count + 1
    TYPE /U1, "Number of parts transferred:", /I8, transfer.count
END ;End of while loop
; All done transferring parts, move robot to safe place and quit
MOVES #safe
.END

```

```
.PROGRAM setp.pallet(count, array[], approach)
; ABSTRACT: Routine to compute an array of locations given locations
; which represent the upper left, lower left, and lower right point
; of a pallet. All output locations have the orientation of the
; upper left part location.
;
; INPUT PARM: None
;
; OUTPUT PARM: count = Number of items on this pallet.
;               array[] = Array containing the pallet locations.
;               approach= The approach height for this pallet.
;
LOCAL ul, ll, lr, ap, t[], ncol, nrow
LOCAL row, col, cs, rs, i, frame
; Ask operator to teach pallet locations
CALL teach.point("upper left pallet position", ul)
CALL teach.point("lower left pallet position", ll)
CALL teach.point("lower right pallet position", lr)
CALL teach.point("approach height above the pallet", ap)
PROMPT "Enter the number of columns (left to right): ", ncol
PROMPT "Enter the number of rows (top to bottom): ", nrow
count = ncol*nrow ;Compute count of items
; Setup to compute pallet locations
cs = 0 ;Assume 1 column, zero spacing
IF ncol > 1 THEN
    cs = DISTANCE(ll,lr)/(ncol-1) ;Compute spacing of columns
END
rs = 0 ;Assume 1 row, zero spacing
IF nrow > 1 THEN
    rs = -DISTANCE(ul,ll)/(nrow-1);Compute spacing of rows
END
; Compute frame values
SET frame = FRAME(ll,lr,ul,ul) ;Compute frame for pallet
approach = DZ(INVERSE(frame):ap);Compute approach height
;wrt frame plane

DECOMPOSE t[1] = ul
; Loop to compute array values
i = 1
FOR row = 0 to nrow-1
    FOR col = 0 to ncol-1
        SET array[i] = frame:TRANS(row*rs,col*cs,0,t[4],t[5],t[6])
        i = i + 1
    END
END
RETURN
.END
```

## ۱۲-۶ مسائل ویژه در زبانهای برنامه‌ریزی روبات

با وجود پیشرفتهای انجام شده در سالهای اخیر، برنامه‌ریزی روباتها هنوز دشوار است. برنامه‌ریزی روباتها، کلیهٔ مسائل مربوط به برنامه‌ریزی کامپیوتری معمولی، به‌علاوهٔ مشکلات ناشی از اثرات فیزیکی را در بر می‌گیرد [۱۲].

### مدل جهانی داخلی در مقابل واقعیت خارجی

یکی از ویژگیهای جدید سیستم برنامه‌ریزی روبات، مدل جهانی است که در داخل کامپیوتر تعبیه شده است. حتی اگر این مدل بسیار ساده باشد، به هنگام حصول اطمینان از منطبق بودن این مدل با واقعیت خارجی، به مشکلات زیادی بر می‌خوریم. منطبق نبودن مدل داخلی بر واقعیت خارجی، سبب می‌شود که در دست گرفتن اجسام (به‌وسیلهٔ روبات)، رضایتبخش نباشد (و یا اصولاً انجام نشود)، با مانع برخورد شود، و بسیاری مسائل دیگر پدید آید.

تطابق بین مدل داخلی و واقعیت خارجی، باید در ابتدای برنامه مشخص، و در سراسر اجرای برنامه حفظ شود. در مرحلهٔ اول برنامه‌ریزی یا غلط‌گیری، وظیفهٔ تطبیق دستورهای برنامه با واقعیت فیزیکی در سلول کاری، بر عهدهٔ استفاده‌کننده است. برخلاف برنامه‌ریزی کامپیوتری معمولی که در آن تنها متغیرهای داخلی ذخیره (SAVE)، و برای تکرار وضعیت قبلی دوباره مطرح (RESTORE) می‌شوند، در برنامه‌ریزی روباتها، باید اجسام فیزیکی را به وضعیت قبلی بازگرداند.

علاوه بر عدم قطعیت ذاتی در مکان هر قطعه، محدود بودن دامنهٔ دقت خود بازو نیز دشواریهایی پدید می‌آورد. اغلب در عملیات مونتاژ، بازو باید حرکات را با دقتی بیش از حد توانایی خود انجام دهد. مثالی متداول در این مورد، فرو بردن یک پین به‌داخل سوراخی است که لقی آن از دقت مکانی روبات کمتر است. موضوعی که مسئله را از این هم پیچیده‌تر می‌سازد، تغییر دقت بازو در فضای کاری آن است.

اگر مکان اجسام دقیقاً مشخص نباشد، باید به ترتیبی دقت اطلاعات مکانی آنها را بالا برد. این کار را گاهی اوقات می‌توان به‌وسیلهٔ حساسه‌های بینایی یا لمس‌کننده، و یا با استفاده از استراتژیهای نیرویی مناسب برای حرکتهای مقید شده، انجام داد.

در هنگام غلط‌گیری برنامه‌های روبات، بسیار سودمند خواهد بود اگر بتوان پس از اصلاح برنامه بازگشت کرده، قسمتی از آن را دوباره تکرار نمود. عمل بازگشت، به معنای برگرداندن بازوی مکانیکی ماهر و اجسام حمل شده توسط آن، به حالت قبلی آنهاست. اما هنگام کار کردن با اجسام فیزیکی، همواره نمی‌توان (و یا به‌سادگی نمی‌توان) به حالت اول بازگشت. مثلاً، عملیات رنگکاری، پرچکاری، سوراخکاری، و یا جوشکاری، در اجسام تغییراتی ایجاد می‌کنند که برگشت ناپذیرند. در نتیجه، ممکن است لازم شود استفاده‌کننده از جسم اولیه نسخه‌ای جدید تهیه کند، و آن را در عملیات تکراری به‌کار برد. علاوه بر این، تکرار برخی از عملیات انجام شده قبل از عملیات تکراری اصلی، نیز ممکن است در موفقیت‌آمیز بودن نتایج، تأثیر مثبت داشته باشد.

### حساسیت متن برنامه

برنامه‌ریزی پایین به بالا، روشی استاندارد برای نوشتن برنامه‌های کامپیوتری بزرگ است. در این روش، ابتدا قسمت‌های کوچک و سطح پایین برنامه نوشته شده، کنار هم قرار می‌گیرد، تا سرانجام برنامه کامل به دست آید. این روش هنگامی قابل استفاده است که قسمت‌های کوچک برنامه، نسبت به دستورهای پیش از خود حساسیتی نداشته باشند، و همچنین درباره اجرای این قسمت‌های کوچک، به هنگام قرارگیری آنها در متن برنامه هیچ فرضی نشود. اغلب در برنامه‌ریزی روباتها، این حالت صادق نیست. وقتی برنامه‌ای که به تنهایی به درستی اجرا می‌شود، در برنامه‌ای بزرگتر قرار می‌گیرد، به دفعات اشکال ایجاد می‌کند. دلیل این اشکالها، وابسته بودن برنامه به وضعیت بازوی مکانیکی ماهر و سرعت حرکت‌های آن است.

برنامه‌های روبات ممکن است نسبت به شرایط اولیه (مثلاً مکان اولیه بازو) بسیار حساس باشند. در مسیرهای حرکت، مکان اولیه بر مسیر مورد استفاده تأثیر می‌گذارد. همچنین، مکان اولیه بازو، بر سرعت آن در قسمت بحرانی حرکت تأثیر می‌گذارد. این حالت، در بازوهای مکانیکی ماهر که مسیرهای فضای مفصلی درجه سوم را (که در فصل ۷ بررسی شد) دنبال می‌کنند، رخ می‌دهد. اثرات فوق را می‌توان با دقت در برنامه‌ریزی از میان برداشت، اما از سوی دیگر، ممکن است این اثرات تنها پس از آنکه برنامه کوچکتر غلط‌گیری شد و در برنامه بزرگتر قرار گرفت، ظاهر شوند.

به دلیل عدم وجود دقت کافی در بازوی مکانیکی ماهر، احتمالاً برنامه کوچکی که برای اجرای عملی خاص در یک محل نوشته می‌شود، باید پیش از به کار گرفته شدن در محلی دیگر، تنظیم شود (مکانها باید دوباره به روبات آموزش داده شوند، و غیره). اما تغییرات محل در محدوده سلول کاری، باعث ایجاد تغییر در پیکربندی بازو به هنگام رسیدن به نقاط هدف خواهد شد. در نتیجه، تنظیم دوباره حرکت‌های بازو در سلول کاری، بر دقت معادله‌های سینماتیکی و سیستم سزوی روبات تأثیر می‌گذارد، و مشکلات زیادی را ایجاد می‌کند. بر اثر تنظیم دوباره، ممکن است مثلاً جای شانه چپ با شانه راست عوض شود، یا آنکه بازو به جای حالت آرنج در بالا، حالت آرنج در پایین را اختیار کند. همچنین، این گونه تغییرات در پیکربندی بازو، می‌تواند باعث ایجاد حرکت‌های طولانی، به جای حرکت‌های کوتاه قبلی، شود.

با قرارگیری مسیرهای حرکت در قسمت‌های مختلف فضای کاری روبات، احتمالاً شکل فضایی مسیرها تغییر می‌کند. این امر، به ویژه در مسیرهای فضای مفصلی صادق است، اما استفاده از مسیرهای دکارتی نیز ممکن است در نزدیکی نقاط تکیه، مشکلاتی ایجاد کند.

به هنگام آزمودن حرکات بازوی مکانیکی برای نخستین بار، بهتر است بازو را به آهستگی حرکت دهیم. این کار به استفاده کننده امکان می‌دهد در صورت مشاهده احتمال برخورد بازو با مانع، بازو را متوقف، و همچنین حرکت روبات را به دقت معاینه کند. پس از آنکه حرکت آهسته بازو اصلاح شد، می‌توان سرعت آن را افزایش داد. افزایش سرعت ممکن است در بسیاری از

خصوصیات حرکت تغییر ایجاد کند. در بیشتر روباتها، به سبب وجود محدودیت در سیستم کنترل، خطاهای سرؤ در سرعتهای بالاتر، بزرگتر خواهند شد. همچنین، در هنگام انجام کنترل نیرو برای تماس بازو با محیط، تغییر سرعت می‌تواند استراتژیهای نیرویی را که برای موفق بودن کنترل در نظر گرفته شده‌اند، بی‌اثر سازد.

ممکن است پیکربندی بازوی مکانیکی ماهر، بر ظرافت و دقت اعمال نیروها به وسیله بازو نیز تأثیر گذارد. این مسئله تابعی از مطلوب بودن شرایط ژاکوبی بازو در هر پیکربندی معین است، و توجه به آن در برنامه‌ریزی روبات، بسیار دشوار است.

### تصحیح خطا

یکی دیگر از نتایج مستقیم کار کردن با جهان فیزیکی، آن است که اجسام ممکن است دقیقاً در جایی که برای آنها در نظر گرفته شده، قرار نگیرند، و در نتیجه حرکات آنها با خطا همراه باشد. بخشی از برنامه‌ریزی روباتها، به حساب آوردن این خطاها و سعی در جلوگیری از زیاد دقیق کردن عملیات مونتاژ است. اما حتی در این صورت نیز خطاهایی رخ می‌دهد، و یکی از مهمترین جنبه‌های برنامه‌ریزی روباتها، چگونگی تصحیح این خطاهاست.

اجرای تقریباً هرگونه دستور حرکتی در برنامه نوشته شده برای روبات، ممکن است گاهی به دلایل گوناگون، با اشکال روبرو شود. برخی از دلایل عادی ایجاد اشکال عبارت‌اند از تغییر محل اجسام یا سقوط آنها از دست روبات، قرار نداشتن یک قطعه در محل خود، گیر کردن قطعات به هنگام فرو رفتن در یکدیگر، عدم توانایی تعیین مکان سوراخ، و غیره.

نخستین مسئله در تصحیح خطا، شناسایی وقوع خطاست. چون روباتها در حالت کلی قابلیت حس کردن و نتیجه‌گیری منطقی محدودی دارند، این آشکارسازی خطا اغلب به دشواری صورت می‌گیرد. به منظور آشکار ساختن خطا، در برنامه باید نوعی آزمون خطا در نظر گرفته شود. این آزمون، می‌تواند با بررسی مکان بازو از نظر قرارگیری در گستره صحیح، انجام شود. مثلاً، در حالتی که روبات در حال فرو بردن جسمی در داخل یک سوراخ است، در صورتی که مکان بازو ثابت بماند، ممکن است بازو گیر کرده باشد، یا اگر تغییرات مکان بازو زیاد باشد، ممکن است بازو از سوراخ گذشته، یا جسم از دست روبات رها شده باشد. اگر در سیستم بازو قابلیت‌های بینایی در نظر گرفته شود، آن‌گاه روبات می‌تواند با گرفتن عکس، وجود قطعه کار را تحقیق، و در صورت وجود محل آن را تعیین کند. در واریسهای دیگر، می‌توان از نیرو استفاده کرد. مثلاً وزن کردن بار موجود در دست روبات، نشان خواهد داد که آیا جسم هنوز در دست قرار دارد یا آنکه رها شده است، و یا با اندازه‌گیری نیروی تماسی، می‌توان دریافت که آیا مقدار آن در محدوده مجاز قرار دارد یا نه. از آنجا که اجرای هر دستور حرکتی برنامه ممکن است با شکست مواجه شود، آزمونهای مستقیم فوق بسیار خسته کننده و تکراری‌اند، و گاهی جای بیشتری از قسمتهای دیگر برنامه اشغال می‌کنند. به همین دلیل، به جای آنکه این آزمونها را برای هرگونه خطای ممکن تکرار کنیم، آنها را تنها در مورد دستورهای به کار می‌بریم که احتمال شکست در اجرای آنها بسیار زیاد باشد. فرایند

تعیین قسمتهایی از برنامه که اجرای آنها احتمالاً با شکست مواجه می‌شود، مستلزم میزان معینی برهم‌کنش، و انجام آزمونهای جزئی بر روی روبات در حین نوشتن برنامه است.

پس از آنکه خطایی آشکار شد، برای تصحیح آن اقدام می‌شود. این کار را می‌توان به‌طور کامل به‌وسیله بازو در حالتی که تحت کنترل برنامه است، به‌طور دستی به‌وسیله استفاده کننده، و یا به‌صورت ترکیبی از این دو، انجام داد. در هر یک از این حالتها، ممکن است کوشش برای اصلاح خطا، خود خطایی جدید ایجاد کند. بدین‌ترتیب، دیده می‌شود که تصحیح خطا می‌تواند بیشتر برنامه را به خود اختصاص دهد.

استفاده از عملیات موازی در برنامه‌های بازوهای مکانیکی ماهر، می‌تواند تصحیح خطا در آنها را پیچیده‌تر سازد. هنگامی که چندین فرایند به‌طور همزمان انجام می‌شوند، ایجاد خطا در یکی ممکن است بر دیگر فرایندها نیز تأثیر گذارد. در بسیاری حالتها، می‌توان فرایند خطا دار را بازگشت داد، بدون آنکه فرایندهای دیگر متوقف شوند. از سوی دیگر، در مواردی نیز لازم است چند فرایند، یا حتی کلیه فرایندها، را دوباره تنظیم کرد.

## مراجع

- [1] B. Shimano, "VAL: A Versatile Robot Programming and Control System," Proceedings of COMPSAC 1979, Chicago, November 1979.
- [2] B. Shimano, C. Geschke, and C. Spalding, "VAL II: A Robot Programming Language and Control System," SME Robots VIII Conference, Detroit, June 1984.
- [3] S. Mujtaba and R. Goldman, "AL Users' Manual," 3rd edition, Stanford Department of Computer Science, Report No. STAN-CS-81-889, December 1981.
- [4] A. Gilbert et al., *AR-BASIC: An Advanced and User Friendly Programming System for Robots*, American Robot Corporation, June 1984.
- [5] Intelledex, Inc., "Model 605 Operator's Manual," Section 3, Intelledex Inc., 1983.
- [6] J. Craig, "JARS -JPL Autonomous Robot System: Documentation and Users Guide," JPL Interoffice memo, September 1980.



- [7] R. Taylor, P. Summers, and J. Meyer, "AML: A Manufacturing Language," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No.3, Fall 1982.
- [8] GMF Robotics Inc., "KAREL Language Reference," Version 1.20p, Troy, Mich., 1986.
- [9] R. Taylor, "A Synthesis of Manipulator Control Programs from Task-Level Specifications," Stanford University AI Memo 282, July 1976.
- [10] T. Lozano-Perez, "Automatic Planning of Manipulator Transfer Movements," *IEEE Transactions on Man, Systems, and Cybernetics*, Vol. SMC-11, No. 10, October 1981.
- [11] W. Gruver and B. Soroka, "Programming, High Level Languages," in *The International Encyclopedia of Robotics*, R. Dorf and S. Nof, Editors, Wiley Interscience, 1988.
- [12] R. Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, Mich., 1985.

## تربنها

- ۱-۱۲ [۱۵] برنامه‌ای بنویسید (به هر یک از زبانهای ذکر شده در مرجعهای [۱] تا [۸]) که در آن روبات قطعه‌ای را از محل A بردارد و در محل B بگذارد.
- ۲-۱۲ [۲۰] مراحل بستن بند کفش خود را با دستورهای فارسی (یا انگلیسی)، به صورتی که پایه‌ای برای تنظیم یک برنامه کامپیوتری باشد، بنویسید.
- ۳-۱۲ [۳۲] سینتاکس یک زبان جدید برنامه‌ریزی روبات را پیشنهاد کنید. راههایی برای تعیین مدت یا سرعت حرکات، دستورهای I/O به دستگاههای جانبی، کنترل مجری نهایی روبات، و حس کردن نیرو (حرکت محتاطانه)، ارائه دهید. می‌توانید کنترل نیرو و عملیات موازی را ندیده بگیرید (تمرین ۴-۱۲ را ببینید).
- ۴-۱۲ [۲۸] به زبان جدید برنامه‌ریزی روباتی که در تمرین ۳-۱۲ پیشنهاد کردید، یک سینتاکس برای کنترل نیرو و یک سینتاکس برای عملیات موازی نیز اضافه کنید.
- ۵-۱۲ [۳۸] به یکی از زبانهای موجود برای برنامه‌ریزی روبات، برنامه‌ای بنویسید که عملیات گفته شده در بخش ۳-۱۲ را انجام دهد. هرگونه فرض لازم را در ارتباط با اتصالهای

I/O و دیگر جزئیات، در نظر بگیرید. می‌توانید از هر یک از مرجعهای [۱] تا [۸]، یا مراجع دیگر برای جزئیات سینتاکس استفاده کنید.

۶-۱۲ [۲۸] با استفاده از یک زبان برنامه‌ریزی (مثلاً مرجعهای [۱] تا [۸])، برنامه‌ای برای تخلیه یک سکوی حمل با اندازه دلخواه بنویسید. برنامه باید تعداد قطعات روی سکوا بشمارد، و پس از آنکه سکوا تخلیه شد، به متصدی اطلاع دهد. فرض کنید قطعات پس از برداشته شدن از سکوا، بر روی یک تسمه نقاله قرار داده می‌شوند.

۷-۱۲ [۳۵] با استفاده از یک زبان برنامه‌نویسی (مثلاً مرجعهای [۱] تا [۸])، برنامه‌ای برای تخلیه قطعات از یک سکوی حمل مبدأ (با اندازه دلخواه)، و قرار دادن آنها بر روی یک سکوی حمل مقصد (با اندازه دلخواه) بنویسید. برنامه باید تعداد قطعات منتقل شده بین دو سکوا را بشمارد، و پس از خالی شدن سکوی مبدأ (و یا پر شدن سکوی مقصد)، به متصدی علامت دهد.

۸-۱۲ [۳۵] با استفاده از زبان AL [۳]، برنامه‌ای بنویسید که به وسیله کنترل نیرویی، یک قوطی سیگار را با ۲۰ عدد سیگار پر کند. فرض کنید که بازوی مکانیکی ماهر، دقتی در حدود ۰/۲۵ in دارد. در نتیجه کنترل نیرو باید برای تعداد زیادی از عملیات، انجام شود. سیگارها بر روی یک تسمه نقاله حمل می‌شوند، و یک سیستم بینایی نیز مختصات آنها را برای روبات تعیین می‌کند.

۹-۱۲ [۳۵] با استفاده از یک زبان برنامه‌نویسی دلخواه (مثلاً مرجعهای [۱] تا [۸])، برنامه‌ای بنویسید که گوشی یک تلفن با طرح استاندارد را مونتاژ کند. شش قسمت گوشی تلفن (دسته، میکروفن، بلندگو، دو درپوش، و سیم) به صورت یک کیت حمل می‌شوند (یعنی بر روی سکویی ویژه که قسمتهای شش تایی را به صورت یک مجموعه واحد حمل می‌کند). فرض کنید گوشی در داخل یک بست قرار دارد. هرگونه فرض معقول دیگری را که لازم می‌دانید نیز انجام دهید.

۱۰-۱۲ [۳۳] برنامه‌ای به زبان AL [۳] بنویسید که در آن از دو بازوی مکانیکی ماهر استفاده شود. نام یک بازو GARM است که مجری نهایی مخصوصی برای در دست گرفتن یک بطری نوشابه دارد. نام بازوی دیگر نیز BARM است. BARM لیوانی را در دست می‌گیرد، و مع آن حساسه‌های نیرویی دارد. وقتی BARM پر شدن بطری را حس کرد، برای GARM سیگنالی می‌فرستد تا ریختن نوشابه را قطع کند.

### تمرین برنامه‌نویسی (قسمت ۱۲)

با نوشتن چند زیربرنامه به زبان پاسکال، یک فصل مشترک استفاده کننده<sup>۱</sup> با دیگر برنامه‌هایی که تاکنون نوشته‌اید، بسازید. پس از کامل شدن این زیربرنامه‌ها، استفاده کننده باید بتواند با نوشتن برنامه‌ای به زبان پاسکال، که در آن این زیربرنامه‌ها فراخوانده می‌شوند، یک روبات با دو درجه

1. User interface

آزادی را شبیه‌سازی کند.

با تعریف دستوره‌ای زیر، به استفاده‌کننده امکان دهید چهارچوب‌های ایستگاه و ابزار را مشخص کند

```
setstation (SrelB: vec3);
```

```
settool(TrelW: vec3);
```

که در آن "SrelB" چهارچوب ایستگاه را نسبت به چهارچوب پایه روبات، و "TrelW" چهارچوب ابزار را نسبت به چهارچوب میج بازو، تعریف می‌کند. دستوره‌ای حرکتی را نیز چنین تعریف کنید

```
moveto(goal: vec3);
```

```
moveby(increment: vec3);
```

که در آن "goal" مشخصات چهارچوب هدف را نسبت به چهارچوب ایستگاه، و "increment" مشخصات چهارچوب هدف را نسبت به چهارچوب ابزار فعلی بیان می‌کند. برنامه را طوری ترتیب دهید که استفاده‌کننده ابتدا تابع "pathmode" را فراخواند، سپس نقاط بینابینی مسیر را مشخص کند، و سرانجام با دستور "runpath"، برنامه را اجرا کند. مثلاً

```
pathmode; (* enter path mode *)
```

```
moveto(goal1);
```

```
moveto(goal2);
```

```
runpath; (* execute the path without stopping at goal1*)
```

برنامه «کاربردی» ساده‌ای بنویسید که در آن محل بازو در هر  $n$  ثانیه یکبار چاپ شود.



## سیستمهای برنامه‌ریزی خارج خط

### ۱-۱۳ مقدمه

سیستم برنامه‌ریزی خارج خط (OLP)<sup>۱</sup>، زبان برنامه‌ریزی روبات گسترش یافته‌ای است که در آن، به‌وسیلهٔ گرافیک کامپیوتری، می‌توان برای روبات برنامه نوشت، بدون آنکه نیازی به دسترسی به خود روبات باشد. سیستمهای برنامه‌ریزی خارج خط هم در برنامه‌ریزی اتوماسیون صنعتی امروزی، و هم در تحقیقات روباتیکی، اهمیت زیادی دارند. در طراحی این سیستمها باید عوامل گوناگونی را در نظر گرفت. در این فصل دربارهٔ این عوامل بحث می‌کنیم، و طرح اولیهٔ چنین سیستمها را ارائه می‌دهیم. موضوعهایی که به آنها اشاره خواهیم کرد، عبارت‌اند از نمایش فضایی اجسام، نمایش این اجسام به‌صورت گرافیکی، آشکارسازی اتوماتیک برخورد، ترکیب معادله‌های سینماتیکی، طرح‌ریزی مسیر، شبیه‌سازی دینامیکی، شبیه‌سازی حساسه‌ها، برنامه‌ریزی همزمان، ترجمهٔ برنامه به زبانهای نهایی گوناگون به‌وسیلهٔ پس‌پردازنده‌ها، و کالیبراسیون سلول کاری.

در دههٔ اخیر، رشد بازار روباتهای صنعتی، بسیار کمتر از میزان پیش‌بینی شده بوده است. دلیل اصلی آن است که استفاده از روبات هنوز دشوار است. نصب یک روبات برای کاربردی خاص، و آماده‌سازی سیستم برای تولید، به وقت زیاد و تخصص بالا نیازمند است. به دلایل گوناگون، این مسئله در برخی کاربردها جدیتر از کاربردهای دیگر است، و در نتیجه، روباتها در عملیاتی چون جوشکاری نقطه‌ای و رنگپاشی، بسیار زودتر از سایر عملیات به‌کار گرفته شده‌اند. به‌نظر می‌رسد دلیل عدم رشد کافی سیستمهای روباتی در بسیاری از کاربردها، کم بودن تعداد متصدیان آموزش‌دیده باشد. در برخی از شرکتهای تولیدی، مدیریت، استفاده از روبات را تا بیش از حد قابل تحقق به‌وسیلهٔ مهندسان شرکت، خواهان است. همچنین، درصد بزرگی از روباتها برای

---

1. Off-Line Programming Systems

عملیاتی به‌کار گرفته می‌شوند که قابلیت‌های واقعی آنها را نشان نمی‌دهد. با توجه به کلیه این عوامل، می‌بینیم که روبات‌های صنعتی کنونی را نمی‌توان در مدت زمانی معقول نصب و برنامه‌ریزی کرد، مگر آنکه کاربرد آنها ساده‌تر شود.

عوامل بسیاری موجودند که برنامه‌ریزی روبات را دشوار می‌سازند. در درجه اول، باید توجه داشت که به‌طور کلی برنامه‌ریزی کامپیوتری مشکلاتی دارد که در برنامه‌ریزی روبات نیز وارد می‌شوند. اما روبات‌های برنامه‌پذیر و یا هر ماشین برنامه‌پذیر دیگر، دشواری‌های خاص دیگری دارند که تکامل نرم‌افزارهای آماده را مشکل‌تر می‌سازند. چنانکه در فصل پیش دیدیم، بیشترین مشکلات، در اثر برهم کنش روبات با محیط فیزیکی آن [۱] پدید می‌آیند. حتی در ساده‌ترین سیستم‌های برنامه‌ریزی نیز از «مدل جهانی» این محیط فیزیکی، به شکل مکان اجسام و آگاهی از وجود یا عدم وجود اشیای گوناگون ذکر شده در برنامه، استفاده می‌شود. در هنگام نوشتن برنامه روبات (و به‌ویژه در مرحله بعدی که از روبات در تولید استفاده می‌شود)، باید انطباق مدل داخلی بر محیط واقعی روبات را حفظ کرد. در غلط‌گیری برنامه‌های روبات، باید به دفعات محیط روبات را به حالت اولیه در آورد، و قطعات، ابزار، و غیره را به مکان‌های اولیه آنها بازگرداند. این عملیات بازگرداندن، هنگامی که روبات بر روی قطعه (یا قطعاتی) عملیات بازگشت‌ناپذیر (مانند سوراخکاری و شیارزنی) انجام می‌دهد، بسیار دشوار (و گاهی پر هزینه) خواهند بود. بدترین حالت هنگامی رخ می‌دهد که اشکال برنامه به‌صورت عملیات بازگشت‌ناپذیری که موردنظر برنامه‌ریز نبوده‌اند، ظاهر شود، و در نتیجه به قطعات، ابزارها، و حتی خود روبات، صدمه برسد.

اگر چه برای انطباق مدل داخلی با محیط فیزیکی روبات، به دشواری‌هایی برمی‌خوریم، اما تردیدی نیست که این کار مزایای بسیاری دارد. تحقیقات بر روی حساسه‌ها، و به‌ویژه بینایی کامپیوتری، بر پیدا کردن روش‌هایی متمرکز شده است که با به‌کارگیری آنها می‌توان مدل‌های جهانی را امتحان، تصحیح، و یا کشف کرد. روشن است که برای استفاده از هر الگوریتم محاسباتی برای مسئله ایجاد فرمان در روبات، باید مدلی از روبات و محیط آن را در اختیار داشت.

به‌نظر می‌رسد در تکامل سیستم‌های برنامه‌ریزی روبات، افزایش قدرت روش‌های برنامه‌ریزی، با پیچیدگی مدل داخلی به‌کار رفته در برنامه نسبت مستقیم دارد. در سیستم‌های روباتی اولیه که بر اساس «آموزش از طریق نمایش» در فضای مفصلی عمل می‌کردند، از مدل جهانی محدود شده‌ای استفاده می‌شد، و در نتیجه روش‌هایی که برنامه‌ریز برای انجام عملیاتی خاص در اختیار داشت، نیز بسیار محدود بودند. در برخی کنترل‌کننده‌های پیچیده‌تر، مدل‌های سینماتیکی طوری به‌کار گرفته شدند، که سیستم می‌توانست استفاده‌کننده را در حرکت دادن مفصل‌ها و ایجاد حرکت در فضای دکارتی، یاری دهد. به‌تدریج زبان‌های دیگری نیز برای برنامه‌ریزی روبات‌ها ارائه شد که در آنها استفاده‌کننده می‌توانست با به‌کارگیری نوع‌های داده‌ای گوناگون و عملیات مربوط به آنها، عوامل محیطی را مدل‌سازی، و کنش‌های روبات را محاسبه کند. در برخی از این زبان‌ها، دستورهای چون متصل‌سازی نوع‌های داده‌ای نیرو و گشتاور، و دیگر ویژگی‌ها [۲] به‌کار رفته‌اند.

زبان‌های برنامه‌ریزی روبات امروزی را می‌توان «زبان‌های برنامه‌ریزی صریح» نامید، زیرا در آنها

هر عمل انجام شده به وسیلهٔ روبات، باید توسط مهندس به کاربرندهٔ روبات برنامه‌ریزی شود. در طرف دیگر طیف زبانهای برنامه‌ریزی، سیستمهای برنامه‌ریزی عملیاتی (TLP)<sup>۱</sup> قرار دارند، که در آنها می‌توان از فرمانهای سطح بالا مانند «پیچ را داخل سوراخ کن»، و یا حتی «اجاق برشته‌کن (توستر) را بساز» استفاده کرد. در چنین سیستمهایی، از روشهای هوش مصنوعی به منظور ایجاد حرکات و استراتژی طرحها به‌طور اتوماتیک، استفاده می‌شود. اما این زبانهای برنامه‌ریزی عملیاتی، هنوز به‌وجود نیامده‌اند، و پژوهشگران برای ابداع بعضی قسمتهای آن تلاش می‌کنند [۳]. در این سیستمها، برای انجام عملیات طرحریزی گوناگون به‌طور اتوماتیک، باید از مدلی بسیار جامع برای روبات و محیط آن، استفاده کرد.

اگر چه در این فصل، تنها مسئلهٔ خاص برنامه‌ریزی روبات مورد توجه است، اما سیستمهای OLP را می‌توان برای هرگونه دستگاه دیگر برنامه‌پذیر در کارخانه نیز به‌کار برد. موضوعی که در دفاع از این سیستمها مطرح می‌شود، آن است که سیستم OLP را می‌توان بدون متوقف ساختن خط تولید، دوباره برنامه‌ریزی کرد (در صورتی که به برنامه‌ریزی دوباره نیاز باشد)، و در نتیجه کارخانه‌های اتوماسیون‌شده را می‌توان به مدت طولانیتری در حال تولید نگه‌داشت. همچنین، این سیستمها را می‌توان برای ارتباط دادن پایه‌های داده‌ای طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) مورد استفاده در مرحلهٔ طراحی یک محصول با تولید واقعی آن محصول، به‌کار گرفت. در برخی کاربردها، با استفاده مستقیم از داده‌های طراحی CAD، می‌توان زمان برنامه‌ریزی لازم برای ماشینهای تولید را به میزان چشمگیری کاهش داد.

برنامه‌ریزی خارج خط روباتها، مزایای دیگری نیز دارد که به‌تازگی مورد توجه استفاده‌کنندگان از روباتها قرار گرفته است. پیش از این، برخی از مشکلات ناشی از برنامه‌ریزی روبات را بررسی کردیم. بیشتر این مشکلات از آنجا سرچشمه می‌گیرند که یک سلول کاری فیزیکی خارجی، به‌وسیلهٔ برنامهٔ روبات کنترل می‌شود. در نتیجه اعمال استراتژیهای گوناگون به‌دشواری صورت می‌گیرد. برنامه‌ریزی روباتها در حالت شبیه‌سازی، سبب می‌شود که بیشترین حجم برنامه‌ریزی در داخل کامپیوتر انجام گیرد، تا جایی که کاربرد مورد نظر تقریباً کامل شود. بدین ترتیب، بسیاری از دشواریهای مربوط به برنامه‌ریزی روباتها، از میان می‌رود.

سیستمهای برنامه‌ریزی خارج خط را باید به‌صورت روند رشد طبیعی سیستمهای برنامه‌ریزی صریح به سوی سیستمهای برنامه‌ریزی عملیاتی دانست. ساده‌ترین سیستم OLP، صورتی گرافیکی از یک زبان برنامه‌ریزی روبات است، با این تفاوت که می‌توان آن را به یک سیستم برنامه‌ریزی عملیاتی، گسترش داد. این گسترش تدریجی، با فراهم ساختن پاسخهای اتوماتیک شده برای عملیات فرعی گوناگون، و به‌کارگیری آنها توسط برنامه‌ریز، تحقق می‌یابد. تا زمانی که روش ساختن سیستمهای برنامه‌ریزی کشف شود، استفاده‌کننده باید کماکان به ارزیابی عملیات اتوماتیک طراحی شده، و گسترش برنامهٔ کاربردی خود، ادامه دهد. اگر این نظر را بپذیریم، سیستم

OLP به صورت پایه‌ای اصلی برای پژوهش و گسترش سیستم‌های برنامه‌ریزی عملیاتی در نظر گرفته می‌شود. بسیاری از پژوهشگران، در دفاع از تحقیقات خود، اجزای گوناگون سیستم OLP (مدلهای سه بعدی، نمایش گرافیکی، پس‌پردازنده‌های زبانی، و غیره) را ساخته‌اند. بدین ترتیب، سیستم‌های OLP، علاوه بر عملیات صنعتی، در تحقیقات نیز ابزاری مفیدند.

## ۱۳-۲ مطالب اصلی در سیستم‌های OLP

در این بخش، بسیاری از مسائلی که باید در طراحی سیستم‌های OLP مورد توجه قرار گیرند، بررسی می‌شود. مجموعه موضوعهای مورد بحث، چشم‌انداز تعریف یک سیستم OLP را روشن می‌کند.

### فصل مشترک استفاده‌کننده

از آنجا که انگیزه اصلی در گسترش سیستم OLP، ایجاد محیطی برای ساده‌تر کردن برنامه‌ریزی روباتهاست، فصل مشترک استفاده‌کننده اهمیت بسیاری دارد. اما انگیزه مهم دیگر در گسترش این سیستم، از میان برداشتن وابستگی به تجهیزات فیزیکی در حین برنامه‌ریزی است. در بررسی اولیه، به نظر می‌رسد که این دو انگیزه با یکدیگر در تناقض اند. برنامه‌ریزی روبات هنگامی که می‌توانید آن را ببینید هم دشوار است. پس چگونه بدون حضور فیزیکی آن، برنامه‌ریزی آسانتر می‌شود؟ این پرسش ما را به عمق مسئله طراحی سیستم OLP هدایت می‌کند.

تولید کنندگان روبات، به تجربه دریافته‌اند که درصد بزرگی از کارکنان تولید نمی‌توانند از زبانهای برنامه‌ریزی روبات (RPL) که به همراه روباتها ارائه می‌شوند، به طرز مناسب بهره‌برداری کنند. از این رو بسیاری از روباتهای صنعتی فصل مشترک دو سطحی دارند [۴]: یکی برای افراد برنامه‌ریز، و دیگری برای افراد عادی. افراد عادی، با استفاده از یک جعبه آموزش، با روبات ارتباط برقرار کرده، برنامه‌های مورد نظر را به آن تفهیم می‌کنند. افراد برنامه‌ریز نیز به منظور تعلیم نقاط کاری و غلط‌گیری برنامه، زبانهای RPL را به کار می‌گیرند. به طور کلی، در این دو روش، از سادگی کاربرد در مقابل انعطاف‌پذیری (و برعکس) صرف نظر می‌شود.

از آنجا که می‌توان سیستم OLP را حالت گسترش یافته‌ای از زبانهای RPL در نظر گرفت، طبیعی است که در آن یک زبان RPL، به عنوان یکی از مجموعه‌های فرعی فصل مشترک بین روبات و استفاده‌کننده، به کار گرفته شود. این زبان RPL، باید ویژگیهایی را که در سیستم‌های برنامه‌ریزی روبات کنونی اهمیت دارند، دارا باشد. مثلاً، زبانهای برهم‌کنشی، از زبانهای دارای کمپایلر، که استفاده‌کننده را به ازای هر تغییر در برنامه، به تکرار چرخه «ویرایش برنامه، کمپایل برنامه، اجرای برنامه» وادار می‌کنند، بسیار مناسبتر خواهند بود.

اگر چه در فصل مشترک استفاده‌کننده، قسمت زبان بسیار شبیه به زبانهای RPL «سستی» است، اما در سیستم OLP باید از فصل مشترک سطح پایین (که کاربرد آن آسانتر است) استفاده کرد. بخش مهمی از این فصل مشترک را نمایش گرافیکی کامپیوتری روبات تحت برنامه‌ریزی،



و محیط آن تشکیل می‌دهد. استفاده‌کننده با کاربرد وسایلی چون قلم نوری یا موش (ماوس)، می‌تواند نقاط یا اجسام گوناگون را بر روی صفحه گرافیک تعیین کند. در طراحی فصل مشترک استفاده‌کننده، چگونگی برقراری ارتباط بین استفاده‌کننده و صفحه گرافیک به منظور مشخص کردن یک برنامه، دقیقاً نشان داده می‌شود. از قلم نوری یا موش، می‌توان برای انتخاب و فعال ساختن اعمال گوناگون هر «منو»<sup>۱</sup> استفاده کرد.

یکی از دستورهای مهم، آموزش نقطه کاری و یا «چهارچوبی» با شش درجه آزادی برای ایجاد ارتباط با صفحه گرافیک است. با در دست داشتن مدل‌های سه بعدی از بستها و قطعات کاری در سیستم OLP، این کار معمولاً به سادگی انجام می‌شود. فصل مشترک با قائل شدن یک امتداد عمود بر سطح محلی برای جهتگیری چهارچوب، به استفاده‌کننده امکان می‌دهد نقاط را بر روی سطوح مشخص کند. سپس، اعمالی چون ایجاد انحراف در وضعیت، جهتگیری دوباره، و غیره قابل انجام است. برحسب ویژگیهای کاربرد، این اعمال به آسانی با بهره‌گیری از پنجره گرافیک در محیط شبیه‌سازی شده، مشخص می‌شوند.

فصل مشترک استفاده‌کننده، هنگامی طرح مناسبی خواهد داشت که افراد عادی (غیر برنامه‌ریز) بتوانند به کمک آن اعمال بسیاری را، از آغاز تا پایان، انجام دهند. در چنین حالتی، چهارچوبها و توالی حرکت‌های «آموزش داده شده» به وسیله افراد عادی را می‌توان توسط سیستم OLP به دستورهای نوشته شده RPL ترجمه کرد. برنامه‌ریزهای ماهرتر، می‌توانند این برنامه‌های ساده را به صورت RPL نگه دارند و قابلیت‌های آن را افزایش دهند. دسترسی به RPL، امکان نوشتن کدهای اختیاری در کاربردهای پیچیده‌تر، را برای این برنامه‌ریزها فراهم می‌آورد.

### مدلسازی سه بعدی

یکی از ویژگیهای مهم سیستمهای OLP، توصیف گرافیکی روبات شبیه‌سازی شده و سلول کاری آن است. برای انجام این کار، باید روبات و کلیه بستهای آن، قطعات، و ابزار در سلول کاری، به صورت اجسام سه‌بعدی مدل شوند. به منظور افزایش سرعت ایجاد برنامه، از هرگونه مدل قطعات یا ابزاری که در سیستم CAD مربوط به طرح اصلی موجودند، استفاده می‌شود. با پیشرفت و گسترش روزافزون سیستمهای CAD در صنعت، می‌توان به این‌گونه داده‌های هندسی به آسانی دسترسی پیدا کرد. با توجه به تمایل شدید به کاربرد CAD از مرحله طراحی تا مرحله تولید، عاقلانه خواهد بود که سیستم OLP به یک سیستم فرعی مدلسازی CAD مجهز باشد، و یا خود به صورت بخشی از یک سیستم طراحی CAD درآید. اگر سیستم OLP مستقل باشد، باید فصل مشترک مناسب برای انتقال مدل‌ها به سیستمهای خارجی CAD، یا دریافت مدل‌ها از آنها، را داشته باشد. اما حتی در یک سیستم مستقل OLP نیز باید سیستم CAD ساده‌ای برای رسم سریع مدل‌های مربوط به قسمتهای غیرحساس در سلول کاری، و یا برای افزودن داده‌های مشخص روباتی به مدل‌های CAD دریافت شده از سیستمهای دیگر، در نظر گرفته شود.

به‌طور کلی، در سیستم‌های OLP، به نمایش چندگانه شکل‌های فضایی نیاز است. در بسیاری از عملیات، توصیف تحلیلی و دقیق سطح یا حجم وجود دارد، در حالی‌که برای نمایش گرافیکی این توصیف، غالباً به‌روش توصیفی دیگری نیاز است. تکنولوژی کنونی برای سیستم‌هایی که در آنها دستور نمایش اصلی، یک چندضلعی مسطح است، بسیار مناسب است. بدین ترتیب، با اینکه ممکن است شکل جسمی را بتوان با سطحی هموار نشان داد، در عمل (به‌ویژه برای جانیخشی به تصاویر) از نمایش به‌وسیله سطح کوچک استفاده می‌شود. در عملیات گرافیکی مثل اشاره به نقطه‌ای بر روی یک سطح، باید در داخل سیستم، نقطه‌ای بر روی سطح حقیقی مشخص شود، حتی اگر بر روی صفحه نمایش یک مدل سطوح کوچک دیده شود.

یکی از کاربردهای مهم هندسه سه‌بعدی مدل‌های جسم، در آشکارسازی اتوماتیک برخورد است. به عبارت دیگر، هنگامی‌که بین اجسام واقع در محیط شبیه‌سازی شده برخوردی روی دهد، سیستم OLP به‌طور خودکار به استفاده‌کننده اخطار داده، محل دقیق وقوع برخورد را نشان می‌دهد. از آنجا که عملیاتی چون مونتاژ قطعات، با «برخورد»های بسیاری همراه است، باید به‌گونه‌ای به سیستم فهماند که برخورد برخی اجسام معین با یکدیگر، اشکالی ندارد. همچنین، در حالتی که اجسام با تولرانسی معین از کنار یکدیگر عبور می‌کنند و برخورد آنها نامطلوب است، باید هشدار لازم داده شود. اگرچه آشکارسازی برخورد، در حالت کلی برای اجسام سه‌بعدی دشوار است، اما در مدل‌های سطوح کوچک، به خوبی انجام می‌شود.

### تقلید سینماتیکی

یکی از عوامل اصلی در حفظ اعتبار مدل شبیه‌سازی جهانی، تقلید صحیح از جنبه‌های هندسی هر روبات شبیه‌سازی شده است. در سینماتیک وارون، سیستم OLP می‌تواند به دو روش با کنترل‌کننده روبات ارتباط برقرار سازد. در روش اول، سیستم OLP می‌تواند جانشین معادله‌های سینماتیکی وارون کنترل‌کننده روبات شود، و همواره مکان روبات در فضای مفصلی مکانیزم را به کنترل‌کننده انتقال دهد. در روش دوم نیز مکان روبات در مختصات دکارتی، به کنترل‌کننده منتقل می‌شود، و سپس کنترل‌کننده از معادله‌های سینماتیکی وارون، که به‌وسیله سازنده برای تعیین پیکربندیهای روبات داده شده است، استفاده می‌کند. تقریباً در کلیه موارد، روش دوم انتخاب می‌شود، زیرا سازندگان، استفاده از روش کالیبراسیون شیوه نشان بازو را در روبات‌ها آغاز کرده‌اند. در این روش کالیبراسیون، برای هر روبات معادله‌های سینماتیکی وارون ویژه آن به‌طرزی مناسب بیان می‌شود. بدین ترتیب، تبادل اطلاعات با کنترل‌کننده‌های روبات، در سطح دکارتی سودمند خواهد بود.

ملاحظات فوق، به‌طور کلی بدین معنا هستند که تابعهای سینماتیکی مستقیم و وارون به‌کار رفته توسط شبیه‌ساز، باید نشانگر تابعهای اسمی به‌کار رفته در کنترل‌کننده روبات توسط سازندگان آن باشد. جزئیات متعددی از تابعهای سینماتیکی وارون، که به‌وسیله سازنده مشخص شده‌اند، باید توسط نرم‌افزار شبیه‌سازی، تقلید شوند. هر الگوریتم سینماتیکی وارون، باید به‌گونه‌ای باشد که بتوان

با انتخابهای اختیاری، حالت‌های تکین را حل کرد. مثلاً، اگر مفصل ۵ از یوما ۵۶۰ در وضعیت صفر قرار گیرد، محورهای ۴ و ۶ در یک امتداد واقع می‌شوند و حالتی تکین را پدید می‌آورند. در این صورت، تابع سینماتیکی وارون در کنترل‌کننده روبات، قادر است تنها مجموع زوایای مفصلی ۴ و ۶ را محاسبه، و سپس با استفاده از قاعده‌ای اختیاری، هر یک از این زوایا را انتخاب کند. سیستم OLP باید هر گونه الگوریتم به‌کار رفته را تقلید کند. مثالی دیگر، مربوط به حالتی است که در آن از میان چند جواب ممکن، نزدیکترین جواب انتخاب می‌شود. در این صورت، شبیه‌ساز باید از همان الگوریتم به‌کار رفته در کنترل‌کننده استفاده کند، تا از ایجاد خطاهای خطرناک در شبیه‌سازی بازوی واقعی، جلوگیری شود. یکی از ویژگیهای مفید، که گاهی در کنترل‌کننده‌های روبات در نظر گرفته می‌شود، قابلیت تعیین یک هدف در دستگاه مختصات دکارتی، و سپس مشخص کردن جوابی (از میان جوابهای ممکن) است که بازو باید به‌کار گیرد. با وجود این ویژگی، نیازی به تقلید الگوریتم انتخاب جواب به‌وسیله شبیه‌ساز نخواهد بود، زیرا سیستم OLP می‌تواند انتخاب خود را بر کنترل‌کننده تحمیل کند.

### تقلید طرح‌ریزی مسیر

سیستم OLP، علاوه بر تقلید سینماتیکی استقرار استاتیکی بازوی مکانیکی ماهر، باید مسیر پیموده شده به‌وسیله بازو در فضا را نیز به دقت تقلید کند. در اینجا نیز دشواری اصلی آن است که سیستم OLP باید الگوریتمهای به‌کار رفته در کنترل‌کننده روبات را شبیه‌سازی کند، و این الگوریتمهای اجرایی و روشهای طرح‌ریزی مسیر مورد استفاده سازندگان مختلف، بسیار متفاوت‌اند. شبیه‌سازی شکل فضایی مسیر پیموده شده، از نظر آشکارسازی برخورد میان روبات و محیط آن، اهمیت دارد. از شبیه‌سازی جنبه‌های زمانی مسیر، در پیش‌بینی چرخه‌های زمانی کار بردها، استفاده می‌شود. هنگامی که روبات در محیطی متحرک (مثلاً در مجاورت روباتی دیگر) کار می‌کند، شبیه‌سازی دقیق عوامل زمانی حرکت، برای پیش‌بینی دقیق برخوردها لازم است، و در برخی موارد به پیش‌بینی مشکلات ارتباطی یا همزمان‌سازی (مانند قفل‌شدن مکانیزم بر اثر اعمال نیروهای مساوی و در خلاف جهت یکدیگر) نیاز است.

### تقلید دینامیکی

اگر سیستم OLP تقلید از الگوریتم طرح‌ریزی مسیر کنترل‌کننده را به‌خوبی انجام دهد، و اگر روبات واقعی، مسیرهای مورد نظر را با خطای ناچیز دنبال کند، می‌توان از صفات دینامیکی در حرکت شبیه‌سازی شده بازو صرف‌نظر کرد. اما در سرعت‌های بالا، یا شرایط سنگین بارگذاری، در تعقیب مسیر، خطاهای قابل توجهی پدید می‌آید. شبیه‌سازی این خطاها مستلزم مدلسازی دینامیکی بازوی مکانیکی ماهر، اجسامی که به وسیله آن حرکت داده می‌شوند، و الگوریتم کنترل به‌کار رفته در کنترل‌کننده بازوست. در حال حاضر، مشکلاتی در گرفتن اطلاعات کافی از فروشندگان روبات، به منظور ارزش عملی دادن به شبیه‌سازی دینامیکی، وجود دارد، اما در برخی حالات، این شبیه‌سازی نتایج مثبتی به بار می‌آورد.

### شبیه‌سازی چند فرایندی

در برخی کاربردهای صنعتی، دو یا چند روبات با هم در محیطی یکسان همکاری می‌کنند. حتی سلولهای کاری که تنها یک روبات دارند، اغلب شامل یک تسه نقله، خط انتقال، سیستم بینایی، یا وسیله‌ای دیگر برای برقراری ارتباط با روبات‌اند. به همین دلیل، سیستم OLP باید قادر به شبیه‌سازی چندین دستگاه باشد و بتواند فعالیتهای آنها را به موازات یکدیگر پیش برد. برای ایجاد این قابلیت، لازم است زبان روبات مورد استفاده در سیستم، زبانی چند فرایندی باشد. بدین ترتیب، می‌توان برای هر یک از روباتهای سلول کاری، برنامه کنترل مستقلی نوشت، و سپس با اجرای همزمان این برنامه‌ها، عملکرد کلی سلول کاری را شبیه‌سازی کرد. افزودن دستورهای "signal" و "wait" به زبان فوق، روباتها را قادر می‌سازد درست مانند کاربرد واقعی، برهم‌کنش کنند.

### شبیه‌سازی حساسه‌ها

مطالعات انجام گرفته نشان می‌دهند که بیشتر دستورهای به‌کاررفته در برنامه‌های روبات، دستورهای حرکتی نیستند، بلکه به معرفی متغیرها، خطاگیری، ورودی/خروجی (I/O)، و ... اختصاص دارند [۵]. به همین دلیل، قابلیت سیستم OLP در ایجاد محیطی مناسب برای شبیه‌سازی کاربردهای کاملی چون برهم‌کنش با حساسه‌ها، دستورات I/O گوناگون، و برقراری ارتباط با سایر دستگاهها، اهمیت پیدا می‌کند. در هر سیستم OLP که قادر به شبیه‌سازی حساسه‌ها و شبیه‌سازی چندفرایندی باشد، نه‌تنها امکان انجام حرکات روبات، بلکه قسمت ارتباطی و همزمان‌سازی برنامه روبات نیز واری می‌شود.

### ترجمه زبان به سیستم هدف

مشکلی که در حال حاضر استفاده کنندگان از روباتهای صنعتی (و سایر دستگاههای اتوماسیون برنامه‌پذیر) با آن روبرویند، آن است که هر تولیدکننده روبات، زبانی ویژه برای محصول خود ابداع می‌کند. برای آنکه بتوان از سیستم OLP در کلیه روباتها بهره گرفت، باید مسئله ترجمه زبانهای مورد استفاده در روباتهای گوناگون را حل کرد. یک راه برای حل این دشواری، انتخاب زبانی واحد برای سیستم OLP، و سپس تبدیل این زبان به فرمت زبان مورد استفاده در روبات هدف (نهایی) است. قابلیت مطلوب دیگر، انتقال برنامه‌های موجود در ماشین هدف به سیستم OLP است.

دو مزیت نهفته در سیستم OLP، مستقیماً با موضوع ترجمه زبان بستگی دارند. بیشتر هواداران سیستمهای OLP متوجه شده‌اند که با به‌کارگرفتن یک فصل مشترک جهانی برای برنامه‌ریزی روباتهای گوناگون، می‌توان دشواریهای ناشی از یادگیری چندین زبان اتوماسیون را برطرف کرد. دومین مزیت سیستمهای OLP، به ملاحظات اقتصادی آینده، یعنی هنگامی که در هر کارخانه از صدها و یا شاید هزاران روبات استفاده شود، مربوط است. هزینه بالای ایجاد محیط برنامه‌ریزی پر قدرت (مانند یک زبان برنامه‌ریزی و یک فصل مشترک گرافیکی)، احتمالاً مانع از کاربرد اختصاصی این سیستم برای هر روبات خواهد شد. از نظر اقتصادی، بهتر است که برای هر

روبات یک کنترل‌کننده «کم هوش»، اما ارزان در نظر گرفت که از یک سیستم OLP «باهوش» و پر قدرت مرکزی، تغذیه می‌شود. بدین ترتیب، ترجمه برنامه از زبانی جهانی و پر قدرت به زبانی ساده که در پردازنده‌ای ارزان قابل اجراست، در سیستمهای OLP اهمیت بسیاری دارد.

### کالیبراسیون سلول کاری

در مدل سازی کامپیوتری هر وضعیت واقعی، عدم دقت مدل، مسئله‌ای غیر قابل اجتناب است. برنامه‌های نوشته شده در سیستم OLP، هنگامی قابل استفاده خواهند بود که روشهایی برای کالیبراسیون سلول کاری، به صورت یکپارچه در سیستم وجود داشته باشد. اهمیت این مسئله، به نوع کاربرد بستگی زیادی دارد، و به همین دلیل، برنامه ریزی خارج خط در برخی موارد بسیار واقع بینانه تر از موارد دیگر است. اگر در کاربردی لازم باشد بیشتر نقاط کاری روبات، به وسیله روبات واقعی و به منظور کاهش خطا، دوباره آموزش داده شوند، سیستمهای OLP کارایی خود را از دست می‌دهند.

در بسیاری از کاربردها، عملیات نسبت به جسمی صلب انجام می‌شود. مثلاً ایجاد چندصد سوراخ را در یک قطعه در نظر بگیرید. وضعیت واقعی قطعه نسبت به روبات را می‌توان یا سه اندازه گیری، به وسیله خود روبات آموزش داد. یا داشتن این داده‌ها، محل جدید کلیه سوراخها را، در صورتی که در مشخصات یک سیستم CAD نوشته شده باشند، می‌توان محاسبه کرد. در این صورت، به جای چندصد نقطه، تنها کافی است این سه نقطه را با روبات آموزش دهیم. بسیاری از عملیات شامل این نوع «عملیات فراوان نسبت به یک جسم صلب» هستند. نمونه‌هایی از این عملیات عبارت‌اند از فرور کردن اجزای صفحه کلید کامپیوترهای شخصی در محل خود، شیار زنی، جوشکاری نقطه‌ای، جوشکاری قوس الکتریکی، جابه جایی به وسیله سکوی حمل، رنگ کاری، پلیسه گیری، و غیره.

### ۱۳-۳ ایستگاه Cim

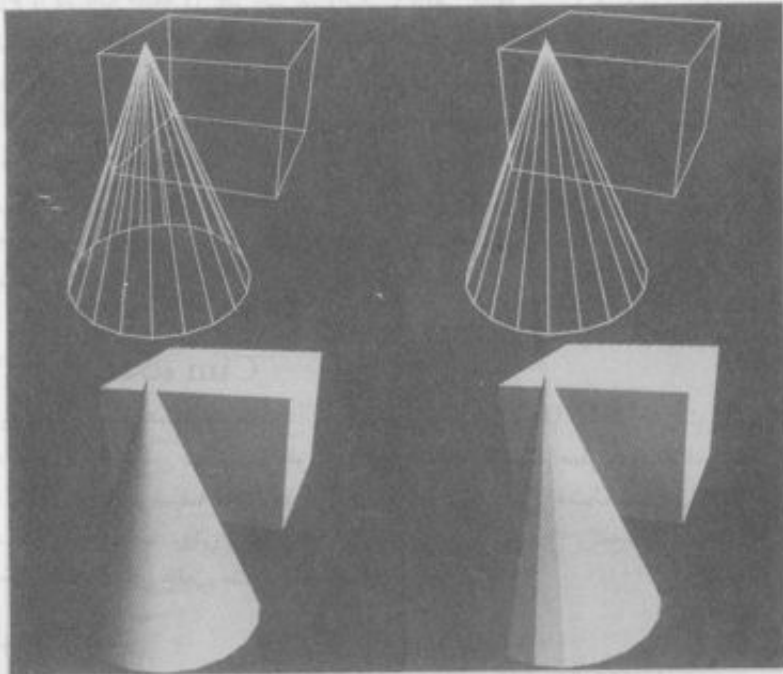
در این بخش، طرح هسته ایستگاه Cim، یک سیستم کنترل OLP را که در شرکت سیلما<sup>۱</sup> ابداع شده است [۶]، بررسی می‌کنیم. منظور از «طرح هسته»، قسمت اصلی سیستم است، که در آن یک مدل جهانی، توصیف شکل فضایی، مکان، سرعت، و سایر مشخصات اجسام را بر عهده دارد. در ادامه مطلب، روش برنامه ریزی مدل جهانی و روش تبدیل برنامه‌های حاصل برای به کار انداختن دستگاههای واقعی متناظر، مطالعه خواهد شد.

### مدلها و گرافیک

ایستگاه Cim قادر است مدل‌های CAD را به طور مستقل بسازد، و یا آنها را از طریق فصل مشترک IGES<sup>۲</sup> (مشخصات تبادل گرافیکی اولیه)، از سیستمهای CAD خاصی دریافت کند. در هر

مورد، مدلها از طریق نمایش مرزهای سطح یا حجم، نشان داده می‌شوند. این مرزها یا سطوح، در داخل کنترل‌کننده به مجموعه‌هایی از چندضلعیهای مسطح یا سطوح کوچک، تبدیل می‌شوند. ساختار داده‌ای مدل، لبه‌های مشترک بین سطوح کوچک، و نیز نقاط مشترک بین این لبه‌ها را، تنها یکبار در خود ذخیره می‌کند. در این قسمت، امکان در نظر گرفتن مجموعه‌ای از سطوح کوچک به صورت یک سطح پیوسته نیز وجود دارد. مثلاً، مجموعه‌ای از سطوح کوچک، می‌توانند سطح منحنی یک استوانه را تشکیل دهند. علاوه بر شیوه نمایش به وسیله سطوح کوچک، مدل ممکن است شامل نمایش تحلیلی نیز باشد. همچنین، برای سازگار کردن سیستم کنترل با سیستمهای CAD کنونی، می‌توان مدلهای شبکه‌ای را نیز در آن در نظر گرفت. این مدلها، مجموعه‌ای از پاره‌خطهایی فاقد اطلاعات مربوط به سطح را تشکیل می‌دهند.

برای نمایش مدلهای مشتمل بر سطوح کوچک، چند روش وجود دارد. شکل ۱۳-۱ مثالهایی را از برخی روشهای موجود ارائه می‌دهد. ساده‌ترین روش نمایش، روش نمایش شبکه‌ای است که در آن لبه‌های جسم با استفاده از تبدیل منطری (پرسپکتیو)، رسم می‌شود. با استفاده از روش



شکل ۱۳-۱ مثالهایی از روشهای نمایش مدلهای مشتمل بر سطوح کوچک. به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت. از شکل سمت چپ بالا: مدل شبکه‌ای، مدل حذف خطوط نامرئی، مدل سایه‌زده شده تخت، و مدل سایه‌زده شده پیوسته.

حذف خطوط نامرئی، می‌توان خطوط پنهان شکل‌های کوژ را پاک کرد، و تصویری به دست آورد که برای بیننده بهتر قابل فهم باشد. روش حذف خطوط نامرئی، از روش جامع حذف خطوط پنهان بسیار ساده‌تر است، و محاسباتی آسان دارد. یک راه برای ایجاد مدل بدون خطوط پنهان، پر کردن سطوح کوچک مدل، و به دست آوردن تصویری سایه‌زده شده است. با رسم سطوح کوچک دورتر از بیننده، سطوح نزدیکتر در جلوی آنها واقع می‌شوند و مدلی را پدید می‌آورند که در آن، خطوط پنهان حذف شده‌اند. برای نمایش کامل تصاویر سایه‌زده شده، باید در نرم‌افزار یا سخت‌افزار، از روش حافظه Z برای عمق‌یابی تصویرها به روش دانه (پیکسل) به دانه، استفاده کرد. روش سایه‌زنی پیوسته را نیز می‌توان برای هموار ساختن لبه‌های بین دو سطح کوچک، و ایجاد تصویری بدون لبه نیز، به کار برد. آشکارسازی برخورد، برای برخورد بین هر دو مدل سطحی دلخواه، انجام می‌پذیرد، و در آن از نمایش سطوح کوچک برای محاسبات استفاده می‌شود. به منظور افزایش سرعت آشکارسازی برخورد، قبلاً جعبه‌های کراندار کلیه اجسام واقع در مدل جهانی، محاسبه می‌شوند. در سکوهایی که سخت‌افزار گرافیکی ندارند، می‌توان از یک الگوریتم آشکارسازی برخورد مانند الگوریتم به کار رفته در [۷] استفاده کرد. سخت‌افزار گرافیکی را (در صورت وجود در سیستم) می‌توان برای محاسبات لازم در آشکارسازی برخورد نیز به کار برد. در ایستگاه Cim، از الگوریتمی در ارتباط با روش به کار رفته در [۸]، اما کلیتر از آن، استفاده می‌شود. در این الگوریتم، سخت‌افزاری که برای اتصال چندضلعیها و پدید آوردن حجمی سه بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌تواند به سرعت تعیین کند که آیا جسمی با یک حجم مشخص تداخل می‌کند یا نه. در این سخت افزار، حجم سه بعدی لبه‌های مستقیم دارد، و از لحاظ توپولوژیکی با یک مکعب معادل است. الگوریتم آشکارسازی برخورد با جسم "A" مرحله‌ی تقریباً به صورت زیر دارد:

۱. واریسی کن که آیا هیچ یک از چندضلعیها با جعبه کراندار "A" تداخل می‌کند یا نه.
  ۲. برای هر چندضلعی پیدا شده در مرحله (۱)، جعبه کراندار را بساز و تداخل آن را با هر چندضلعی از جسم "A" واریسی کن.
  ۳. اگر در مرحله (۲) تداخلی تشخیص دادی، با استفاده از برنامه نرم‌افزاری، محل برخورد چندضلعیهای مسطح را تعیین کن.
- ایستگاه Cim، علاوه بر مراحل فوق، می‌تواند کلیه اجسام را به اندازه تolerانس‌ی که برای آنها مورد نظر است، «بزرگ کند»، و حالت‌هایی را که اجسام با این تolerانسها از کنار یکدیگر می‌گذرند (به اصطلاح عامیانه، «از بیخ گوش یکدیگر رد می‌شوند»)، آشکارسازی کند.

### اجسام و مدل جهانی

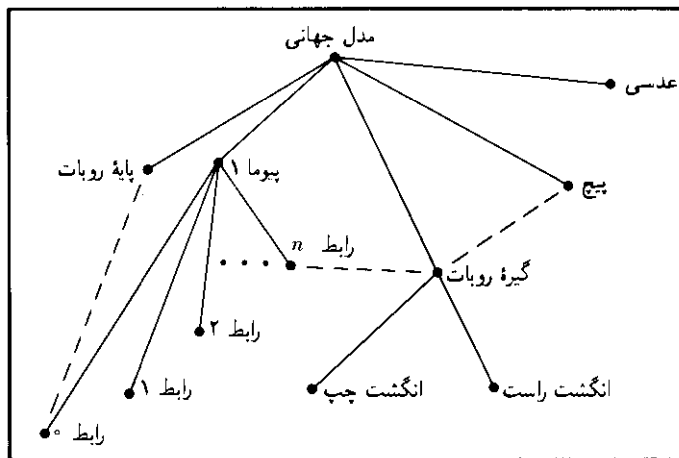
هر چیزی که شبیه‌سازی می‌شود، مانند قطعه کار، بست، و یا رابط روبات، را به وسیله یک جسم نشان می‌دهند. ساختار داده‌ای هر جسم، شامل مدلی از ماهیت جسم، چندین ویژگی دیگر آن،

و جای کافی برای افزودن داده‌های بعدی است. مثالی ساده از ویژگی دیگر ذخیره شده با یک جسم، برجسی است که به وسیله آن، به جسم ارجاع داده می‌شود. اجسام را می‌توان با داشتن مدل آنها ساخت، و برای کاربردهای بعدی، در کتابخانه‌های داده‌ها ذخیره کرد.

طبیعی است که اجسام به صورت یک ساختار تشکیلاتی درختی گروه‌بندی شوند. مثلاً روباتی با  $n$  رابط، جسمی با ساختار درختی است که مدل صفر آن ریشه درخت، و  $1 + n$  جسم فرعی («رابط ۰» تا «رابط  $n$ ») نیز شاخه‌های آن است. اجسام فرعی را توسط مسیر نامگذاری می‌کنند (مثلاً «puma1/link3»). کل جهان شبیه‌سازی شده، جسمی با ساختار درختی بدون شاخه با یک مدل صفر است، که ریشه آن «world» نامیده می‌شود. هرگاه جسمی حرکت داده شود، کلیه شاخه‌های (اجسام فرعی) آن نیز حرکت می‌کنند، اما حرکت یک جسم فرعی، بر جسم مادر اثری نمی‌گذارد.

در شکل ۱۳-۲ مثالی از یک مدل جهانی ساده شامل یک روبات، یک مجری نهایی، یک قطعه کار (پیچ)، و یک پایه برای روبات، نشان داده شده است. در این شکل، خط چینها اتصال دهنده‌های به کار رفته برای ایجاد یک پیوند صلب موقت بین دو جسم را مشخص می‌کنند. این اتصال دهنده‌ها، مجری نهایی را به آخرین رابط روبات پیوند می‌دهند. همچنین، به بازوی شبیه‌سازی شده امکان می‌دهند یک پیچ شبیه‌سازی شده را بردارند. در وضعیت نشان داده شده در شکل ۱۳-۲، می‌توان بازو را به وسیله دستوره‌های حرکت «puma1/linkn»، «gripper» (گیره روبات) و یا «bolt» (پیچ)، به حرکت در آورد.

هرگاه جسمی به حرکت در آید، اجسام دیگر موجود در مدل جهانی نیز ممکن است به دلیل وضعیتی که در ساختار درختی جهانی دارند، و یا به دلیل وجود اتصال دهنده‌ها، به همراه آن حرکت



شکل ۱۳-۲ مثالی از درخت مدل جهانی.



کنند. مجموعه اجسامی که باید حرکت داده شوند، به صورت همبستگی انتقالی دو رابطه در مبنای دو محاسبه می شوند: رابطه «ریشه شاخه» آنها از مدل درختی جهانی، و رابطه اتصال دهنده گی آنها به یکدیگر.

در مدل جهانی، همواره جسمی به نام «عدسی» وجود دارد که مکان آن، نقطه ای را که از آن به جهان می نگریم، مشخص می کند. فاصله کانونی این عدسی، به منزله یکی از ویژگیهای جسم، ذخیره می شود. عدسی را می توان برای مشاهدات گوناگون، به هر نقطه دلخواه حرکت داد. مثلاً برای جانبخشی به تصاویر از دید ناظری که به همراه گیره روبات حرکت می کند، عدسی به گیره متصل می شود.

### انتساب سینماتیک به اجسام دارای ساختار

به منظور شبیه سازی حرکت رابطهای متصل به یکدیگر مانند بازوهای مکانیکی ماهر، می توان به هر جسم دارای ساختار در مدل جهانی، جنبه های سینماتیکی را اضافه کرد. در ایستگاه Cim، این جنبه های سینماتیکی، برای آخرین رابط روبات، که همواره «رابط n» خوانده می شود، به کار می روند. جسمی با جنبه های سینماتیکی را جسم جادویی می نامند. هرگاه به جسمی که به یک جسم جادویی متصل شده است، فرمان حرکت داده شود، معادله های سینماتیکی جسم جادویی، بر این حرکت حاکم خواهند بود. بدین ترتیب، صدور فرمان حرکت «bolt» (پیچ) در شکل ۱۳-۲، باعث می شود معادله های سینماتیکی وارون «puma1» اجرا شوند، و کلیه رابطهای متحرک و اجسام متصل شده به آنها نیز حرکت کنند.

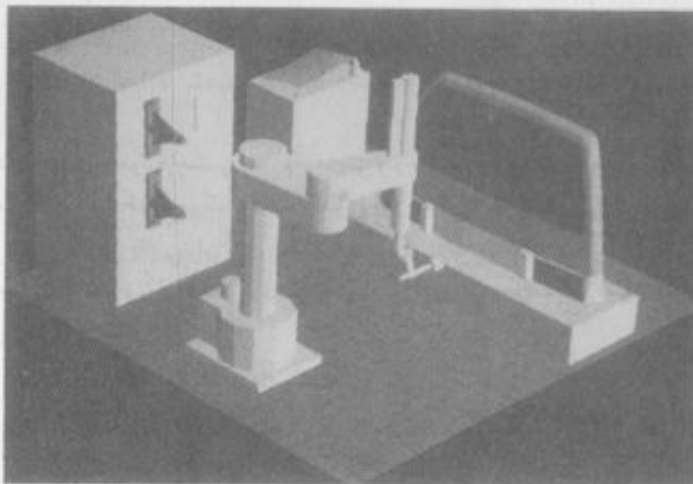
ایستگاه Cim، به طور کلی از روشهای سینماتیکی بسته استفاده می کند، اما در صورت نیاز، ممکن است روشهای عددی تکراری را نیز به کار برد. از روشهای سینماتیکی مشخص شده به وسیله فروشنده روبات نیز می توان مستقیماً استفاده کرد. شکل ۱۳-۳، یک بازوی مکانیکی ماهر شبیه سازی شده در یک سلول کاری را نشان می دهد. فرمانهای حرکت ابزار یا آخرین رابط، به کاربرد معادله های سینماتیکی وارون در محاسبه حرکت کلیه رابطها می انجامد.

اجسام دارای ساختار، به هیچ وجه به زنجیرهای سری باز منحصر نمی شوند، و می توانند هرگونه توپولوژی را در کلیترین حالت، شامل شوند.

### انتساب مسیرها به اجسام

به منظور افزودن بُعد زمان به مدل جهانی، به هر جسم در هنگام حرکت یک مسیر نسبت داده می شود. مسیر، در حالت کلی تابعی از زمان است، که برحسب چهارچوب به کار رفته، چگونگی تغییر مکان و جهتگیری هر جسم را به صورت تابعی از زمان، به دست می دهد. در هر لحظه، ممکن است چندین مسیر برای چندین جسم در مدل جهانی منظور شوند، و این پایه شبیه سازی حرکتیهای همزمان را تشکیل می دهد.

ویژگیهای هندسی هر مسیر را می توان، با استفاده از ایستگاه Cim، به چند روش مشخص کرد. در RPL های معمول، اغلب برای تعیین مسیر نقاط بینابینی را به کار می برند. هر یک از



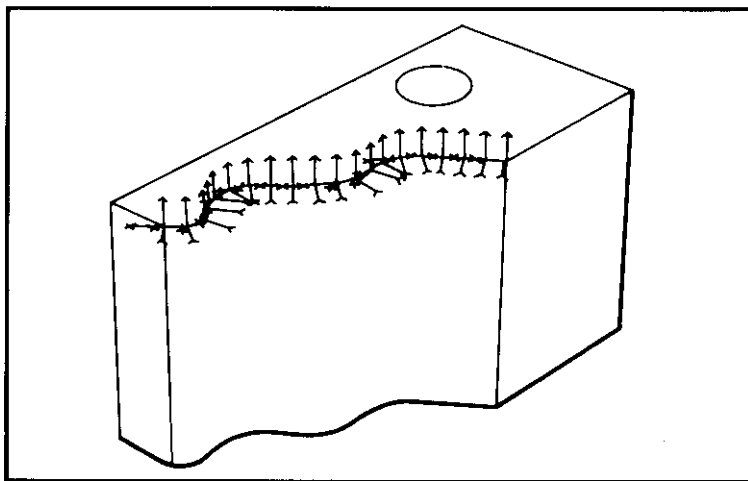
شکل ۱۳-۳ فرمانهای حرکت مجری نهایی، یا هر عضو متصل شده به آن، باعث می‌شوند کلیه رابطها با استفاده از تابع سینماتیکی وارون آن روبات، حرکت کنند.

این نقاط بینابینی را می‌توان به‌طور گرافیکی یا عددی مشخص ساخت. مسیر را می‌توان به‌روش محاسباتی نیز مشخص کرد. بدین منظور، استفاده‌کننده برنامه‌ای به زبان SIL را برای محاسبه فهرستی از چهارچوبهای تعیین‌شده به‌وسیله الگوریتمی خاص، خواهد نوشت. مطلب پراهمیت‌تر آن است که می‌توان مسیرها را تقریباً به‌طور مستقیم با استفاده از داده‌های CAD به‌دست آورد. در شکل ۱۳-۴، مسیری را (که با چهارچوبهای متساوی‌الفاصله از یکدیگر مشخص شده است) نشان می‌دهد که خیلی سریع برای یک مدل CAD تولید شده است. خود این مدل نیز به‌وسیله فرمت IGES از سیستم CAD دیگری وارد شده است.

### دینامیک و ارزیابی حالت جهانی

مسیرهای نسبت داده شده به اجسام، نقش مسیرهای مطلوب را ایفا می‌کنند، که چنانچه ایستگاه Cim شبیه‌سازی دینامیکی نکند، با مسیرهای واقعی معادل خواهند بود. اگر شبیه‌سازی دینامیکی انجام گیرد، آن‌گاه مکان واقعی هر جسم در زمانهای بعدی، به‌وسیله مسیر مطلوب، حالت فعلی، و قانون کنترل مربوط به آن جسم، تعیین خواهد شد. در حالت دینامیکی، ایستگاه Cim، از مدل‌های جسم صلب برای بازوهای مکانیکی ماهر و اجسام دیگر استفاده می‌کند، و برای محاسبه حرکت اجسام شبیه‌سازی شده، قوانین کنترلی آنها و الگوریتم انتگرالگیری مرتبه چهارم رونگه-کوتا<sup>۱</sup> را به‌کار می‌گیرد. در هر حالت، اگر نمایش گرافیکی حالت جهانی مورد نظر باشد، سیستم مقادیر جدید مکان را برای کلیه اجسام محاسبه، و سپس از تابع نمایش، صفحه گرافیک درخواست می‌کند.

1. Runge-Kutta



شکل ۱۳-۴ مسیر به دست آمده از داده‌های سیستم CAD.

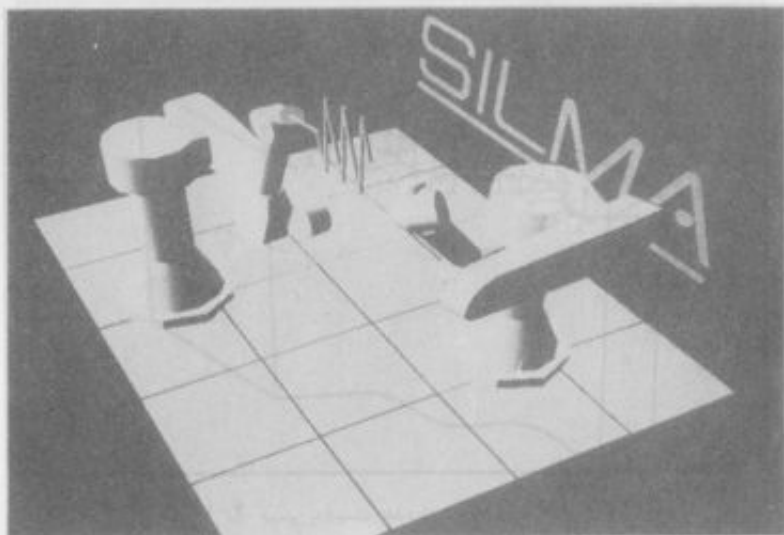
وضعیت صفحه نمایش، به محل عدسی و فاصله کانونی آن بستگی دارد، که هر یک از این دو ممکن است خود با زمان تغییر کنند.

در حالت شبیه‌سازی دینامیکی، می‌توان چند روبات که با یکدیگر همکاری می‌کنند، را نیز شبیه‌سازی کرد. در شکل ۱۳-۵، حرکت‌های دو روبات بر اثر نیروهای اعمال شده به وسیله فیزی که در بین آنها قرار دارد، به یکدیگر وابسته شده‌اند. در هنگام شبیه‌سازی هر سیستم دینامیکی مدار بسته کامل، ایستگاه Cim گردآوری داده‌ها، و ایجاد منحنی‌های تابع‌های زمانی مربوط به متغیرهای گوناگون را بر عهده می‌گیرد.

### زبان SIL

استفاده‌کننده از روبات، می‌تواند برنامه‌های کاربردی را از طریق برهم‌کنش با فصل مشترک «موش-منو»، و یا مستقیماً به وسیله زبان برنامه‌ریزی پر قدرتی به نام SIL [۹]، پی‌ریزی کند. در حالت (مود) ایجاد برنامه، عملیات توصیف شده با استفاده از فصل مشترک موش-منو، به دستورهای به زبان SIL تبدیل می‌شوند. بدین ترتیب، در هر حال (چه شخص استفاده‌کننده برنامه‌ریز باشد و چه نباشد) ایستگاه Cim، برنامه‌های SIL را ایجاد می‌کند. ایستگاه Cim از تسهیلات موضعی سکوی میزبان، برای ویرایش متن، سیستم تشکیل فایل، خروجی، و غیره استفاده می‌کند.

زبان SIL دارای سینتاکس زبان پاسکال، و شامل تعداد بسیاری نوع، زیر برنامه، و تابع از پیش تعریف شده است. نمونه‌هایی از نوع‌های از پیش تعریف شده عبارت‌اند از: zyz (مجموعه زوایای اولیه)، ypr (دورانهای یاء، پیچ، و رول حول محورهای ثابت)، point (یک بردار)، frame (یک تبدیل همگن)، و چندین نمونه دیگر. نمونه‌ای از زیر برنامه از پیش تعریف شده، زیر برنامه moveto



شکل ۱۳-۵ دو روبات در حال کشیدن فتری که مجریهای نهایی آنها را به یکدیگر متصل می‌کند.

است که برای توصیف بیشتر مشخصات حرکتی در SIL، به‌کار می‌رود. زیر برنامه‌های SIL پلی‌مرفیک‌اند، زیرا در صورتی که نوعها و تعداد شناسه‌های دو زیر برنامه متفاوت باشند، می‌توان به هر دو نام یکسان داد. این ویژگی، در طراحی زبان برنامه‌ریزی روبات با حداقل تعداد لغات کلیدی، اهمیت زیادی دارد، زیرا در این صورت استفاده‌کننده نیز تعداد لغات کمتری را به‌خاطر می‌سپارد. مثلاً، دستور (foo, "tool") moveto، ابزار (tool) را به foo حرکت می‌دهد، که در آن foo ممکن است یک بردار مفصلی، یک چهارچوب، یک بردار مکان (فقط شامل انتقال)، و یا یک نوع دورانی (فقط شامل دوران) باشد. در نتیجه، SIL به دستورهای متعددی که در زبانهای دیگر کنترل حرکت به‌کار می‌روند (مانند move, jmove, jog, rotate، و یا translate) نیاز ندارد.

ویژگی دیگر زبان SIL، تبدیل اتوماتیک نوعهای یکسان است. این ویژگی، سیستم را قادر به تشخیص نوعهای معادل می‌کند، و امکان تعریف توابع نگاشتی بین این نوعها را فراهم می‌سازد. مثلاً، نوعهای نشان‌دهنده دوران در فضای سه‌بعدی را می‌توان در SIL به‌طور اتوماتیک به یکدیگر تبدیل کرد. بنابراین، اگر زیر برنامه‌ای شناسه‌ای از نوع زوایای اولیه xyz را بپذیرد، بلافاصله می‌توان آن را با شناسه‌ای از نوع ypr، و یا هر نوع دورانی دیگر فراخواند. ویژگی فوق، به ایجاد سینتاکس «تسبیحی» می‌انجامد و از تعدد نامها جلوگیری می‌کند.

زبان SIL از زبان پاسکال استاندارد گسترده‌تر است، زیرا در آن می‌توان برنامه را خط به خط اجرا کرد. در هر زمان با تایپ کردن فقط یک دستور، می‌توان از سیستم جواب دریافت کرد.

محیط برنامه‌ریزی SIL به محیط LISP شباهت دارد، زیرا در آن متغیرها، توابع، و زیربرنامه‌های مختصات جهانی بلافاصله در دسترس قرار می‌گیرند. هنگامی که استفاده‌کننده تابعی جدید را تعریف می‌کند، این تابع به صورت قسمتی از حالت جهانی در می‌آید. برخلاف LISP، زبان SIL را می‌توان تایپ کرد، و سینتاکس آن مانند پاسکال، نسبتاً ساده است. بیشتر دستورهای ایستگاه Cim به زبان SIL نوشته می‌شوند. در نتیجه هنگامی که استفاده‌کننده به سیستم تابعهای جدیدی اضافه می‌کند، سیستم را مانند طراحان آن گسترش می‌دهد. برنامه‌های کاملاً غلط‌گیری شده SIL را می‌توان برای بالا رفتن بازده، کمپایل کرد.

زبان SIL، زبانی هم‌رس یا چند فرایندی است، و این ویژگی، آن را از زبان پاسکال بسیار توان‌تر می‌سازد. استفاده‌کننده می‌تواند یک فرایند را با سینتاکسی کاملاً یکسان با سینتاکس اعلام یک روش اجرا، تعریف کند (مثالهای بسیار ساده‌ای در شکل‌های ۱۳-۶ و ۱۳-۷ داده شده است). پس از آن، امکان اجرای چندین فرایند به‌طور هم‌رس، وجود خواهد داشت. فرایندها قادرند به وسیله متغیرهای جهانی، و یا با مبادلهٔ پیام، با یکدیگر ارتباط برقرار کنند. دستورهای مبادلهٔ پیام را **signal** و **wait** می‌نامند. نوع داده‌هایی که سیگنال (**signal**) داده می‌شوند (و یا باید منتظر آنها (**wait**) شد)، را می‌توان از میان نوعهای گوناگون SIL انتخاب کرد. بدین ترتیب، پیامها ممکن است از نوعهای بول<sup>۱</sup> تا نوعهای پیچیده را دربرگیرند. در بسیاری از شبیه‌سازهای مربوط به اتوماسیون، از نوعهای بول به منزلهٔ سیگنال استفاده می‌شود، زیرا این نوعها برای پرت‌های دوتایی I/O که در بسیاری از کنترل‌کننده‌ها وجود دارند، مناسب‌اند.

به‌طور خلاصه، SIL را می‌توان به صورت زبان پاسکال چند فرایندی که انواع بسیاری از نوعها و تابعهای از پیش تعریف‌شده به آن اضافه شده‌اند، در نظر گرفت.

```
process pumal(is_ok: boolean);
var x, bin1, bin2, drop: frame;
begin
  bin1:= [40,40,0,0,90,-90] as crt_xyz;
  bin2:= [20,80,0,0,90,-90] as crt_xyz;
  drop:= [0,0,15,0,180,0] as crt_ypr;
  signal(sensor, ready, true);
  wait(is_ok);
  if is_ok then
    x:=bin1
  else
    x:=bin2;
    moveto('bolt', drop rel x);
  end;
```

شکل ۱۳-۶ یک برنامه نوشته‌شده به زبان SIL (غیرقابل ترجمه به زبان هدف).

```

process puma2(is_ok: boolean);
var x, bin1, bin2, drop: frame;
begin
  bin1:= [40,40,0,0,90,-90] as crt.zyz;
  bin2:= [20,80,0,0,90,-90] as crt.zyz;
  drop:= [0,0,15,0,180,0] as crt.ypr;
  signal(sensor,ready,true);
  wait(is_ok);
  if is_ok then
    x:=drop rel bin1
  else
    x:=drop rel bin2;
  moveto('bolt', x);
end;

```

شکل ۱۳-۷ برنامه نوشته شده به زبان SIL (قابل ترجمه به زبان هدف).

### شبیه‌سازی حساسه‌ها

ایستگاه Cim قادر است چندین نوع حساسه را شبیه‌سازی کند. استفاده‌کننده، در صورت تمایل می‌تواند با استفاده از ویژگی چند فرایندی و دیگر ویژگی‌ها، برنامه‌هایی برای شبیه‌سازی دقیق حساسه‌ها بنویسد. در این بخش، درباره برخی از قابلیت‌های ساده برای شبیه‌سازی حساسه‌ها، بحث می‌شود. شبیه‌سازی حس نیرو برای حرکت‌های محتاطانه، با استفاده از محیط چند فرایندی و قابلیت آشکارسازی برخورد، امکانپذیر است. در هر حرکت محتاطانه، برخوردهای بین مجری نهایی (و هر جسم متصل شده به آن) با بقیه اجسام موجود در محیط، با آهنگ نمونه‌برداری نیرو بررسی می‌شود، و در صورت بروز برخورد، حرکت روبات متوقف می‌گردد. کنترل‌کننده نیرو بر اساس فرایندی جداگانه عمل می‌کند و با آهنگ نمونه‌برداری «بیدار شده»، احتمال برخورد بعدی را بررسی می‌کند. به همین ترتیب، کلیدهای محدودکننده و حساسه‌های نوری قطع‌کننده نیز با استفاده از دستگاه آشکارسازی برخورد، شبیه‌سازی می‌شوند.

سیستم‌های بینایی را می‌توان با کاربرد فرایندی برای تقلید سیستم بینایی، شبیه‌سازی کرد. این فرایند می‌تواند توسط سیگنالی، مکان و جهتگیری هر یک از اجسام موجود در سلول کاری را تعیین کند. شبیه‌سازی شامل تأخیر زمانی معین برای انجام محاسبات، و سپس بازگرداندن چهارچوب جسم واقع در سلول کاری به فرایند فراخوانده شده است. اگر جسم در دید دوربین شبیه‌سازی شده قرار نگیرد، می‌توان عدم موفقیت دریافتن جسم را، با سیگنال دادن مشخص کرد.

### ترجمه به زبانهای سیستم هدف

محیط SIL، زبانی عام را با ویژگی‌های پیشرفته، و نیز قابلیت دستیابی به مدل جهانی، فراهم می‌آورد. این محیط پر قدرت، و کاربرد آن آسان است، و به منظور ساده‌تر کردن عمل دشوار نوشتن برنامه برای روبات، طراحی شده است. برای اینکه بتوان از برنامه نوشته شده به این زبان، استفاده

کزد، باید آن را به زبان روبات شبیه سازی شده (و یا دیگر زبانهای اتوماسیون برنامه پذیر) برگرداند. زبانهای به کار رفته در کنترل کننده های روبات کنونی، از نظر نوعها، عملیات، و ساختارهای برنامه ای، با یکدیگر تفاوت بسیار دارند. ایستگاه Cim، سیستمی فرعی دارد که زبان SIL را به زبانهای دیگر ترجمه می کند. قسمت بزرگتر این سیستم محاسباتی برای کلیه زبانها مشترک، و قسمت دیگر آن وابسته به نوع زبان هدف است.

ترجمه زبان در سیستم OLP، از کمپایل کردن از یک زبان جهانی به زبان دیگر، دشوارتر است. این دشواری به این دلیل پدید می آید که زبان هدف قابلیت های محدودی دارد، و در زبان SIL، به مدلی جهانی اشاره می شود که در حالت کلی در سیستم هدف موجود نیست. یک برنامه SIL را در نظر بگیرید که برای مدل جهانی از اتصال دهنده ها استفاده کرده است. و همچنین، به نقاط هدف روبات، که مکان آنها نسبت به اجسام مختلف موجود در مدل جهانی داده شده است، اشاره می کند. اگر سیستم هدف فاقد امکانات مدل جهانی و اتصال دهنده ها باشد، چنین برنامه ای را نخواهد پذیرفت. به همین ترتیب، اگر در برنامه SIL از نوعها یا عملیات معینی، که در سکوی هدف وجود ندارند، استفاده شود، ترجمه امکان نخواهد داشت. در نتیجه، قسمت بزرگی از الگوریتم ترجمه در ایستگاه Cim، باید به تحلیل برنامه SIL از نظر ترجمه پذیر بودن به زبان هدف بپردازد. این تحلیل، تنها به وجود یا عدم وجود دستورها و قابلیت های SIL در زبان هدف نمی پردازد و مسائل دیگری را نیز در بر می گیرد.

دو مثال ساده از برنامه SIL در شکل های ۱۳-۶ و ۱۳-۷ را در نظر بگیرید. این برنامه ها برای انتقال به کنترل کننده ای که نوع چهارچوب را می شناسد، اما عملیات rel (ضرب چهارچوب) را نمی تواند انجام دهد، در نظر گرفته شده اند. اگر چه در هر دو برنامه از عملگر rel در چهارچوبها استفاده می شود، اما برنامه شکل ۱۳-۷ انتقال (ترجمه) پذیر است، در صورتی که برنامه شکل ۱۳-۶ را نمی توان ترجمه کرد. در برنامه شکل ۱۳-۷، عملگر rel تنها در عبارتهایی ظاهر می شود که عاملهای آنها در جریان برنامه تغییری نمی کنند و به همین دلیل، می توان آنها را از قبل محاسبه کرد. تحلیل برنامه، تقریباً به صورت زیر انجام می گیرد. ابتدا برنامه SIL به شکل نموداری در می آید که در آن هر گره نمایش دهنده کدی است که با یک برچسب آغاز می شود، دستورهای آن فقط به صورت ترتیبی (پی در پی)<sup>۱</sup> هستند، و به یک دستور "go to"، یا دستور شرطی "go to" ختم می شود. قوسهای نمودار، پرشهای برنامه را نشان می دهند که ممکن است در حین اجرای برنامه اجرا شوند و یا نشوند (اجرای آنها بستگی به مقدار ورودیهای خارجی و غیره دارد). سپس کل برنامه SIL از نظر چگونگی کاربرد متغیرها، بررسی می شود و متغیرها در یک بردار حالت ذخیره می شوند. پس از مقایسه نوعها و عملیات SIL با نوعها و عملیات به کار رفته در سیستم هدف، با استفاده از جدول تناظر این دو زبان، عنصرهایی از این بردار که در زبان هدف به کار نرفته اند، مشخص می شوند. در هر گره از نمودار برنامه، سؤال می شود که آیا راهی برای وارد کردن آن گره، به طوری که یک متغیر تعریف نشده در زبان هدف بتواند مقادیر مختلف داشته باشد، وجود دارد یا

نه. اگر جواب مثبت باشد، و اگر گره مورد نظر، از متغیر به‌کار نرفته در زبان هدف استفاده کند، برنامه ترجمه‌پذیر نخواهد بود. اگر تحلیل نشان دهد که عملیات تعریف‌نشده در زبان هدف، تنها بر روی عاملهایی انجام گرفته‌اند که در جریان برنامه تغییر نمی‌کنند، این عبارات را می‌توان قبلاً محاسبه کرد. در این صورت، تنها نتایج آنها در برنامه هدف ظاهر می‌شود.

اگر برنامه ترجمه‌پذیر باشد، مترجم برنامه‌ای کامل، شامل ساختارها و دستورهای I/O مناسب، به زبان هدف خواهد نوشت. انتقال (ترجمه) برنامه SIL به بسیاری از زبانهای هدف موجود، امکانپذیر است.

استفاده‌کنندگانی که با محدودیتهای زبانهای هدف آشنایی دارند، به‌طور کلی می‌توانند از نوشتن برنامه‌های SIL ترجمه‌ناپذیر، خودداری کنند. شکل ۱۳-۸، برنامه‌ای به زبان KAREL [۱۰] را، که ترجمه برنامه SIL نوشته‌شده در شکل ۱۳-۷ است، نشان می‌دهد. توجه کنید که چون KAREL از عملگر rel استفاده می‌کند، هر دو برنامه SIL، که در بالا نشان داده شدند، را می‌توان به زبان این کنترل‌کننده ترجمه کرد. مترجم جزئیات تغییر در نمایش جهتگیری (از zyz به

```
PROGRAM PUMA2
CONST
IS_OK = 2
SENSORREADY = 3
VAR
X,DROP,BIN1,BIN2: POSITION
BEGIN
$MOTYPE = JOINT
$TERMTYPE = COARSE
$UFRAME = POS(0.0,0.0,-950.0,0.0,0.0,0.0,"")
$UTOOL = POS(-0.0,-0.0,334.962,-0.0,0.0,0.0,"")
$SPEED = 346.41
G336::
BIN1 = POS(400.0,400.0,0.0,-89.9994,0.000508,-89.9999,"")
BIN2 = POS(200.0,800.0,0.0,-89.9994,0.000508,-89.9999,"")
DROP = POS(0.0,0.0,150.0,0.0,180.0,0.0,"")
DOUT[SENSORREADY] = TRUE
IF DIN[IS_OK] THEN
GOTO G329
ENDIF
GOTO G332
G329::
X = (BIN1:DROP)
GOTO G326
G332::
X = (BIN2:DROP)
G326::
MOVE TO X NOWAIT
END PUMA2
```

شکل ۱۳-۸ ترجمه برنامه شکل ۱۳-۶ به زبان KAREL.



نوع مورد استفاده در KAREL که با ypr معادل است)، و تغییر در یکاهای به کار رفته (از cm به mm) را در نظر گرفته است.

### تسهیلات کالیبراسیون

ایستگاه Cim می تواند به طور موقت به کنترل کننده روبات در حالت روی خط متصل شود. در این حالت، روبات شبیه سازی شده و روبات واقعی، هنگامی که استفاده کننده با ایستگاه Cim ارتباط برقرار می کند، با یکدیگر حرکت می کنند. حالت روی خط، امکان استفاده از روبات برای آموزش دوباره محل اجسام، و انتقال داده ها به ایستگاه Cim برای تصحیح مدل جهانی، را فراهم می آورد. اگر روبات دور از ایستگاه Cim باشد، می توان آموزش دوباره را به طور مستقل انجام داد و داده های مربوط به آن را به صورت یک فایل در آورد.

در روش اصلی کالیبراسیون، از خاصیت تناظر نقطه ای بین ویژگیهای مدلسازی شده و مکانهای به دست آمده برای آنها از طریق آموزش با روبات، استفاده می شود. الگوریتم به کار رفته برای این کار،  $n$  نقطه مشخصه ( $n$  حداقل برابر با سه است) را برای محاسبه محل جدید هر جسم صلب به کار می برد. سیستم خطای مکانی RMS را برای نقاط آموزش داده شده را محاسبه می کند تا بدین ترتیب، استفاده کننده بتواند دقت روبات و احتمال موفقیت خود را ارزیابی کند.

از روش کالیبراسیون دیگری به نام تاب نیز می توان برای تغییر شکل دادن مسیر پیوسته حاصل از یک مدل CAD، از طریق آموزش دوباره  $n$  نقطه میانی، استفاده کرد. این روش، از منحنی خطای درجه سوم استفاده می کند و منحنی فضایی اولیه (حاصل از CAD) را به نرمی تاب می دهد. به طوری که این منحنی نقاط آموزش داده شده را درونیایی کرده، در عین حال حتی الامکان شکل اولیه خود را حفظ می کند.

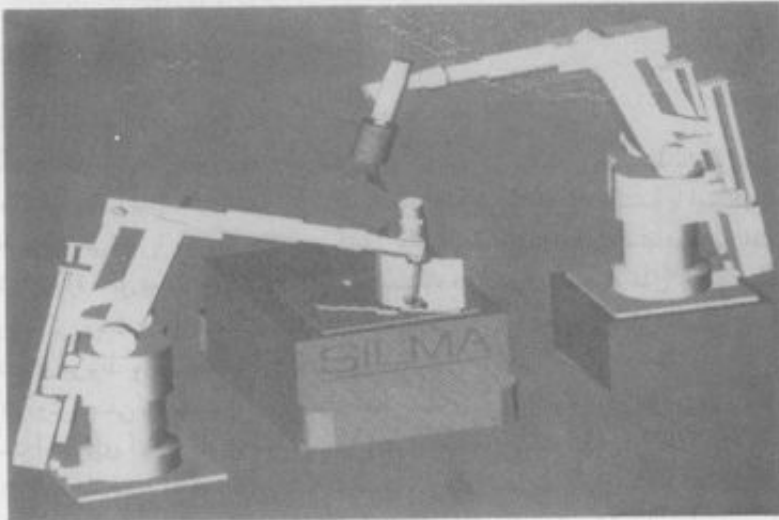
با استفاده از کلیه قابلیت های گفته شده در این بخش، می توان سلولهای کاری چند روباتی و پیچیده، مانند سلول کاری نشان داده شده در شکل ۱۳-۹ را به طور خارج خط شبیه سازی و برنامه ریزی کرد.

## ۱۳-۴ اتوماسیون عملیات فرعی در سیستمهای OLP

در این بخش، به طور خلاصه برخی ویژگیهای پیشرفته را که می توان در سیستمهای OLP «پایه» به کار گرفت، بررسی می کنیم. بیشتر این ویژگیها می توانند طراحی اتوماسیون بخشی از یک کاربرد صنعتی را انجام دهند.

### تعیین جای روبات به طور اتوماتیک

یکی از مهمترین کارهای قابل انجام به وسیله سیستم OLP، تعیین محل قرارگیری قسمتهای مختلف در یک سلول کاری است، به گونه ای که بازوی مکانیکی ماهر بتواند به کلیه نقاط کاری مورد نظر، دسترسی داشته باشد. تعیین محل درست قرارگیری روبات یا قطعات کار به روش آزمون و



شکل ۱۳-۹ شییه‌سازی یک سلول کاری کامل.

خطا، در سلول شییه‌سازی شده بسیار سریعتر از سلول فیزیکی، انجام می‌شود. ویژگی پیشرفته جستجوی اتوماتیک محل قرارگیری روبات یا قطعه کار، کار استفاده کننده را سبکتر می‌کند. تعیین محل قرارگیری به‌طور اتوماتیک را می‌توان با جستجوی مستقیم، و یا استفاده از روشهای تجربی انجام داد. از آنجا که بیشتر روباتها مستقیماً بر روی کف (یا سقف) نصب می‌شوند، و اولین مفصل دورانی آنها برکف عمود است، در حالت کلی کافی است جستجو را از طریق تقسیم فضای سه‌بعدی محل قرارگیری پایه روبات به قطعات کوچک، انجام دهیم. این جستجو ممکن است به بهینه‌سازی برخی معیارها منتهی شود، و یا پس از تعیین اولین محل قرارگیری عملی روبات یا قطعه، متوقف شود. منظور از عملی بودن<sup>۱</sup> آن است که روبات بتواند بدون برخورد با اجسام دیگر، به کلیه نقاط کاری دسترسی پیدا کند. به‌عنوان معیار مناسبی برای بهینه‌سازی، می‌توان معیار مهارت را، که در فصل ۸ بررسی شد، در نظر گرفت. در مرجع [۱۱]، کاربردی که در آن معیار مهارت به‌کار گرفته می‌شود، مورد بحث قرار گرفته است. نتیجه چنین قرارگیری اتوماتیک، سلولی کاری است که در آن روبات می‌تواند با پیکربندیهای دارای شرایط مطلوب، به کلیه نقاط کاری خود دسترسی یابد.

### جلوگیری از برخورد و بهینه‌سازی مسیر

طبیعی است اگر در سیستم OLP نتایج تحقیقات انجام شده بر روی مسیرهای عاری از برخورد [۱۳، ۱۲]، و طراحی مسیرهای بهینه‌شده از نظر زمانی [۱۴-۱۶] نیز در نظر گرفته شوند. مثلاً،

1. feasibility

فرض کنید می‌خواهیم از روباتی با شش درجه آزادی، برای عملیات جوشکاری که تنها به پنج درجه آزادی نیاز دارد، استفاده کنیم. با استفاده از طرح‌ریزی اتوماتیک درجه آزادی زاید، می‌توانیم از وقوع برخورد و حالت‌های تکین در روبات، جلوگیری کنیم [۱۷].

### طرح‌ریزی اتوماتیک حرکت هماهنگ شده

در بسیاری از عملیات جوشکاری قوس الکتریکی، برای انجام جزئیات فرایند، باید رابطه‌ای خاص بین قطعه کار و بردارگرانی، در سراسر عملیات حفظ شود. این امر، به طراحی یک سیستم تعیین جهت‌گیری با دو یا سه درجه آزادی می‌انجامد که قطعات نصب شده بر روی آن، به‌طور هماهنگ و همزمان با روبات، حرکت داده می‌شوند. در چنین سیستمی ممکن است نیاز باشد که درجه آزادی یا بیشتر هماهنگ شوند. امروزه، این سیستم‌ها، با استفاده از جعبه‌های آموزش برنامه‌ریزی می‌شوند. در این حالت، وجود سیستمی که بتواند به‌طور اتوماتیک این حرکات هماهنگ را ایجاد کند، بسیار با ارزش خواهد بود [۱۷، ۱۸].

### شبیه‌سازی کنترل نیرو

در جهان شبیه‌سازی شده، که کلیه اجسام به‌وسیله سطوح نمایش داده می‌شوند، امکان شبیه‌سازی استراتژی‌های کنترل نیرو نیز وجود دارد. این کار دشوار است، و برای انجام آن باید برخی ویژگی‌های سطوح را مدلسازی کرد، و از شبیه‌ساز دینامیکی برای در نظر گرفتن قیدهای گوناگون حاصل از تماس، استفاده نمود. در چنین محیطی، دستیابی به عملیات مونتاژ همراه با کنترل نیرو، امکانپذیر است [۱۹].

### زمانبندی اتوماتیک

در برنامه‌ریزی روبات‌ها، علاوه بر مشکلات هندسی، اغلب از نظر زمانبندی و برقراری ارتباط نیز دشواری‌هایی وجود دارد. این امر، به‌ویژه هنگامی اهمیت دارد که شبیه‌سازی برای چند سلول کاری انجام گیرد. اگر چه برخی از سیستم‌های شبیه‌سازی با زمان ناپیوسته، می‌توانند روبات‌ها را به‌طور مطلق شبیه‌سازی کنند [۲۰]، اما بیشتر آنها فاقد الگوریتم‌های طرح‌ریزی هستند. طرح‌ریزی جدول‌های زمانبندی برای فرایندهای برهم‌کنش‌کننده، بسیار پیچیده است و هم اکنون تحقیق بر روی آن جریان دارد [۲۱، ۲۲]. سیستم OLP زمینه‌ای ایدئال برای این تحقیقات است و می‌توان آن را، به‌وسیله الگوریتم‌های مناسب، بلافاصله گسترش داد.

### ارزیابی اتوماتیک خطاها و تolerانس‌ها

سیستم OLP را می‌توان به قابلیت‌هایی (که در پژوهش‌های اخیر مورد بحث قرار گرفته‌اند) مجهز کرد که با استفاده از آنها مدلسازی منابع خطاهای مکانی، و اثر داده‌های دریافتی از حساسه‌های ناکامل، امکانپذیر شود [۲۳، ۲۴]. در مدل جهانی می‌توان حدود خطا و اطلاعات تolerانس‌گذاری گوناگون را در نظر گرفت، و بدین ترتیب سیستم را در ارزیابی احتمال موفقیت عملیات گوناگون

تعیین مکان و موتوراز توانا ساخت. در این راه، ممکن است به استفاده از حساسه‌هایی برای برطرف ساختن مشکلات بالقوه نیاز باشد.

### ۱۳-۵ خلاصه

سیستمهای برنامه‌ریزی خارج خط، برای کاربردهای صنعتی امروز مفیدند، و می‌توان از آنها به منزله پایه‌ای برای ادامه و گسترش تحقیقات رباتیکی، استفاده کرد. مهمترین انگیزه برای گسترش سیستمهای OLP، پرکردن خلأ موجود میان سیستمهای برنامه‌ریزی صریح امروز، و سیستمهای برنامه‌ریزی کاری فرداست.

### مراجع

- [1] R. Goldman, *Design of an Interactive Manipulator Programming Environment*, UMI Research Press, Ann Arbor, Mich., 1985.
- [2] S. Mujtaba and R. Goldman, "AL User's Manual," 3rd edition, Stanford Department of Computer Science, Report No. STAN-CS-81-889, December 1981.
- [3] T. Lozano-Perez, "Spatial Planning: A Configuration Space Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-11, 1983.
- [4] B. Shimano, C. Geschke, and C. Spalding, "VAL-II: A Robot Programming Language and Control System," SME Robots VIII Conference, Detroit, June 1984.
- [5] R. Taylor, P. Summers, and J. Meyer, "AML: A Manufacturing Language," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 3, Fall 1982.
- [6] SILMA Inc., "The CimStation User's Manual," Version 4.0, Available from SILMA Inc., 1601 Saratoga-Sunnyvale Rd., Cupertino, Calif., 95014, 1989.
- [7] J. Bobrow, "The Efficient Computation of the Minimum Distance Between Convex Polyhedra," UC Irvine, to appear.

- [8] R. Smith, "Fast Robot Collision Detection Using Graphics Hardware," Symposium on Robot Control, Barcelona, November 1985.
- [9] SILMA Inc., "Programming in SIL," Available from SILMA Inc., 1601 Saratoga-Sunnyvale Rd., Cupertino, Calif., 95014, 1988.
- [10] GMF Inc., "KAREL Language Reference," Version 1.20p, Troy, Mich., 1986.
- [11] B. Nelson, K. Pedersen, and M. Donath, "Locating Assembly Tasks in a Manipulator's Workspace," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N. C., April 1987.
- [12] T. Lozano-Perez, "A Simple Motion Planning Algorithm for General Robot Manipulators," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 3, June 1987.
- [13] R. Brooks, "Solving the Find-Path Problem by Good Representation of Free Space," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13:190-197, 1983.
- [14] J. Bobrow, S. Dubowsky, and J. Gibson, "On the Optimal Control of Robotic Manipulators with Actuator Constraints," *Proceedings of the American Control Conference*, June 1983.
- [15] K. Shin and N. McKay, "Minimum-Time Control of Robotic Manipulators with Geometric Path Constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1985.
- [16] R. Johanni and F. Pfeiffer, "A Concept for Manipulator Trajectory Planning," *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, 1986.
- [17] J.J. Craig, "Coordinated Motion of Industrial Robots and 2-DOF Orienting Tables," Proceedings of the 17th International Symposium on Industrial Robots, Chicago, April 1987.
- [18] S. Ahmad and S. Luo, "Coordinated Motion Control of Multiple Robotic Devices for Welding and Redundancy Coordination through Constrained Optimization in Cartesian Space," *Pro-*

*ceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, 1988.

- [19] M. Peshkin and A. Sanderson, "Planning Robotic Manipulation Strategies for Sliding Objects," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [20] E. Russel, "Building Simulation Models with Simcript II.5," C.A.C.I., Los Angeles, 1983.
- [21] A. Kusiak and A. Villa, "Architectures of Expert Systems for Scheduling Flexible Manufacturing Systems," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [22] R. Akella and B. Krogh, "Hierarchical Control Structures for Multicell Flexible Assembly System Coordination," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [23] R. Smith, M. Self, and P. Cheeseman, "Estimating Uncertain Spatial Relationships in Robotics," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.
- [24] H. Durrant-Whyte, "Uncertain Geometry in Robotics," IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, N.C., April 1987.

## تمرینها

- ۱-۱۳ [۱۰] در یک یا دو جمله، آشکارسازی برخورد، جلوگیری از برخورد، و طرحریزی مسیر عاری از برخورد را تعریف کنید.
- ۲-۱۳ [۱۰] در یک یا دو جمله، مدل جهانی، تقلید از طرحریزی مسیر، و تقلید دینامیکی را تعریف کنید.
- ۳-۱۳ [۱۰] در یک یا دو جمله، تعیین محل روبات به‌طور اتوماتیک، مسیرهای بهینه زمانی، و تحلیل اشاعه خطا را تعریف کنید.
- ۴-۱۳ [۱۰] در یک یا دو جمله، گرافیک شبکه‌ای، نمایش سطح سایه‌زده شده، و حذف خطوط پنهان را تعریف کنید.
- ۵-۱۳ [۱۰] در یک یا دو جمله، RPL، TLP، و OLP را تعریف کنید.

- ۶-۱۳ [۱۰] در یک یا دو جمله، کالیبراسیون، حرکت هماهنگ، و زمانبندی اتوماتیک را تعریف کنید.
- ۷-۱۳ [۲۰] با رسم یک منحنی نشان دهید که چگونه قابلیت گرافیکی کامپیوترها در ده سال اخیر افزایش یافته است (بد نیست این قابلیت را بر حسب تعداد بردارهای رسم شده در ثانیه به ازای هر ۱۰۰۰۰ دلار سخت افزار، نشان دهید).
- ۸-۱۳ [۲۰] فهرستی از عملیاتی که با «عملیات فراوان نسبت به یک جسم صلب» مشخص می شوند، و در نتیجه برای برنامه ریزی خارج خط مناسب اند، تهیه کنید.
- ۹-۱۳ [۲۰] مزایا و معایب استفاده از یک سیستم برنامه ریزی را که در داخل خود یک مدل جهانی با جزئیات کامل دارد، نام ببرید.
- ۱۰-۱۳ [۲۰] در الگوریتم آشکارسازی برخورد که در این فصل مورد بحث قرار گرفت، کدام وضعیت (با توجه به قرارگیری نسبی اجسام) بدترین شرایط را، از لحاظ زمان اجرای برنامه، پدید می آورد؟

### تمرین برنامه نویسی (قسمت ۱۳)

۱. شکل مسطح یک میله با دو کلاهک نیم دایره در دو انتهای آن را در نظر بگیرید. ما این شکل را «کپسول» می نامیم. برنامه ای بنویسید که با داشتن محل دو کلاهک، بتواند مشخص کند آیا آنها باهم تماس دارند یا نه. توجه کنید که کلیه نقاط هر کپسول، از قطعه خطی که می توان آن را «ستون مهره های» کپسول نامید، به یک فاصله اند.
۲. جسمی کپسول شکل را در نزدیکی روباتی که شبیه سازی کرده اید، تعریف کنید. سپس بازو را در راستای مسیری حرکت دهید، و تعیین کنید که آیا برخوردی صورت می گیرد یا نه. برای بازو نیز از رابطهای کپسول شکل استفاده کنید. هرگونه برخوردی را که صورت می گیرد، مشخص کنید.
۳. اگر امکانات زمانی و کامپیوتری به شما اجازه می دهد، زیر برنامه هایی برای نمایش گرافیکی کپسولهای تشکیل دهنده بازوی مکانیکی، و موانع موجود در فضای کاری، بنویسید.





## پیوست الف

### روابط مثلثاتی

فرمولهای مربوط به دوران حول محوره‌های اصلی به اندازه زاویه  $\theta$  عبارت‌اند از

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱})$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۲})$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۳})$$

اتحادهای مربوط به ماهیت تناوبی سینوس و کسینوس عبارت‌اند از

$$\sin \theta = -\sin(-\theta) = -\cos(\theta + 90^\circ) = \cos(\theta - 90^\circ)$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta) = \sin(\theta + 90^\circ) = -\sin(\theta - 90^\circ) \quad (\text{الف-۴})$$

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل زوایای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  عبارت‌اند از

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = s_{12} = c_1 s_2 + s_1 c_2$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = c_1 c_2 + s_1 s_2 \quad (\text{الف}_5)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = s_1 c_2 - c_1 s_2$$

مجموع مربعات سینوس و کسینوس هر زاویه برابر با واحد است

$$c^2 \theta + s^2 \theta = 1 \quad (\text{الف}_6)$$

اگر زوایای یک مثلث  $a, b, c$ ، و اضلاع روبه‌روی آنها به‌ترتیب  $A, B, C$  باشند، آنگاه «قانون کسینوسها» چنین نوشته می‌شود

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos a \quad (\text{الف}_7)$$

جایگزینی مربوط به «تأخرات نصف زاویه» چنین است

$$\begin{aligned} u &= \tan \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ \sin \theta &= \frac{2u}{1 + u^2} \end{aligned} \quad (\text{الف}_8)$$

برای دوران بردار  $Q$  حول بردار یکه  $\hat{K}$  به‌اندازه  $\theta$ ، از فرمول رودریکز استفاده کنید

$$Q' = Q \cos \theta + \sin \theta (\hat{K} \times Q) + (1 - \cos \theta) (\hat{K} \cdot \hat{Q}) \hat{K} \quad (\text{الف}_9)$$

ماتریسهای دوران معادل در بیست و چهار حالت قراردادی برای مجموعهٔ زوایا، در پیوست «ب»، و بعضی روابط سینماتیکی وارون، در پیوست «ج» آمده است.

## پیوست ب

### قراردادهای بیست و چهارگانه برای مجموعه زوایا

دوازده مجموعه زوایای اوایلر عبارت‌اند از

$$R_{X'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ sas\beta c\gamma + cas\gamma & -sas\beta s\gamma + cac\gamma & -sac\beta \\ -cas\beta c\gamma + sas\gamma & cas\beta s\gamma + sac\gamma & cac\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ cas\beta c\gamma + sas\gamma & cac\beta & cas\beta s\gamma - sac\gamma \\ sas\beta c\gamma - cas\gamma & sac\beta & sas\beta s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'X'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} sas\beta s\gamma + cac\gamma & sas\beta c\gamma - cas\gamma & sac\beta \\ c\beta s\gamma & c\beta ca & -s\beta \\ cas\beta s\gamma - sac\gamma & cas\beta s\gamma + sas\gamma & cac\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'Z'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} cac\beta & -cas\beta c\gamma + sas\gamma & cas\beta s\gamma + sac\gamma \\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma \\ -sac\beta & sas\beta c\gamma + cas\gamma & -sas\beta s\gamma + cac\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'X'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -sas\beta s\gamma + cac\gamma & -sac\beta & sas\beta c\gamma + cas\gamma \\ cas\beta s\gamma + sac\gamma & cac\beta & -cas\beta c\gamma + sas\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{X'Z'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma \\ c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'X'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta & s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma \\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma \\ -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Y'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta & c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'X'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta \\ c\alpha c\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

و دوازده مجموعهٔ زوایای ثابت عبارت‌اند از

$$R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

$$R_{XZY}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma \\ s\beta & c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 R_{YXZ}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} -sas\beta s\gamma + cac\gamma & -sac\beta & sas\beta c\gamma + cas\gamma \\ cas\beta s\gamma + sac\gamma & cac\beta & -cas\beta c\gamma + sas\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \\
 R_{YZX}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\gamma \\ cas\beta c\gamma + sas\gamma & cac\beta & cas\beta s\gamma - sac\gamma \\ sas\beta c\gamma - cas\gamma & sac\beta & sas\beta s\gamma \end{bmatrix} \\
 R_{ZXY}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} sas\beta s\gamma + cac\gamma & sas\beta c\gamma - cas\gamma & cac\beta \\ c\beta s\gamma & c\beta c\alpha & -s\beta \\ cas\beta s\gamma - sac\gamma & cas\beta c\gamma + sas\gamma & cac\beta \end{bmatrix} \\
 R_{ZYX}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ sas\beta c\gamma + cas\gamma & -sas\beta s\gamma + cac\gamma & -sac\beta \\ -cas\beta c\gamma + sas\gamma & cas\beta s\gamma + sac\gamma & cac\beta \end{bmatrix} \\
 R_{XYX}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} c\beta & s\beta s\gamma & s\beta c\gamma \\ sas\beta & -sac\beta s\gamma + cac\gamma & -sac\beta c\gamma - cas\gamma \\ -cas\beta & cac\beta s\gamma + sac\gamma & cac\beta c\gamma - sas\gamma \end{bmatrix} \\
 R_{XZX}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma \\ cas\beta & cac\beta c\gamma - sas\gamma & -cac\beta s\gamma - sac\gamma \\ sas\beta & sac\beta c\gamma + cas\gamma & -sac\beta s\gamma + cac\gamma \end{bmatrix} \\
 R_{YXY}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} -sac\beta s\gamma + cac\gamma & sas\beta & sac\beta c\gamma + cas\gamma \\ s\beta s\gamma & c\beta & -s\beta c\gamma \\ -cac\beta s\gamma - sac\gamma & cas\beta & cac\beta c\gamma - sas\gamma \end{bmatrix} \\
 R_{YZY}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} cac\beta c\gamma - sas\gamma & -cas\beta & cac\beta s\gamma + sac\gamma \\ s\beta c\gamma & c\beta & s\beta s\gamma \\ -sac\beta c\gamma - cas\gamma & sas\beta & -sac\beta s\gamma + cac\beta \end{bmatrix} \\
 R_{ZXZ}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} -sac\beta s\gamma + cac\gamma & -sac\beta c\gamma - cas\gamma & sas\beta \\ cas\beta s\gamma + sac\gamma & cac\beta c\gamma - sas\gamma & -cas\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix} \\
 R_{ZYZ}(\gamma, \beta, \alpha) &= \begin{bmatrix} cac\beta c\gamma - sas\gamma & -cac\beta s\gamma - sac\gamma & cas\beta \\ sac\beta c\gamma + cas\gamma & -sac\beta s\gamma + cac\gamma & sas\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



## پیوست ج

### برخی روابط سینماتیک وارون

معادله مثلثاتی زیر

$$\sin \theta = a \quad (\text{ج-۱})$$

دو جواب دارد که از روابط زیر به دست می آیند

$$\theta = \pm \text{Atan2}(\sqrt{1-a^2}, a) \quad (\text{ج-۲})$$

به همین ترتیب، معادله مثلثاتی زیر

$$\cos \theta = b \quad (\text{ج-۳})$$

جوابهایی این چنین خواهد داشت

$$\theta = \text{Atan2}(b, \pm \sqrt{1-b^2}) \quad (\text{ج-۴})$$

اگر معادله های (ج-۱) و (ج-۳) مفروض باشند، آنگاه جواب یکتاست ، و از رابطه زیر به دست می آید

$$\theta = \text{Atan2}(a, b) \quad (\text{ج-۵})$$

معادله متعالی زیر

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \circ \quad (\text{ج-۶})$$

۴۹۴ پیوست ج

دو جواب دارد

$$\theta = \text{Atan}^2(a, -b) \quad (\text{ج-۷})$$

و

$$\theta = \text{Atan}^2(-a, b) \quad (\text{ج-۸})$$

معادله

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c \quad (\text{ج-۹})$$

که در بخش ۴-۵ با به کارگیری روابط تانژانت نصف زاویه حل شد، جواب زیر را نیز دارد

$$\theta = \text{Atan}^2(b, a) \pm \text{Atan}^2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c) \quad (\text{ج-۱۰})$$

دستگاه معادله های زیر

$$\begin{cases} a \cos \theta - b \sin \theta = c \\ a \sin \theta + b \cos \theta = d \end{cases} \quad (\text{ج-۱۱})$$

که در بخش ۴-۴ حل شد، دارای جواب زیر نیز هست

$$\theta = \text{Atan}^2(ad - bc, ac + bd) \quad (\text{ج-۱۲})$$



## پیوست د

پاسخ به برخی از تمرینها

$$R = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ c\phi c\theta & c\phi s\theta & -s\phi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta & c\phi \end{bmatrix} \quad 1-2$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & 0,5 \\ 0,353 & 0,707 & -0,612 \\ -0,353 & 0,707 & 0,612 \end{bmatrix} \quad 2-2$$

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta c\phi & s\theta s\phi \\ s\theta & c\theta c\phi & -s\theta s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad 3-2$$

۵-۲ بردار ویژه مبتنی بر مقدار ویژه ۱، یک محور دوران است.

۶-۲ به مرجع [۴] در فصل ۲ مراجعه کنید.

۱۱-۲ هنگامی که دور آنها حول یک محور (محورهای موازی) باشند.

$${}^A V = [-1,34 \quad 22,32 \quad 30,70]^T \quad 12-2$$

$${}^B_C T = {}^B_A T \quad {}^U_A T^{-1} \quad {}^C_U T^{-1} \quad 13-2$$

۱۶-۲ روش اول: ۲۵۲۰ ضرب و ۱۶۸۰ جمع در ثانیه

روش دوم: ۲۷۰۰ ضرب و ۱۸۰۰ جمع در ثانیه

پس روش اول، بازده محاسباتی بیشتری دارد.

$${}^A P = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix} \quad ۱۷-۲$$

$${}^A P = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \cos \beta \\ r \sin \alpha \cos \beta \\ r \sin \beta \end{bmatrix} \quad ۱۸-۲$$

$$R_K(\delta\theta) = \begin{bmatrix} ۱ & -K_Z\delta\theta & K_Y\delta\theta \\ K_Z\delta\theta & ۱ & -K_X\delta\theta \\ -K_Y\delta\theta & K_X\delta\theta & ۱ \end{bmatrix} \quad ۲۱-۲$$

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad ۲۷-۲$$

$${}^A T_C = \begin{bmatrix} ۰ & -۰,۵ & ۰,۸۶۶ & ۳ \\ ۰ & ۰,۸۶۶ & ۰,۵ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad ۲۸-۲$$

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad ۳۱-۲$$

$${}^B_C T = \begin{bmatrix} -0,۸۶۶ & -0,۵ & 0 & ۳ \\ 0 & 0 & ۱ & 0 \\ -0,۵ & 0,۸۶۶ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix} \quad ۳۳-۲$$

۳۷-۲ عنصر (۲,۴) از ماتریس  ${}^B_A T$  برابر با  $-۶/۴$  است.

۴۰-۲ مانند الگوریتم‌های داده شده در بخش ۸-۲.

۴۱-۲ مانند الگوریتم‌های داده شده در بخش ۸-۲.

### فصل ۳

$${}^i_r T = \begin{bmatrix} C_{1rr} & -S_{1rr} & 0 & L_1 C_1 + L_r C_{1r} \\ S_{1rr} & C_{1rr} & 0 & L_1 S_1 + L_r S_{1r} \\ 0 & 0 & ۱ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix} \quad ۱-۳$$

$${}^i_r T = {}^B_W T = \begin{bmatrix} C_1 C_{rr} & -C_1 S_{rr} & S_1 & L_1 C_1 + L_r C_1 C_r \\ S_1 C_{rr} & -S_1 S_{rr} & -C_1 & L_1 S_1 + L_r S_1 C_r \\ S_{rr} & C_{rr} & 0 & L_r S_r \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix} \quad ۳-۳$$

$${}^i_r T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ۱ & L_1 + L_r \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix} \quad ۴-۳$$

$${}^1T = \begin{bmatrix} C_r & -S_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_r & C_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^rT = \begin{bmatrix} C_r & -S_r & 0 & L_r \\ S_r & C_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^WT = {}^WT = {}^BT^{-1} {}^BT {}^ST {}^GT \quad ۸-۳$$

$${}^P T_{ip} = \begin{bmatrix} L_1 C_1 + L_r C_1 C_r \\ L_1 S_1 + L_r S_1 C_r \\ L_r S_r \\ 1 \end{bmatrix} \quad ۹-۳$$

۱۲-۳ نه. برای تبدیلی اختیاری از جسم صلب، به شش پارامتر نیاز است.

## فصل ۴

۱-۴ فضای کاری به شکل یک تیوب (چنبره) است.

۲-۴ چنانچه هدف، جهتگیری آخرین رابط (چهارچوب مج) باشد، داریم

$$\theta_1 = \text{Atan2}(r_{1r}, -r_{rr})$$

$$\theta_r = \text{Atan2}(P_z/L_r, C_r)$$

$$\theta_r = \text{Atan2}(r_{r1}, r_{rr}) - \theta_r$$

چنانچه هدف، مکان یک نقطه در انتهای آخرین رابط باشد، داریم

$$\theta_1 = \text{Atan2}(P_y, P_x) \quad \text{یا} \quad \theta_1 = \text{Atan2}(-P_y, -P_x)$$

$$\theta_r = \text{Atan2}(P_z - L_r S_r, \alpha - L_r C_r) - \theta_r$$

$$\theta_r = \text{Atan2}(S_r, C_r)$$

که در آن

$$\alpha = \begin{cases} \frac{P_x}{C_1} - L_1 & C_1 \neq 0 \quad \text{اگر} \\ \frac{P_y}{S_1} - L_1 & S_1 \neq 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

۳-۴ فضای کاری به شکل یک دیسک است.

۵-۴ نتایج به دست آمده از بخش ۴-۷ را به یک برنامه کامپیوتری تبدیل کنید. همچنین، مجموعه جوابهایی را که در محدوده حرکتی مفصلها قرار می گیرند، مشخص کنید.

۷-۴ تکرارپذیری به عاملهای زیر بستگی دارد:

۱. خطای حالت پایا در سیستم سرو

۲. انعطاف پذیری رابطها

۳. پس زنی (لقی) چرخنده ها

۴. لقی در مفصلها

۵. اغتشاش در حساسه ها

۶. اثرات حرارتی

۸-۴ بینهایت جواب وجود دارد.

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} -\beta c\theta & \beta s\theta & \alpha & x \\ \alpha c\theta & -\alpha s\theta & \beta & y \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ۱۰-۴$$

که در آن

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

۱۳-۴

۱. از نظر محاسباتی سریعترند

۲. کلیه جوابها را به دست می دهند

۳. در برخی موارد دقیق ترند.

۱۴-۴ نه. روش پاییر حل بسته را برای روبات با سه درجه آزادی به دست می دهد.

$$16-4 \quad \theta_2 = 45^\circ, \theta_3 = 135^\circ.$$

۱۸-۴ دو مجموعه جواب.

۱۹-۴ چهار مجموعه جواب.

۲۰-۴ یک مجموعه جواب.

۲۱-۴ دو مجموعه جواب.

۲۴-۴

لولایی	کشویی
$\alpha_{i-1} = \text{Atan2}(-T_{2r}, T_{3r})$	$\alpha_{i-1} = \text{Atan2}(-T_{2r}, T_{3r})$
$a_{i-1} = T_{1r}$	$a_{i-1} = T_{1r}$
$d_i = \sqrt{T_{2r}^2 + T_{3r}^2}$	$\theta_i = \text{Atan2}(-T_{1r}, T_{1i})$

## فصل ۵

۱-۵ بله. پیکربندیهای تکین در  $\theta_2 = 0^\circ$  و  $\theta_2 = 180^\circ$  روی می دهند.

$${}^r J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & S_r L_r & 0 \\ 0 & C_r L_r + L_r & L_r \\ (-L_1 - L_r C_r - L_r C_{2r}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2-5$$

۳-۵ هر سه روش، به نتیجه زیر می رسند

$${}^r J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & L_r S_r & 0 \\ 0 & L_r C_r + L_r & L_r \\ (-L_1 - L_r C_r - L_r C_{2r}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۷-۵ روباتی دکارتی با سه مفصل کشویی عمود برهم

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_r \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^r J^{-T} = \frac{1}{L_1 L_r S_r} \begin{bmatrix} L_r & -L_1 C_r - L_r \\ 0 & L_1 S_r \end{bmatrix} \quad 10-5$$

پاسخ به برخی از تمرینها ۵۰۱

$$B_v = [3/52 \quad -7/8 \quad -17/4 \quad 1/9 \quad 0/51 \quad 0]^T \quad 11-5$$

$$\tau_1 = -1^\circ s_1 l_1 - 1^\circ l_r s_{1r} \quad 13-5$$

$$\tau_r = -1^\circ l_r s_{1r}$$

$$J = \begin{bmatrix} (d_1 + L_r + L_r)C_1 & S_1 & 0 \\ (d_r + L_r + L_r)S_1 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 15-5$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -S_1 & C_1 S_r \\ 0 & C_1 & S_1 S_r \\ 1 & 0 & C_r \end{bmatrix} \quad 16-5$$

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_r s_1 c_r & -l_r c_1 s_r & 0 \\ l_1 c_1 + l_r c_1 c_r & -l_r s_1 s_r & 0 \\ 0 & l_r c_r & 0 \end{bmatrix} \quad 18-5$$

۱۹-۵ هنگامی که  $d_r = 0$ ، بازو در حالت تکین است.

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - d_r c_1 & -s_1 \\ a_1 c_1 - d_r s_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

## فصل ۶

$$^c I = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} m r^r + \frac{1}{1r} m h^r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} m r^r + \frac{1}{r} m h^r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} m r^r \end{bmatrix} \quad 1-6$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (I_{zz1} + I_{zz2} + \gamma m_r r_1 l_1 c_r + m_r l_1^r + m_1 r_1^r + m_r r_1 l_r) \ddot{\theta}_1 \\ &\quad + (m_r r_1 l_r + I_{zz2} + m_r l_1 r_1 c_r) \ddot{\theta}_r - m_r l_1 r_1 s_r (\gamma \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_r^2) \\ &\quad + m_r r_1 g c_{1r} + m_1 r_1 g c_1 + m_r l_1 g c_1 \\ \tau_r &= (I_{zz2} + m_r l_1 r_1 c_r + m_r l_r r_1) \ddot{\theta}_1 + (I_{zz2} + m_r l_r r_1) \ddot{\theta}_r \\ &\quad + m_r l_1 r_1 s_r \dot{\theta}_1^2 + m_r r_1 g c_{1r} \\ r_i &= \frac{l_i}{\gamma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau &= M(\theta) \ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad 5-6 \\ M(\theta) &= \begin{bmatrix} m_1 l_1^r + m_r (l_1 + l_r c_r) & 0 \\ 0 & m_r l_r^r \end{bmatrix} \\ V(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} -\gamma (l_1 + l_r c_r) m_r l_r s_r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_r \\ (l_1 + l_r c_r) m_r l_r s_r \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \\ G(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ m_r g l_r c_r \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= I_{zz1} \ddot{\theta}_1 + \gamma m_r d_r \dot{d}_r \dot{\theta}_1 + m_r d_r^r \ddot{\theta}_1 \quad 8-6 \\ \tau_r &= -m_r d_r \dot{\theta}_1^2 + m_r \ddot{d}_r\end{aligned}$$

۱۰-۶ نسبت به چهارچوب {۲} به دست می آید

$$\begin{aligned}M_X(\theta) &= \begin{bmatrix} m_r + \frac{I_{zz1}}{d_r^r} & 0 \\ 0 & m_r \end{bmatrix} \\ V_X(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} \left( \frac{I_{zz1}}{d_r^r} \right) \dot{\theta}_1 \dot{d}_r - m_r \dot{\theta}_1 \dot{d}_r \\ -m_r \dot{\theta}_1^2 d_r \end{bmatrix} \\ G_X(\theta) &= [0 \ 0]^T\end{aligned}$$



پاسخ به برخی از تمرینها ۵۰۳

۱۱-۶ لغتی کل برابر است با  $I_{zz1} (\frac{1}{1+\dots})^2$ .

۱۳-۶ نسبت به چهارچوب {۳} به دست می آید

$$\begin{aligned} M_X(\theta) &= \begin{bmatrix} m_r & 0 \\ 0 & (m_1 \frac{l_r^2}{(l_1+l_r c_r)^2} + m_r) \end{bmatrix} \\ V_X(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} -m_r l_r \dot{\theta}_1^2 s_r \\ -\left\{ \frac{m_1 l_1^2 l_r}{(l_1+l_r c_r)^2} + m_r [2l_1 + l_r (1 + 2c_r)] \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_r s_r \end{bmatrix} \\ G_X(\theta) &= \begin{bmatrix} m_r g c_r \\ 0 \end{bmatrix} \\ F_X(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} \frac{V_1 \dot{\theta}_1}{l_r} \\ \frac{V_1 \dot{\theta}_1}{l_1+l_r c_r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۵-۶ پاسخ همان نتیجه به دست آمده در مثال ۵-۶ است.

$$\tau = \begin{bmatrix} f_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = M(\theta) \ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad ۱۶-۶$$

که در آن

$$\begin{aligned} \theta &= \begin{bmatrix} d_1 \\ \theta_r \end{bmatrix}; \quad M(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 + m_r & 0 \\ 0 & I_{zzr} \end{bmatrix} \\ V(\theta, \dot{\theta}) &= 0; \quad G(\theta) = 0 \end{aligned}$$

## فصل ۷

۱-۷ ۱۸ معادله درجه سوم محاسبه می شوند، و تعداد ضریبهای آنها ۷۲ تا است.

۲-۷ ضرایب معادله عبارتند از:  $a_0 = -5$ ;  $a_1 = 0$ ;  $a_2 = 15/94$ ;  $a_3 = -2/66$

۳-۷ فرض کنید:  $\ddot{\theta} = 85 \text{ deg/sec}^2$ . در این صورت

$$t_b = 0.268 \text{ sec}$$

$$t_l = 2\sqrt{3} \text{ sec}$$

$$\dot{\theta} = 85(2 - \sqrt{3}) \text{ deg/sec}$$

$$\theta_b = -1.94^\circ$$

۶-۷ برای قسمت اول تمرین از رابطه (۱۱-۷) به دست می آید

$$\begin{cases} \theta_0 = 5; & \theta_f = 15; & \dot{\theta}_0 = 0; & \dot{\theta}_f = 17,5; & t_f = 1 \\ a_0 = 5; & a_1 = 0; & a_2 = 12,5; & a_3 = -2,5 \end{cases} \quad (\text{از رابطه ۱۱-۷})$$

و برای قسمت دوم

$$\begin{cases} \theta_0 = 15; & \theta_f = 40; & \dot{\theta}_0 = 17,5; & \dot{\theta}_f = 0; & t_f = 1 \\ a_0 = 15; & a_1 = 17,5; & a_2 = 40,0; & a_3 = -32,5 \end{cases} \quad (\text{از رابطه ۱۱-۷})$$

۸-۷ از رابطه (۱۵-۷) برای محاسبه ضرایب استفاده کرده، نتایج را در رابطه (۳-۷) قرار دهید و رسم کنید.

$${}^s\mathcal{X}_G = [10 \quad 20 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 30]^T \quad 11-7$$

$${}_G^sT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0,707 & -0,707 & -20 \\ 0 & 0,707 & 0,707 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 12-7$$

$$t_f > \text{Max} \left[ \frac{3}{2\dot{\theta}_{\max}} |\theta_f - \theta_0|; \sqrt{\frac{6}{\ddot{\theta}_{\max}}} |\theta_f - \theta_0| \right] \quad 16-7$$

و ضرایب با استفاده از رابطه (۱۱-۷) به دست می آیند.

$$\theta(0) = 10; \quad \dot{\theta}(0) = 0; \quad \ddot{\theta}(0) = 180 \quad 17-7$$

$$\theta(1) = 40; \quad \dot{\theta}(1) = 0; \quad \ddot{\theta}(1) = -180$$

$$\theta(2) = -110; \quad \dot{\theta}(2) = -360; \quad \ddot{\theta}(2) = -540 \quad 18-7$$

$$\theta(0) = 10; \quad \dot{\theta}(0) = 5; \quad \ddot{\theta}(0) = 140 \quad 19-7$$

$$\theta(1) = 40; \quad \dot{\theta}(1) = 10; \quad \ddot{\theta}(1) = -130$$

$$\theta(2) = -60; \dot{\theta}(2) = -255; \ddot{\theta}(2) = -400 \quad 20-7$$

## فصل ۸

$$Q_L = \frac{u-l}{\sqrt{\frac{r}{r}} \pi (u^r - l^r)} \quad 3-8$$

$$k_{total} = 1/843 \text{ N.m/rad} \quad 4-8$$

$$d = 1/244 \text{ cm} \quad 5-8$$

$$k_{total} = 230/77 \text{ N.m/rad} \quad 6-8$$

$$f = 12 \quad 8-8$$

$$\text{error} = 6/25 \quad 10-8$$

$$d_i = \| \frac{B}{T} T q_i - p_i \| \quad 12-8$$

$$L_1 = L_2 \text{ مقدار بهینه است.} \quad 13-8$$

$$L_1 = L_2 \text{ مقدار بهینه است.} \quad 14-8$$

$$k = 0/006135 \text{ N.m/rad} \quad 16-8$$

$$\eta = 6 \quad 17-8$$

$$f = 6 \quad 19-8$$

$$f = 3 \quad 20-8$$

$$22-8 \quad \text{اگر } d_c \text{ فاصله مرکز قرقه‌ها از یکدیگر و } \tau_1 > \tau_2, \text{ به دست می‌آید}$$

$$\begin{cases} k = \frac{AE}{2\sqrt{d_c^2 - (r_1 - r_2)^2} + 2[(\pi - \theta_1)r_1 + \theta_1 r_2]} \\ \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{r_1}{d_c}\right) \end{cases} \quad \text{که در آن:}$$

## فصل ۹

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad 2-9$$

$$x(t) = 4(1+t)e^{-t} \quad 3-9$$

$$x(t) = 2e^{-2t} \cos t + 4e^{-2t} \sin t \quad 4-9$$

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-5t} \quad ۵-۹$$

$$\% ۶۶,۶۷ \quad ۶-۹$$

$$\% ۲۸,۵۷ \quad ۷-۹$$

$$k_p = 4; \quad k_v = 2 \quad ۸-۹$$

$$\omega_{res} = ۳۲۷,۰۴ \text{ rad/sec} \quad ۱۰-۹$$

$$\omega_{res} = ۳۱,۶۲ \text{ rad/sec} \quad ۱۱-۹$$

$$\omega_{res} = ۱۷۸,۸۸ \text{ rad/sec} \quad ۱۲-۹$$

$$\omega_{res} = ۶۵,۷۶ \text{ rad/sec} \quad ۱۳-۹$$

$$\omega_{max} = ۱,۳۵۷ \text{ rad/sec} \quad ۱۵-۹$$

$$\omega_{min} = ۰,۶۷۹ \text{ rad/sec}$$

فصل ۱۰

۱-۱۰

$$\tau = \alpha\tau' + \beta \quad (\alpha = 2\sqrt{\theta} + 1; \quad \beta = 3\dot{\theta}^2 - \sin\theta)$$

$$\tau' = \ddot{\theta}_D + k_w\dot{e} + k_\theta e \quad (e = \theta_D - \theta; \quad k_\theta = k_{CL} = 1^\circ; \quad k_w = 2\sqrt{k_{CL}} = 2\sqrt{1^\circ})$$

۲-۱۰

$$\tau = \alpha\tau' + \beta \quad (\alpha = 2; \quad \beta = 5\theta\dot{\theta} - 13\dot{\theta}^2 + 5)$$

$$\tau' = \ddot{\theta}_D + k_v\dot{e} + k_p e \quad (e = \theta_D - \theta; \quad k_p = 1^\circ; \quad k_v = 2\sqrt{1^\circ})$$

$$e = \frac{\psi_m g \cos \theta}{k_p \hat{m} l} \quad ۶-۱۰$$

 در  $\theta = 0^\circ$  یا  $\theta = ۱۸۰^\circ$ , مقدار خطا ماکزیمم است.

۱۰-۱۰

$$f = \alpha f' + \beta \quad (\alpha = 2; \quad \beta = 5x\dot{x} - 12)$$

$$f' = \ddot{x}_D + k_v\dot{e} + k_p e \quad (e = x_D - x; \quad k_p = 2^\circ; \quad k_v = 2\sqrt{2^\circ})$$

پاسخ به برخی از تمرینها ۵۰۷

$$\begin{cases} \alpha = ax^{\tau} \dot{x} \\ \beta = b\dot{x}^{\tau} + c \sin x \\ k_v = 2\sqrt{k_p} \end{cases} \quad ۱۷-۱۰$$

$$m\ddot{\theta} + B\dot{\theta}^{\tau} + C\dot{\theta} = m [\ddot{\theta}_D + k_v\dot{e} + k_p e] + \sin \theta \quad ۱۸-۱۰$$

فصل ۱۱

$${}^B f = [۱/۰ \quad ۱/۷۳ \quad -۳ \quad -۶/۳ \quad -۳۰/۹ \quad -۱۵/۸]^T \quad ۴-۱۱$$

$${}^B f = [۲/۱۹ \quad ۸/۱۹ \quad ۰ \quad ۴۴/۳ \quad -۸/۵ \quad -۶۰/۳]^T \quad ۵-۱۱$$

۱۱-۱۱ قیدهای طبیعی عبارت‌اند از

$$V_x = ۰ \quad \omega_y = ۰$$

$$V_z = ۰ \quad \omega_z = ۰$$

$$\omega_x = ۰ \quad f_y = ۰$$

فصل ۱۲

تمرینهای این فصل، از نوع برنامه‌ریزی هستند، و جواب آنها به روبات قابل دسترسی بستگی دارد. به همین دلیل، باید برنامه‌ریزی را با توجه به امکانات آزمایشگاه، انجام دهید.



## واژه‌نامه فارسی - انگلیسی

array	آرایه
armature	آرمیچر
logic testing and branching	آزمون و انشعاب منطقی
trial and error	آزمون و خطا
automatic collision detection	آشکارسازی اتوماتیک برخورد
current amplifier	آمپلی فایر جریان
inertia pendulum	آونگ لختی
inverted pendulum	آونگ وارون
path update rate	آهنگ روزآمد کردن مسیر
sample rate	آهنگ نمونه‌برداری
servo rate	آهنگ سرو
end of arm tooling	ابزار انتهای بازو
lower pair	اتصال لغزشی
hard automation	اتوماسیون انعطاف‌ناپذیر
fixed automation	اتوماسیون ثابت
spline	اسپلاین
stator	استاتور
assembly strategy	استراتژی مونتاژ
Coulomb friction	اصطکاک خشک
viscous friction	اصطکاک ویسکوز
principle of virtual work	اصل کار مجازی
random disturbance	اغتشاش تصادفی
control algorithm	الگوریتم کنترل
mechanical impedance	امپدانس مکانیکی

translation	انتقال
locomotion	انتقال و حرکت (رشته فرعی روباتیک)
numerical integration	انتگرالگیری عددی
offset	انحراف
eccentricity	انحراف از مرکز
link offset	انحراف رابط
joint offset	انحراف مفصلی
motor armature inductance	اندوکتانس آرمیچر موتور
flexibility	انعطاف‌پذیری
passive compliance	انعطاف‌پذیری غیرفعال
remote center compliance	انعطاف‌پذیری مرکزی از راه دور
force-sensing fingers	انگشتان حس‌کننده نیرو
four-bar linkage	اهرم‌بندی چهار میله‌ای
workstation	ایستگاه کاری
efficiency	بازده
mechanical manipulator	بازوی مکانیکی ماهر
cylindrical manipulator	بازوی مکانیکی ماهر استوانه‌ای
SCARA manipulator	بازوی مکانیکی ماهر اسکارا
articulated manipulator	بازوی مکانیکی ماهر بندبند
Cartesian manipulator	بازوی مکانیکی ماهر دکارتی
micro manipulator	بازوی مکانیکی ماهر ریز (ریز روبات)
elbow manipulator	بازوی مکانیکی ماهر زانویی
redundant manipulator	بازوی مکانیکی ماهر زاید
anthropomorphic manipulator	بازوی مکانیکی ماهر شبه انسان
redundant plane manipulator	بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با مفصلهای زاید
spherical manipulator	بازوی مکانیکی ماهر کروی
jointed manipulator	بازوی مکانیکی ماهر مفصلی
interval	بازه
trivial	بدیهی
label	برچسب
self-collision	برخورد با خود
free vector	بردار آزاد



state vector	بردار حالت
line vector	بردار خطی
angular velocity vector	بردار سرعت زاویه‌ای
actuator vector	بردار کارانداز
gravity vector	بردار گرانی
joint vector	بردار مفصل
position vector	بردار مکان
eigen vector	بردار ویژه
resolver	برطرف کننده
bottom-up programming	برنامه‌ریزی پایین به بالا
off-line programming	برنامه‌ریزی خارج خط
frequency	بسامد
damped natural frequency	بسامد طبیعی میرا
fixture	بست
gain	بهره (ضریب تقویت)
control gain	بهره کنترلی
effective force feedback gain	بهره مؤثر پس‌خوراند نیرو
memory bit	بیت حافظه
inertia ellipsoid	بیضیوار لختی
computer vision	بینایی کامپیوتری
skew-symmetric	بعدمقارن
Euler's parameters	پارامترهای اوایلر
fixed link parameters	پارامترهای ثابت رابط
steady	پایا
stable	پایدار
asymptotic stability	پایداری مجانبی
potentiometer	پتانسیومتر
flag	پرچم (متغیر در برنامه کامپیوتری)
torque ripple	پرش گشتاور
post processor	پس پردازنده
trailing superscript	پس زیرنویس
trailing subscript	پس زیرنویس

feedback	پس‌خوراند (فیدبک)
hysteresis	پسماند
deburring	پلیسه‌گیری
polymorphic	پلی مرفیک
graphic window	پنجره گرافیک
work envelope	پوش کاری
band width	پهنای باند
face width	پهنای رویه چرخدنده
ballbearing screw	پیچ بلبرینگی
lead screw	پیچ هدایت (جلوبر)
preload	پیش بار
leading superscript	پیش‌زیرنویس
leading subscript	پیش‌زیرنویس
premultiply	پیش‌ضرب
configuration	پیکربندی
singular configuration	پیکربندی تکین
continuous	پیوسته
warp	تاب
nominal function	تابع اسمی
generalized energy function	تابع انرژی تعمیم‌یافته
transcendental function	تابع غیر جبری (متعالی)
smooth function	تابع هموار
delay	تاخیر
inertia tensor	تانسور لختی
transform	تبدیل
automatic coercion	تبدیل اتوماتیک نوع‌های یکسان
similarity transform	تبدیل تشابهی
transformation	تبدیل کلی
velocity transformation	تبدیل کلی سرعت
force-moment transformation	تبدیل کلی نیرو-گشتاور
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
trajectory conversion	تبدیل مسیر

homogeneous transform	تبدیل همگن
integration	تجمع
error-propagation analysis	تحلیل اشاعه خطا
Lyapunov's stability analysis	تحلیل پایداری لیاپونوف
steady-state analysis	تحلیل حالت پایا
circuit board	تخته مدار
transducer	تراگردان (مبدل)
transpose	ترانهاده
synthesis	ترکیب
hybrid	ترکیبی
conveyor belt	نسمه نقاله
resonance	تشدید
structural resonance	تشدید سازه‌ای
unmodeled resonance	تشدید مدل‌نشده
error recovery	تصحیح خطا
automatic robot placement	تعیین جای روبات به‌طور اتوماتیک
trajectory-following	تعقیب مسیر
control law partitioning	تقسیم قانون کنترل
voltage divider	تقسیم‌کننده ولتاژ
kinematic emulation	تقلید سینماتیکی
path-planning emulation	تقلید طرح‌ریزی مسیر
repeatability	تکرارپذیری
playback	تکرار حرکت
singular	نکین
regulation	تنظیم (رگولاسیون)
mass distribution	توزیع جرم
description	توصیف
computer-aided manufacturing (CAM)	تولید به کمک کامپیوتر
path generator	تولید کننده مسیر
trajectory generation	تولید مسیر
Cartesian trajectory generation	تولید مسیر دکارتی
gravitational constant	ثابت گرانی

motor torque constant	ثابت گشتاور موتور
back emf constant	ثابت نیروی ضد محرکه
premutation	جایگشت
compensation	جبران
wrist-partitioned	جداکننده میچ
overhead gantry crane	جرتقیل دروازه‌ای سقفی
inspection	جستجو
teach pendant	جعبه آموزش
bounding box	جعبه کراندار
antialiasing	جلوگیری از ایجاد خطا
closed form solution	جواب بسته
spot welding	جوشکاری نقطه‌ای
singular direction	جهت تکین
orientation	جهتگیری
worm gear	چرخدنده حلزونی
spur gear	چرخدنده ساده
cross helical gear	چرخدنده مارپیچ
bevel gear	چرخدنده مخروطی
cycle time	چرخه زمانی
«edit,compile,run» cycle	چرخه «ویرایش برنامه، کمپایل برنامه، اجرای برنامه»
cubic polynomial	چندجمله‌ای درجه سوم
planar polygon	چندضلعی مسطح
multi-input,multi-output (MIMO)	چندورودی- چندخروجی
frame	چهارچوب
tool frame	چهارچوب ابزار
station frame	چهارچوب ایستگاه
base frame	چهارچوب پایه
sensor frame	چهارچوب حساسه
local link frame	چهارچوب رابط محلی
constraint frame	چهارچوب قید
wrist frame	چهارچوب میچ دست

universal (world) frame	چهارچوب مرجع عام
task frame	چهارچوب میز کار
goal frame	چهارچوب هدف
unit quaternion	چهارگان یکه
mass product of inertia	حاصلضرب لختی جرم
z-buffer	حافظه z
global memory	حافظه کلی
state	حالت
singular state	حالت تکین
workspace interior singularities	حالت‌های تکین در داخل فضای کاری
workspace bounding singularities	حالت‌های تکین در مرز فضای کاری
work volume	حجم کاری
hidden line elimination	حذف خطوط پنهان
backface elimination	حذف خطوط نامرئی
Cartesian motion	حرکت دکارتی
Cartesian straight line motion	حرکت راست خط دکارتی
guarded move	حرکت محتاطانه
coordinated motion	حرکت هماهنگ‌شده
sensor	حساسه
vision sensor	حساسه بینایی
proprioceptive sensor	حساسه داخلی (عمقی)
wrist sensor	حساسه مچی
joint position sensor	حساسه مکانی مستقر در مفاصلها
light beam interrupt sensor	حساسه نوری قطع‌کننده
context sensitivity	حساسیت در متن برنامه
position sensing	حس مکان
force sensing	حس نیرو
off-line	خارج خط
memory location	خانه حافظه
line of action	خط اثر
error checking	خطاگیری

steady-state error	خطای حالت پایا
servo error	خطای سرو
linear	خطی
moving linearization	خطی‌سازی متحرک
local linearization	خطی‌سازی موضعی
deflection	خمیدگی
autonomous	خودمختار
pixel	دانه تصویر
degree of freedom	درجه آزادی
interpolation	درونیابی
universe coordinate system	دستگاه مختصات عام (مرجع)
universal device	دستگاه همه‌کاره
disturbance rejection	دفع اغتشاش
accuracy	دقت
tachometer	دورسنج
dynamics	دینامیک
link	رابط
direct drive	رانش مستقیم
closed form solution	راه حل بسته
algebraic solution	راه حل جبری
geometric solution	راه حل هندسی
full rank	رتبه کامل
tracking reference input	ردیابی ورودی مرجع
iterative relations	روابط تکراری
industrial robot	روبات صنعتی
gantry robot	روبات قاب جرثقیل
rotor	روتور
update	روزآمد
finite element method	روش اجزای محدود
numerical solution	روش حل عددی
heuristic method	روش خودآموز

Lyapunov's second (direct) method	روش دوم (مستقیم) لیاپونوف
joint space scheme	روش فضای مفصلی
actuation scheme	روش کاراندازی حرکتی
linear control method	روش کنترل خطی
intuitive scheme of Cartesian control	روش کنترل دکارتی شهودی
path control scheme	روش کنترل مسیر
computed torque method	روش گشتاور محاسبه شده
Lyapunov's method	روش لیاپونوف
Cartesian decoupling scheme	روش مستقل‌سازی دکارتی
intuition	رهیافت شهودی
microprocessor	ریزپردازنده
micromanipulator	ریزروبات
repeated roots	ریشه‌های تکراری
real and equal roots	ریشه‌های حقیقی و مساوی
real and unequal roots	ریشه‌های حقیقی و نامساوی
complex roots	ریشه‌های مختلط
link twist	زاویه پیچش رابط
joint angle	زاویه مفصلی
redundant	زائد
AL	زبان برنامه‌ریزی AL
robot programming language	زبان برنامه‌ریزی روبات
SIL	زبان برنامه‌ریزی SIL
explicit programming language	زبان برنامه‌ریزی صریح
task-level programming language	زبان برنامه‌ریزی عملیاتی
interactive language	زبان برهم‌کنشی
specialized manipulation language	زبان تخصصی روبات
multiprocessing language	زبان چند فرایندی
dual superscript	زبرنویس دوگان
run time	زمان اجرا (در برنامه کامپیوتری)
automatic scheduling	زمانبندی اتوماتیک
multiply time	زمان ضرب
correlation time	زمان همبستگی

open kinematic chain	زنجیر سینماتیکی باز
roller chain	زنجیر غلتکی
Euler angles	زوایای اویلر
Z-Y-X Euler angles	زوایای اویلر Z-Y-X
Z-Y-Z Euler angles	زوایای اویلر Z-Y-Z
X-Y-Z fixed angles	زوایای ثابت X-Y-Z
roll, pitch, yaw	زوایای رول، پیچ، یاو
subroutine	زیر برنامه
subspace	زیر فضا
underdamped state	زیر میرایی
Jacobian	ژاکوبی
inverse Jacobian	ژاکوبی وارون
dynamicdly simple	ساده از نظر دینامیکی
kinematically simple	ساده از نظر سینماتیکی
structure	سازه
closed loop structure	سازه بسته
orienting structure	سازه تعیین جهتگیری
positioning structure	سازه تعیین مکان
redundant and closed chain structure	سازه زنجیری زاید
Goraud shading	سایه‌زنی پیوسته
orthonormal columns	ستونهای یکامتعامل
stiffness	سختی
torsional stiffness	سختی پیچشی
closed loop stiffness	سختی مدار بسته
effective stiffness	سختی مؤثر
rotational speed	سرعت دورانی
force-controlling servo	سروی کنترل نیرو
surface	سطح
generalized surface	سطح تعمیم داده‌شده
constraint surface	سطح قید
facet	سطح کوچک



pallet	سکوی حمل
host platform	سکوی میزبان
workcell	سلول کاری
transmission system	سیستم انتقال قدرت
task level programming system (TLP)	سیستم برنامه‌ریزی عملیاتی
vision system	سیستم بینایی
second-order linear system	سیستم خطی درجه دوم
error-driven servo	سیستم سرو با رانش خطا
direct time servo	سیستم سرو با زمان ناپیوسته
discrete time simulation system	سیستم شبیه‌ساز با گسستگی زمانی
reduction system	سیستم کاهش سرعت
control system	سیستم کنترل
multi-input,multi-output control system	سیستم کنترل چندورودی- چندخروجی
position control system	سیستم کنترل مکان
closed loop system	سیستم مدار بسته
aliased signal	سیگنال دارای خطا
pneumatic cylinder	سیلندر بادی (نیوماتیکی)
hydraulic cylinder	سیلندر هیدرولیکی
kinematics	سینماتیک
forward kinematics, direct kinematics	سینماتیک مستقیم
inverse kinematics	سینماتیک وارون
structural length index	شاخص طولی سازه‌ای
quasi-static	شبه استاتیکی
anthropomorphic	شبه انسان
simulation	شبیه‌سازی
multiprocess simulation	شبیه‌سازی چندفرایندی
off-line simulation	شبیه‌سازی خارج خط
dynamic simulation	شبیه‌سازی دینامیکی
angular acceleration	شتاب زاویه‌ای
initial conditions	شرایط اولیه
up-down counter	شمارنده صعودی-نزولی
argument	شناسه

servo valve	شیپر سرو
arm signature stule	شیوه نشان بازو
keyboard	صفحه کلید
quadratic form	صورت درجه دوم
closed loop stiffness	ضریب سختی مدار بسته
computer-aided design (CAD)	طراحی به کمک کامپیوتر
path planner	طرحریز مسیر
collision-free path planning	طرحریزی مسیره‌های عاری از برخورد
link length	طول رابط
load capacity	ظرفیت حمل بار
lens	عدسی
overload protection	عضو حافظ در مقابل بار بیش از حد
performance	عملکرد
operator	عملگر
high-level operations	عملیات سطح بالا
debugger	غلطگیر
nonautonomous	غیر خودمختار
decoupled	غیر وابسته
background process	فرایند زمینه‌ای
Lagrangian dynamic formulation	فرمولبندی دینامیکی لاگرانژ
Rodrique's formula	فرمول رودریکز
Cayley's formula for orthonormal matrices	فرمول کیلی برای ماتریسهای متعامد
Grubler's formula	فرمول گروبلر
effective recursive formula	فرمولبندی بازگشتی مؤثر
extreme	فرین (حدی)
interface	فصل مشترک (وسیله ارتباط)

world interface	فصل مشترک جهانی
configuration space	فضای پیکربندی
error space	فضای خطا
Cartesian space	فضای دکارتی
null space	فضای صفر
operational space	فضای عملیاتی
actuator space	فضای کاراندازی
workspace	فضای کاری
reachable workspace	فضای کاری دسترسی‌پذیر
rigid workspace	فضای کاری صلب
dextrous workspace	فضای کاری ماهر
joint space	فضای مفصلی
task-oriented space	فضای نشانگر وظایف
over damped state	فوق میرایی
low pass filter	فیلتر پایین‌گذران
noncausal filter	فیلتر غیرسببی
closed form solvable	قابل حل به طریق بسته
chain rule	قاعده زنجیری
l'Hopital's rule	قاعده هوییتال
control law	قانون کنترل
PID control law	قانون کنترل PID
error-driven control law	قانون کنترل با رانش خطا
position control law	قانون کنترل مکان
force control law	قانون کنترل نیرو
angle set convention	قرارداد تعیین زاویه
servo portion	قسمت سرو
model-based portion	قسمت وابسته به مدل
Euler's theorem on rotation	قضیه اویلر در دوران
parallel axis theorem	قضیه محوره‌های موازی
pole	قطب
dominant pole	قطب غالب
diagonal	قطری

light pen	قلم نوری
natural constraint	قید طبیعی
artificial constraint	قید مصنوعی
position constraint	قید مکانی
force constraint	قید نیرویی
actuator	کارانداز
vane actuator	کارانداز پره‌ای
joint actuator	کارانداز مفصل
subtask	کار فرعی
virtual work	کار مجازی
workcell calibration	کالیبراسیون سلول کاری
digital computer	کامپیوتر رقمی (دیجیتال)
robot library	کتابخانهٔ روبات
incremental rotary optical encoder	کدگذار نوری با گردش پله‌ای
bounded	کراندار
strain gauge	کرنش‌سنج
direction cosines	کسینوسهای هادی
limit switch	کلید محدودکننده
feed forward control	کنترل پیشرو
hybrid control	کنترل ترکیبی
hybrid position-force control	کنترل ترکیبی مکان-نیرو
adaptive control	کنترل تطبیقی
trajectory-following control	کنترل تعقیب مسیر
linear control	کنترل خطی
linearizing control	کنترل خطی‌کننده
linearizing and decoupling control	کنترل خطی و مستقل‌کننده
digital control	کنترل رقمی (دیجیتال)
discrete time control	کنترل زمانی ناپیوسته
numerical control (NC)	کنترل عددی
nonlinear control	کنترل غیرخطی
decoupled control	کنترل غیر وابسته (مستقل)
hybrid position-force controller	کنترل‌کنندهٔ ترکیبی مکان-نیرو

transpose Jacobian controller	کنترل‌کننده ژاکوبی ترانپازه
inverse Jacobian controller	کنترل‌کننده ژاکوبی وارون
robust controller	کنترل‌کننده غیرظریف
force monitor	کنترل‌کننده نیرو
Cartesian-based control	کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی
joint-based control	کنترل مبتنی بر مفصل
independent joint control	کنترل مفصل مستقل
position control	کنترل مکان
force control	کنترل نیرو
active force control	کنترل نیرویی فعال
shaded graphics	گرافیک سایه زده شده
actuator torque	گشتاور کارانداز
joint torque	گشتاور مفصلی
gripper	گیره
Lagrangian	لاگرانژین
keyword	لغت کلیدی
backlash	لقی (پس‌زنی چرخدنده)
clearance	لقی (در انطباقات)
crank	لنگ
moment of inertia	لنگر لختی
pricipal moment of inertia	لنگر لختی اصلی
mass moment of inertia	لنگر لختی جرم
effective inertia	لختی مؤثر
skew symmetric matrix	ماتریس پاد متقارن
mass matrix	ماتریس جرم
Cartesian mass matrix	ماتریس جرم دکارتی
rotation matrix	ماتریس دوران
angular velocity matrix	ماتریس سرعت زاویه‌ای
tridiagonal matrix	ماتریس سه قطری
identity matrix	ماتریس همانی

proper orthonormal matrix	ماتریس یکامتعامد سره
unity matrix	ماتریس یکه
affixment	متصل‌سازی
character string	متغیر الفبایی (حرفی)
joint variable	متغیر مفصلی
end effector	مجری نهایی
length sum	مجموع طولی
wrist	مچ
three roll wrist	مچ سه گردون
outward iterations	محاسبات تکراری بیرونی
inward iterations	محاسبات تکراری درونی
iterative Newton-Euler dynamic formulation	محاسبات دینامیکی تکراری
outward computation	محاسبه ساده بیرونی
inward computation	محاسبه ساده درونی
instantaneous axis of rotation	محور آنی دوران
equivalent angle-axis	محور و زاویه معادل
principal axes	محورهای اصلی
joint axes	محورهای مفصلی
programming environment	محیط برنامه‌ریزی
generalized coordinates	مختصات تعمیم‌یافته
open loop	مدار باز
closed loop	مدار بسته
world model	مدل جهانی
world modeling	مدلسازی جهانی
3-D modeling	مدلسازی سه بعدی
wireframe model	مدل شبکه‌ای
null model	مدل صفر
perfect model	مدل کامل
CAD model	مدل CAD
gravity model	مدل گرانی
lumped model	مدل متمرکز
inverse model	مدل وارون
modulus of elasticity	مدول کشسانی

shear modulus of elasticity	مدول کشسانی برشی
sequencer	مرتب کننده اطلاعاتی
center of mass	مرکز جرم
mechanical advantage	مزیت مکانیکی
uncoupled	مستقل (غیروابسته، جداشده)
decouple	مستقل کردن
path	مسیر
trajectory	مسیر (مسیر مکانی-زمانی)
time-optimal path	مسیر بهینه زمانی
cubic spline trajectory	مسیر درجه سوم
parabolic blend	مسیر سهموی
collision-free path	مسیر عاری از برخورد
numerical differentiation	مشتقگیری عددی
Euler's equation	معادله اویلر
recursive Newton - Euler equation	معادله بازگشتی نیوتن- اویلر
transform equation	معادله تبدیل
undefined equation	معادله تعریف نشده
configuration space equation	معادله فضای پیکربندی
state space equation	معادله فضای حالت
characteristic equation	معادله مشخصه
parametric equation	معادله نمادین
Newton's equation	معادله نیوتن
maniputability measure	معیار مهارت
positive definite	معین مثبت
joint	مفصل
ball and socket	مفصل کروی
prismatic joint	مفصل لغزشی (کشویی)
revolute joint	مفصل لولایی (چرخشی)
eigenvalue	مقدار ویژه
scaling	مقیاسگذاری
partially constrained	مقید شده جزئی
position	مکان
Stewart's mechanism	مکانیزم استوارت

servo-controlled mechanism	مکانیزم خودفرمان (سرؤ کنترل)
well-conditioned	مناسب
parallelism in programming	موازات در برنامه‌ریزی
limit stops	موانع محدودکننده حرکت
menu	منو
brushless motor	موتور بدون جاروبک
stepper motor	موتور پله‌ای
direct current torque motor	موتور گشتاوری جریان مستقیم
on-line mode	مود روی خط
background mode	مود زمینه
mouse	موش (ماوس)
path generator	مولّد مسیر
assembly	مونتاژ
automated assembly	مونتاژ اتوماتیک
component	مولفه
damper	میراگر
critical damping	میرایی بحرانی
effective damping	میرایی مؤثر
unstable	ناپایدار
nonsingular	ناتکین
nonproper	ناسره
time-invariant	نامتغیر با زمان
gear ratio	نسبت چرخدنده
damping ratio	نسبت میرایی
event monitoring	نظارت بر رویدادها
via points	نقاط بینابینی
pseudo via points	نقاط بینابینی مجازی
singularities	نقاط تکین
computed points	نقاط محاسبه‌شده
path points	نقاط مسیر
conveyor	نقاله
taught point	نقطه آموزش داده‌شده



set-point	نقطه تنظیم
fixed point	نقطه ثابت
floating point	نقطه شناور
operating point	نقطه عمل
through point	نقطه گذر
wrist point	نقطه مع
feature point	نقطه مشخصه
mapping	نگاشت
notation	نمادگذاری
Denavit-Hartenberg notation	نمادگذاری دناویت-هارتنبِرگ
faceted representation	نمایش به وسیله سطوح کوچک
analytic representation	نمایش تحلیلی
shaded surface display	نمایش سطح سایه‌زده شده
wireframe rendering	نمایش شبکه‌ای
data types	نوع‌های داده‌ای
geometric types	نوع‌های هندسی
noise	نویز
linear actuator force	نیروی کارانداز خطی
joint actuator force	نیروی کارانداز مفصلی
Coriolis force	نیروی کوریولیس
centrifugal force	نیروی گریز از مرکز
semiconductor	نیم‌رسانا
semidefinite	نیمه‌معین
model-based	وابسته به مدل
inverse	وارون
invertible	وارون‌پذیر
bounded-input, bounded-output	ورودی کراندار-خروجی کراندار
active positioning device	وسیله تثبیت موقعیت فعال
text editors	ویرایشگرهای نوشتاری
co-located	هم مکان
smooth	هموار

artificial intelligence

هوش مصنوعی

single-input, single-output (SISO)

یک ورودی-یک خروجی

unit

یکا (واحد کمیت فیزیکی)

orthonormal

یکامتعامد

isotropic

یکروند

## واژه‌نامه انگلیسی - فارسی

accuracy	دقت
active force control	کنترل نیروی فعال
active positioning device	وسیله تثبیت موقعیت فعال
actuation scheme	روش کاراندازی حرکتی
actuator	کارانداز
actuator space	فضای کاراندازی
actuator torque	گشتاور کارانداز
actuator vector	بردار کارانداز
adaptive control	کنترل تطبیقی
AL	زبان برنامه‌ریزی AL
algebraic solution	راه‌حل جبری
aliased signal	سیگنال دارای خطا
analytic representation	نمایش تحلیلی
angle set convention	قرارداد تعیین زاویه
angular acceleration	شتاب زاویه‌ای
angular velocity matrix	ماتریس سرعت زاویه‌ای
angular velocity vector	بردار سرعت زاویه‌ای
anthropomorphic manipulator	بازوی مکانیکی ماهر شبه انسان
antialiasing	جلوگیری از ایجاد خطا
argument	شناسه
armature	آرمیچر
arm signatures style	شیوه نشان بازو
array	آرایه
articulated manipulator	بازوی مکانیکی ماهر بندبند
artificial constraint	قید مصنوعی
artificial intelligence	هوش مصنوعی
assembly strategy	استراتژی مونتاژ
asymptotic stability	پایداری مجانبی

automated assembly	مونتاژ اتوماتیک
automatic coercion	تبدیل اتوماتیک نوعهای یکسان
automatic collision detection	آشکارسازی اتوماتیک برخورد
automatic robot placement	تعیین جای روبات به‌طور اتوماتیک
autonomous	خود مختار
back emf constant	ثابت نیروی ضد محرکه
back face elimination	خذف خطوط نامرئی
background mode	مود زمینه
backlash	لقی (پس‌زنی چرخدنده)
ball and socket	مفصل کروی
ballbearing screw	پیچ بلبرینگ
band width	پهنای باند
base frame	چهارچوب پایه
bevel gear	چرخدنده مخروطی
bounded	کراندار
bounded-input, bounded-output	ورودی کراندار-خروجی کراندار
bounding box	جعبه کراندار
brushless motor	موتور بدون جاروبک
CAD model	مدل CAD
Cartesian-based control	کنترل مبتنی بر مختصات دکارتی
Cartesian decoupling scheme	روش مستقل‌سازی دکارتی
Cartesian manipulator	بازوی مکانیکی ماهر دکارتی
Cartesian mass matrix	ماتریس جرم دکارتی
Cartesian motion	حرکت دکارتی
Cartesian space	فضای دکارتی
Cartesian straight line motion	حرکت راست‌خط دکارتی
Cartesian trajectory generation	تولید مسیر دکارتی
Cayley's formula for orthonormal matrices	فرمول کیلی برای ماتریسهای متعامد
center of mass	مرکز جرم
centrifugal force	نیروی گریز از مرکز
chain rule	قاعده زنجیری
characteristic equation	معادله مشخصه
character string	متغیر الفبایی (حرفی)

circuit board	تخته مدار
clearance	لَقی (در انطباقات)
closed form solvable	قابل حل به طریق بسته
closed loop	مدار بسته
closed loop stiffness	سختی مدار بسته
closed loop system	سیستم مدار بسته
collision-free path	مسیر عاری از برخورد
collision-free path planning	طرح‌ریزی مسیرهای عاری از برخورد
co-located	هم‌مکان
compensation	جبران
complex roots	ریشه‌های مختلط
component	مؤلفه
computed points	نقاط محاسبه شده
computed torque method	روش گشتاور محاسبه شده
computer-aided design (CAD)	طراحی به کمک کامپیوتر
computer-aided manufacturing (CAM)	تولید به کمک کامپیوتر
computer vision	بینایی کامپیوتری
configuration	پیکربندی
configuration space	فضای پیکربندی
configuration space equation	معادله فضای پیکربندی
constraint frame	چارچوب قید
constraint surface	سطح قید
context sensitivity	حساسیت در متن برنامه
continuous	پیوسته
control algorithm	الگوریتم کنترل
control gain	بهره کنترلی
control law	قانون کنترل
control law partitioning	تقسیم قانون کنترل
control system	سیستم کنترل
conveyor	نقاله
conveyor belt	تسمه نقاله
coordinated motion	حرکت هماهنگ شده
Coriolis force	نیروی کوریولیس
correlation time	زمان همبستگی
Coulomb friction	اصطکاک خشک

crank	لنگ
critical damping	میرایی بحرانی
cross helical gear	چرخ‌دنده مارپیچ
cubic polynomial	چندجمله‌ای درجه سوم
cubic spline trajectory	مسیر درجه سوم
current amplifier	آمپلی فایر جریان
cycle time	چرخه زمانی
cylindrical manipulator	بازوی مکانیکی ماهر استوانه‌ای
damped natural frequency	بسامد طبیعی میرا
damper	میراگر
damping ratio	نسبت میرایی
data types	نوع‌های داده‌ای
debugger	غلط‌گیر
deburring	پلیسه‌گیری
decouple	مستقل کردن
decoupled	غیروابسته
deflection	خمیدگی
degree of freedom	درجه آزادی
delay	تاخیر
Denavit-Hartenberg notation	نمادگذاری دناویت-هارتنبِرج
description	توصیف
dextrous workspace	فضای کاری ماهر
diagonal	قطری
digital computer	کامپیوتر رقمی (دیجیتال)
digital control	کنترل رقمی (دیجیتال)
direct current torque motor	موتور گشتاوری جریان مستقیم
direct drive	رانش مستقیم
direct kinematics	سینماتیک مستقیم
direction cosines	کسینوسهای هادی
direct time servo	سیستم سرو با زمان ناپیوسته
discrete time control	کنترل زمانی ناپیوسته
discrete time simulation	سیستم شبیه‌سازی با گسستگی زمانی
disturbance rejection	دفع اغتشاش
dominant pole	قطب غالب

dual superscript	زبرنویس دوگان
dynamically simple	ساده از نظر دینامیکی
dynamics	دینامیک
dynamic simulation	شبیه‌سازی دینامیکی
eccentricity	انحراف از مرکز
eccentricity	انحراف از مرکز
“edit, compile, run” cycle	چرخه «ویرایش برنامه، کمپایل برنامه، اجرای برنامه»
effective damping	میرایی مؤثر
effective force feedback gain	بهره مؤثر پسخوراند نیرو
effective inertia	لختی مؤثر
effective stiffness	سختی مؤثر
efficiency	بازده
eigenvalue	مقدار ویژه
eigenvector	بردار ویژه
elbow manipulator	بازوی مکانیکی ماهرزانویی
end effector	مجری نهایی
end of arm tooling	ابزار انتهای بازو
equivalent angle-axis	محور و زاویه معادل
error checking	خطاگیری
error-driven control law	قانون کنترل با رانش خطا
error-driven servo	سیستم سرو با رانش خطا
error propagation analysis	تحلیل اشاعه خطا
error recovery	بازیابی خطا
error space	فضای خطا
Euler angles	زوایای اویلر
Euler’s equation	معادله اویلر
Euler’s formula	رابطه اویلر
Euler’s parameters	پارامترهای اویلر
Euler’s theorem on rotation	قضیه اویلر در دوران
event monitoring	نظارت بر رویدادها
explicit programming language	زبان برنامه‌ریزی صریح
extreme	فرین، (حدی)
facet	سطح کوچک

faceted representation	نمایش به‌وسیلهٔ سطوح کوچک
face width	پهنای رویهٔ چرخنده
feature point	نقطهٔ مشخصه
feedback	پسخوراند (فیدبک)
feedforward control	کنترل پیشرو
finite element method	روش اجزاء محدود
fixed automation	اتوماسیون ثابت
fixed link parameters	پارامترهای ثابت رابط
fixed point	نقطهٔ ثابت
fixture	بست
flag	پرچم (متغیر در برنامهٔ کامپیوتری)
floating point	نقطهٔ شناور
force constraint	قید نیرویی
force control	کنترل نیرو
force control law	قانون کنترل نیرویی
force-controlling servo	سروی کنترل نیرو
force-moment transformation	تبدیل کلی نیرو-گشتاور
force monitor	کنترل‌کنندهٔ نیرو
force sensing	حس نیرو
force-sensing fingers	انگشتان حس‌کنندهٔ نیرو
forward kinematics	سینماتیک مستقیم
frame	چهارچوب
free vector	بردار آزاد
frequency	بسامد
full rank	رتبهٔ کامل
gain	بهره (ضریب تقویت)
gantry robot	روبات قاب جرثقیل
gear ratio	نسبت چرخنده
generalized coordinates	مختصات تعمیم‌یافته
generalized energy function	تابع انرژی تعمیم‌یافته
generalized surface	سطح تعمیم‌داده‌شده
geometric solution	راه‌حل هندسی
geometric types	نوعهای هندسی
goal frame	چهارچوب هدف



Goraud shading	سایه‌زنی پیوسته
graphic window	پنجره گرافیک
gravitational constant	ثابت گرانی
gravity model	مدل گرانی
gravity vector	بردار گرانی
gripper	گیره
Grubler's formula	فرمول گروبلر
guarded move	حرکت محتاطانه
hard automation	اتوماسیون انعطاف‌ناپذیر
heuristic method	روش خودآموز
hidden line elimination	حذف خطوط پنهان
high-level operations	عملیات سطح بالا
homogeneous transform	تبدیل همگن
host platform	سکوی میزبان
hybrid	ترکیبی
hybrid control	کنترل ترکیبی
hybrid position-force control	کنترل ترکیبی مکان-نیرو
hybrid position-force controller	کنترل‌کننده ترکیبی مکان-نیرو
hydraulic cylinder	سیلندر هیدرولیکی
hysteresis	پسماند
identity matrix	ماتریس همانی
independent joint control	کنترل مفصل مستقل
industrial robot	روبات صنعتی
inertia ellipsoid	بیضیوار لختی
inertia pendulum	آونگ لختی
inertia tensor	تانسور لختی
initial conditions	شرایط اولیه
inspection	جستجو
instantaneous axis of rotation	محور آنی دوران
interactive language	زبان برهم‌کنشی
integration	تجمع
interface	فصل مشترک (وسیله ارتباط)
interpolation	درونیابی

interval	بازه
intuition	رهیافت شهودی
intuitive scheme of Cartesian control	روش کنترل دکارتی شهودی
inverse	وارون
inverse Jacobian	ژاکوبی وارون
inverse Jacobian controller	کنترل‌کننده ژاکوبی وارون
inverse kinematics	سینماتیک وارون
inverse model	مدل وارون
inverted pendulum	آونگ وارون
inward computation	محاسبه ساده درونی
invertible	وارون‌پذیر
isotropic	یکروند
iterative Newton-Euler dynamic formulation	محاسبات دینامیکی تکراری نیوتن-اولر
iterative relations	روابط تکراری
Jacobian	ژاکوبی
joint	مفصل
joint actuator	کارانداز مفصل
joint actuator force	نیروی کارانداز مفصلی
joint angle	زاویه مفصلی
joint axes	محورهای مفصلی
joint-based control	کنترل مبتنی بر مفصل
jointed manipulator	بازوی مکانیکی ماهر مفصلی
joint offset	انحراف مفصلی
joint position sensor	حساسه مکانی مستقر در مفصلها
joint space	فضای مفصلی
joint space scheme	روش فضای مفصلی
joint torque	گشتاور مفصلی
joint variable	متغیر مفصلی
joint vector	بردار مفصل
keyboard	صفحه کلید
keyword	لغت کلیدی
kinematically simple	ساده از نظر سینماتیکی

kinematic emulation	تقلید سینماتیکی
kinematics	سینماتیک
label	برچسب
Lagrangian	لاگرانژین
Lagrangian dynamic formulation	فرمولبندی دینامیکی لاگرانژ
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
leading subscript	پیش‌زیرنویس
leading superscript	پیش‌زیرنویس
lead screw	پیچ هدایت (جلوبر)
length sum	مجموع طولی
lens	عدسی
light beam interrupt sensor	حساسه نوری قطع‌کننده
light pen	قلم نوری
L'Hopital's rule	قاعده هوییتال
limit stops	موانع محدودکننده حرکت
limit switch	کلید محدودکننده
linear	خطی
linear actuator force	نیروی کارانداز خطی
linear control	کنترل خطی
linear control method	روش کنترل خطی
linearizing and decoupling control	کنترل خطی و مستقل‌کننده
linearizing control	کنترل خطی‌کننده
line of action	خط اثر
line vector	بردار خطی
link	رابط
link length	طول رابط
link offset	انحراف رابط
link twist	زاویه پیچش رابط
load capacity	ظرفیت حمل بار
local linearization	خطی‌سازی موضعی
local link frame	چهارچوب رابط محلی
locomotion	انتقال و حرکت (رشته فرعی روباتیک)
logic testing and branching	آزمون و انشعاب منطقی
lower pair	اتصال لغزشی

low pass filter	فیلتر پایین‌گذران
lumped model	مدل متمرکز
Lyapunov's method	روش لیاپونوف
Lyapunov's second (direct) method	روش دوم (مستقیم) لیاپونوف
Lyapunov's stability analysis	تحلیل پایداری لیاپونوف
maniputability measure	معیار مهارت
mapping	نگاشت
mass distribution	توزیع جرم
mass matrix	ماتریس جرم
mass moment of inertia	لنگر لختی جرم
mass product of inertia	حاصل ضرب لختی جرم
mechanical advantage	مزیت مکانیکی
mechanical impedance	امیدانس مکانیکی
mechanical manipulator	بازوی مکانیکی ماهر
memory bit	بیت حافظه
memory location	خانه حافظه
menu	منو
micromanipulator	ریز روبات
microprocessor	ریزپردازنده
model-based	وابسته به مدل
model-based portion	قسمت وابسته به مدل
modulus of elasticity	مدول کشسانی
motor armature inductance	اندوکتانس آرمیچر موتور
motor torque constant	ثابت گشتاور موتور
mouse	موش (ماوس)
moving linearization	خطی‌سازی متحرک
multi-input, multi-output (MIMO)	چند ورودی-چند خروجی
multi-input, multi-output control system	سیستم کنترل چند ورودی-چند خروجی
multiply time	زمان ضرب
multiprocessing language	زبان چند فرایندی
multiprocess simulation	شبیه‌سازی چند فرایندی
Newton's equation	معادله نیوتن
noise	نویز

nominal function	تابع اسمی
nonautonomous	غیرخود مختار
noncausal filter	فیلتر غیرسببی
nonlinear control	کنترل غیرخطی
nonproper	ناسره
nonsingular	ناتکین
notation	نمادگذاری
null model	مدل صفر
numerical control (NC)	کنترل عددی
numerical differentiation	مشتگیری عددی
numerical integration	انتگرالگیری عددی
numerical solution	روش حل عددی
off-line	خارج خط
off-line programming	برنامه‌ریزی خارج خط
off-line simulation	شبیه‌سازی خارج خط
offset	انحراف
on-line mode	مود روی خط
open kinematic chain	زنجیر سینماتیکی باز
open loop	مدار باز
operating point	نقطه عمل
operational space	فضای عملیاتی
operator	عملگر
orientation	جهتگیری
orienting structure	سازه تعیین جهتگیری
orthonormal	یکامتعامد
orthonormal columns	ستونهای یکامتعامد
outward computation	محاسبه ساده بیرونی
outward iterations	محاسبات تکراری بیرونی
overdamped	فوق میرایی
overhead gantry	جرثقیل دروازه‌ای سقفی
overload protection	عضو حافظ در مقابل بار بیش از حد
pallet	سکوی حمل
parabolic blend	مسیر سهموی

parallel axis theorem	قضیه محاورهای موازی
parallelism in programming	موازات در برنامه‌ریزی
parametric equation	معادله نمادین
partially constrained	مقید شده جزئی
passive compliance	انعطاف‌پذیری غیرفعال
path	مسیر
path control scheme	روش کنترل مسیر
path generator	مولد مسیر
path planner	طرح‌ریز مسیر
path-planning emulation	تقلید طرح‌ریزی مسیر
path points	نقاط مسیر
path update rate	آهنگ روزآمد کردن مسیر
perfect model	مدل کامل
performance	عملکرد
PID control law	قانون کنترل PID
pixel	دانه تصویر
playback	تکرار حرکت
pneumatic cylinder	سیلندر بادی (نیوماتیکی)
pole	قطب
polymorphic	پلی مرفیک
position	مکان
position constraint	قید مکانی
position control	کنترل مکان
position control law	قانون کنترل مکان
position control system	سیستم کنترل مکان
positioning structure	سازه تعیین مکان
position sensing	حس مکان
position vector	بردار مکان
positive definite	معین مثبت
post processor	پس‌پردازنده
potentiometer	پتانسیومتر
premultiply	پیش ضرب
premutation	جایگشت
principal axes	محاورهای اصلی
principal moment of inertia	لنگر لختی اصلی

principle of virtual work	اصل کار مجازی
prismatic joint	مفصل لغزشی (کشویی)
programming environment	محیط برنامه‌ریزی
proper orthonormal matrix	ماتریس یکامتعامد سره
proprioceptive sensor	حساسه داخلی
pseudo via points	نقاط بینابینی مجازی
quadrature form	صورت درجه دوم
quasi-static	شبه‌استاتیکی
random disturbance	اغتشاش تصادفی
reachable workspace	فضای کاری دسترسی‌پذیر
real and equal roots	ریشه‌های حقیقی و مساوی
real and unequal roots	ریشه‌های حقیقی و نامساوی
recursive Newton-Euler equation	معادله بازگشتی نیوتن-اولبر
reduction system	سیستم کاهش سرعت
redundant	زاید
redundant and closed chain structure	سازه زنجیری زاید
redundant manipulator	بازوی مکانیکی ماهر زاید
redundant plane manipulator	بازوی مکانیکی صفحه‌ای با مفصلهای زاید
regulation	تنظیم (رگولاسیون)
remote center compliance	انعطاف‌پذیری مرکزی از راه دور
repeatability	تکرارپذیری
repeated roots	ریشه‌های تکراری
resolver	برطرف‌کننده
resonance	تشدید
revolute joint	مفصل لولایی (چرخشی)
rigid workspace	فضای کاری صلب
robot library	کتابخانه روبات
robot programming language	زبان برنامه‌ریزی روبات
robust controller	کنترل‌کننده غیرظریف
Rodrique's formula	فرمول رودریکز
roller chain	زنجیر غلتکی
roll, pitch, yaw	زوایای رول، پیچ، یاو
rotational speed	سرعت دورانی

rotation matrix	ماتریس دوران
rotor	روتور
run time	فرمال اجرا (در برنامه کامپیوتری)
sample rate	آهنگ نمونه برداری
scaling	مقیاس‌گذاری
SCARA manipulator	بازوی مکانیکی ماهر اسکارا
second-order linear system	سیستم خطی درجه دوم
self-collision	برخورد با خود
semiconductor	نیم‌رسانا
semidefinite	نیمه‌معین
sensor	حساسه
sensor frame	چهارچوب حساسه
sequencer	مرتب‌کننده اطلاعاتی
serial kinematic linkages	رابط‌های سیماتیکی سری
servo-controlled mechanism	مکانیزم خودفرمان (سرو کنترل)
servo error	خطای سرو
servo portion	قسمت سرو
servo rate	آهنگ سرو
servo valve	شیر سرو
set-point	نقطه تنظیم
shaded graphics	گرافیک سایه‌زده شده
shaded surface display	نمایش سطح سایه‌زده شده
shear modulus of elasticity	مدل کشسانی برشی
SIL	زبان برنامه‌ریزی SIL
similarity transform	تبدیل تشابهی
simulation	شیه‌سازی
single-input, single-output (SISO)	یک ورودی- یک خروجی
singular	تکین
singular direction	جهت تکین
Singularities	نقاط تکین
singular state	حالت تکین
skew-symmetric	پادمتقارن
skew-symmetric matrix	ماتریس پادمتقارن
smooth	هموار



smooth function	تابع هموار
specialized manipulation language	زبان تخصصی روبات
spline	اسپلاین
spot welding	جوشکاری نقطه‌ای
spur gear	چرخ‌دنده ساده
stable	پایدار
state	حالت
state vector	بردار حالت
station frame	چهارچوب ایستگاه
stator	استاتور
steady	پایا
steady-state analysis	تحلیل حالت پایا
steady-state error	خطای حالت پایا
stepper motor	موتور پله‌ای
Stewart's mechanism	مکانیزم استوارت
stiffness	سختی
strain gauge	کرنش‌سنج
structural length index	شاخص طولی سازه‌ای
structural resonance	تشدید سازه‌ای
structure	سازه
subspace	زیرفضا
subtask	کار فرعی
surface	سطح
synthesis	ترکیب
tachometer	دورسنج
task frame	چهارچوب میز کار
task-level programming language (TLP)	زبان برنامه‌ریزی عملیاتی
task-oriented space	فضای نشانگر وظایف
taught point	نقطه آموزش داده شده
teach pendant	جعبه آموزش
text editors	ویرایشگرهای نوشتاری
3-D modeling	مدلسازی سه‌بعدی
three roll wrist	مچ سه‌گردون
through point	نقطه گذر

time-invariant	نامتغیر با زمان
time-optimal path	مسیر بهینه زمانی
tool frame	چهارچوب ابزار
torque ripple	پرش گشتاور
torsional stiffness	سختی پیچشی
tracking reference input	ردیابی ورودی مرجع
trailing subscript	پس‌زیرنویس
trailing superscript	پس‌زیرنویس
trajectory	مسیر (مسیر مکانی-زمانی)
trajectory conversion	تبدیل مسیر
trajectory-following	تعقیب مسیر
trajectory generation	تولید مسیر
transcendental function	تابع غیرجبری (متعالی)
transducer	تراگردان (مبدل)
transform	تبدیل
transformation	تبدیل کلی
transform equation	معادله تبدیل
transmission system	سیستم انتقال قدرت
transpose	ترانهاد
transpose Jacobian controller	کنترل‌کننده ژاکوبی ترانهاد
trial and error	آزمون و خطا
tridiagonal matrix	ماتریس سه قطری
trivial	بدیهی
undefined equation	معادله تعریف نشده
underdamped state	زیرمیرایی
unit	یکا (واحد کمیت فیزیکی)
unit quaternion	چهارگان یکه
unity matrix	ماتریس یکه
universe coordinate system	دستگاه مختصات عام (مرجع)
universal device	دستگاه همه‌کاره
universal (world) frame	چهارچوب مرجع عام
unmodeled resonance	تشدید مدل نشده
unstable	ناپایدار
update	روزآمد

up-down counter	شمارنده صعودی-نزولی
vane actuator	کارانداز پره‌ای
velocity transformation	تبدیل کلی سرعت
via points	نقاط بینابینی
virtual work	کار مجازی
viscous friction	اصطکاک ویسکوز
vision sensor	حساسه بینایی
vision system	سیستم بینایی
voltage divider	تقسیم‌کننده ولتاژ
well-conditioned	مناسب
wireframe model	مدل شبکه‌ای
workcell	سلول کاری
workcell calibration	کالیبراسیون سلول کاری
work envelope	پوش کاری
workspace	فضای کاری
workspace bounding singularities	حالت‌های تکین در مرز فضای کاری
workspace interior singularities	حالت‌های تکین در داخل فضای کاری
workstation	ایستگاه کاری
work volume	حجم کاری
world interface	فصل مشترک جهانی
world model	مدل جهانی
world modeling	مدلسازی جهانی
worm gear	چرخ‌دنده حلزونی
wrist	مچ
wrist partitioned	جداکننده مچ
wrist sensor	حساسه مچی
X-Y-Z fixed angles	زوایای ثابت X-Y-Z
z-buffer	حافظه z
Z-Y-X Euler angles	زوایای اوایلر Z-Y-X
Z-Y-Z Euler angles	زوایای اوایلر Z-Y-Z



## فهرست راهنما

آرمیچر ۳۵۴	بازوی مکانیکی ماهر ۳
آشکارسازی اتوماتیک برخورد ۴۶۴	-استوانه‌ای ۳۰۰
آمیولی‌فایر جریان ۳۵۵	-اسکارا ۲۹۹
آموزش از طریق نمایش ۴۳۴	-بندبند ۲۹۹
آهنگ روزآمد کردن مسیر ۲۵۵	-دگارتی ۲۹۸
آهنگ سرو ۳۵۳	-زانویی ۲۹۹
آهنگ نمونه‌برداری ۳۷۷	-شبه انسان ۲۹۹
	-مفصلی ۲۹۹
ایزار انتهای بازو ۲۹۳	بردار
اتصال لغزشی (کشویی) ۷۸	-آزاد ۶۳
اتوماسیون ثابت ۱۳،۳	-خطی ۶۳
اسپلین ۱۱	-سرعت خطی ۶۳
استاتور ۳۵۴	-سرعت زاویه‌ای ۱۷۹، ۱۷۲
استراتژی مونتاژ ۴۰۹	-کارانداز ۹۵
اصطکاک خشک ۳۷۲، ۲۳۹	-مفصل ۹۵
اصطکاک ویسکوز ۲۳۹	-مکان ۲۲
الگوریتم کنترل ۱۲	برطرف‌کننده‌ها ۳۲۱
امپدانس مکانیکی ۴۲۳	برنامه‌ریزی
انتگرالگیری عددی ۲۴۰	-پایین به بالا ۴۵۲
انگشتان حس‌کننده نیرو ۳۲۲	-خارج خط ۴۵۹
انحراف رابط ۸۱	-موازی ۴۶۶
انحراف مفصلی ۶	بسامد طبیعی ۳۴۰
انعطاف‌پذیری غیرفعال ۴۲۴	-میراشده ۳۴۱
اهرم‌بندیه‌ای سینماتیکی زنجیری باز (سری)	بهره‌های کنترلی ۳۴۶
۲۹۷، ۶	بیضیوار لختی ۳۰۷

## بینایی کامپیوتری ۴۶۰

## -دکارتی ۱۱

- یاد متقارن ۱۷۷  
 پارامترهای اولیه ۶۰  
 پارامترهای رابط ۸۲  
 پایداری ۳۳۵  
 پتانسیومترها ۳۲۱  
 پرش گشتاور ۳۵۵  
 پسخوراند ۳۳۴  
 پسماند ۳۲۳  
 پلی مرفیک ۴۷۴  
 پوش کاری ۲۹۶  
 پیچهای بلبرینگ ۳۱۳  
 پیچهای هدایت (جلوبر) ۳۱۳  
 تانسور لختی ۲۱۲  
 تبدیل  
 اتوماتیک نوعهای یکسان ۴۷۴  
 -تشابهی ۷۰  
 -کلی سرعت ۲۰۰  
 -کلی نیرو-گشتاور ۲۰۰  
 -لاپلاس ۳۳۷  
 -مسیر ۳۹۱  
 -همگن ۳۳  
 تحلیل پایداری لیاپونوف ۳۸۶  
 تحلیل حالت پایا ۳۵۱  
 تشدید ۳۵۸، ۳۵۳، ۳۱۴  
 -سازه‌ای ۳۵۸، ۳۵۳، ۳۱۴  
 -های مدل‌سازی نشده ۳۵۸  
 تعقیب مسیر ۳۴۶  
 تقسیم قانون کنترل ۳۴۷  
 تکرارپذیری ۱۵۸  
 تنظیم ۳۴۶  
 تولید به کمک کامپیوتر (CAM) ۱  
 تولید مسیر ۹
- ثابت گشتاور موتور ۳۵۴  
 ثابت نیروی ضد محرکه ۳۵۴  
 جداکننده مج ۲۹۷  
 جعبه آموزش ۴۳۴، ۳۶۳  
 جعبه‌های کراندار ۴۶۹  
 جلوگیری از ایجاد خطا ۳۵۳  
 جهتگیری ۲۳  
 چرخنده‌ها ۳۱۲  
 -ی حلزونی ۳۱۲  
 -ی ساده ۳۱۲  
 -ی مارپیچ ۳۱۲  
 -ی مخروطی ۳۱۲  
 چرخه زمانی ۲۹۷  
 چند ورودی و چند خروجی (MIMO)  
 ۳۳۶  
 چهارچوب ۴۰، ۲۵، ۵  
 -بازار ۱۱۱، ۶  
 -ایستگاه ۱۱۰  
 -پایه ۱۵۶، ۱۱۰، ۶  
 -قید ۴۰۷  
 -مج دست ۱۱۱  
 -هدف ۱۱۱  
 چهارگان یک ۶۱  
 حاصلضربهای لختی جرم ۲۱۳  
 حافظ در برابر بار بیش از حد ۳۲۳  
 حافظه Z ۴۶۹  
 حالت‌های تکی ۱۹۱  
 -در داخل فضای کاری ۱۹۲  
 -در مرز فضای کاری ۱۹۱  
 -مکانیزم ۱۹۱

روش

- حجم کاری ۲۹۶  
حذف خطوط پنهان ۴۶۹  
حذف خطوط نامرئی ۴۶۹  
حرکت دکارتی ۲۷۵  
حرکت راست-خط دکارتی ۲۷۵  
حرکت محتاطانه ۴۲۶  
حسابه‌ها ۱۲، ۳۲۱، ۳۲۲  
-ی داخلی (عمقی) ۲۹۳  
-ی مچی ۳۲۲  
حس نیرو ۴۲۶
- خط اثر ۶۳  
خطای حالت پایا ۳۵۲  
خطای سرو ۳۳۵  
خطی‌سازی موضعی ۳۷۰  
خطی‌کننده ۳۷۰  
خطی و مستقل‌کننده ۳۷۵  
خمش ۳۲۳  
خودمختار ۳۸۷
- داخلی (عمقی) ۲۹۳  
درجات آزادی ۶  
دستگاه مختصات عام ۲۱  
دفع اغتشاش ۳۵۳، ۳۵۰  
دقت ۱۵۸  
دورسنجها ۳۲۱  
دینامیک ۲۰۹، ۹
- رابطها ۷۷، ۶  
رابطه اوایلر ۳۴۰  
رانس مستقیم ۳۵۷، ۳۱۱  
ردیابی ورودیهای مرجع ۳۵۳  
روبات صنعتی ۱  
روانتهای قاب جرتیل ۲۹۸  
روتور ۳۵۴
- دوم (مستقیم) لیاپونوف ۳۸۶  
-گشتاور محاسبه شده ۳۶۹  
-لیاپونوف ۳۶۹  
-های اجزای محدود ۳۱۹  
-های جبری ۱۳۱  
-های حل بسته ۱۳۱  
-های حل عددی ۱۳۱  
-های کنترل خطی ۳۳۳  
-های هندسی ۱۳۱  
ریزروبات ۳۰۸  
ریشه‌ها
- ی تکراری ۳۴۲  
-ی حقیقی و مساوی ۳۳۸  
-ی حقیقی و نامساوی ۳۳۷  
-ی مختلط ۳۳۸
- زاویه پیچش رابط ۷۹  
زاویه مفصلی ۸۱  
زاید ۲۹۴  
زبان برنامه‌ریزی  
AL- ۲۸۳  
-روبات ۱۳، ۲۸۳، ۴۳۴  
SIL- ۴۷۳  
زبانها
- ی برنامه‌ریزی عملیاتی ۴۳۶، ۴۶۱  
-ی برهم‌کنشی ۴۶۲  
-ی تخصصی روبات ۴۳۴  
زمان اجرای برنامه کامپیوتری ۲۸۱  
زنجر سینماتیکی باز ۶، ۲۹۷  
زوایای اوایلر ۵۲  
Z-Y-X- ۵۲  
Z-Y-Z- ۵۴  
X-Y-Z- ثابت ۴۹  
-رول، پیچ، یو ۵۰

- ۳۴۶ ضریب سختی مدار بسته
- طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) ۱
- طول رابط ۷۹
- ظرفیت حمل بار ۲۹۶
- عملگر تبدیل کلی سرعت ۲۰۰
- غیر خود مختار ۳۸۷
- فرمولبندی دینامیکی لاگرانژ ۲۳۰
- فرمول رودریکز ۴۸۸، ۷۱
- فرمول کیلی برای ماتریسهای یکا متعامد ۴۷
- فرمول گروبلر ۳۱۰
- فصل مشترک استفاده کننده ۴۶۲
- فضا
- ی-خطا ۳۵۰
- ی-دکارتی ۹۵، ۶
- ی-صفر ۱۹۹
- ی-عملیاتی ۹۵
- ی-کاراندازی ۹۵
- ی-کاری ۲۹۶، ۱۲۶، ۷
- ی-دسترس پذیری ۱۲۶
- ی-ماهر ۱۲۶
- ی-مفصلی ۲۳۵، ۹۵، ۶
- ی-نشانگر وظایف ۹۵
- فوق میرایی ۳۳۷
- فیلتر پایین گذران ۳۵۵
- قابل حل ۱۳۱
- به طریق بسته ۱۴۲
- قاعده هوپیتال ۳۴۳
- قانون کنترل ۳۴۵
- PID - ۳۵۳
- مکان ۳۴۵، ۱۳
- مفصلی ۸۱، ۶
- زیرفضا ۱۳۲، ۱۲۷
- زیرمیرایی ۳۳۸
- ژاکوبی ۱۸۸، ۱۶۹، ۷
- ساده از لحاظ دینامیکی ۲۴۲
- ساده از لحاظ سینماتیکی ۲۴۲
- سازه بسته ۳۰۸
- سازه تعیین جهتگیری ۲۹۷
- سازه تعیین مکان ۲۹۷
- سایه زده شده ۴۶۹
- سایه زنی پیوسته ۴۶۹
- سختی مدار بسته ۳۴۶
- سطح تعمیم داده شده ۴۰۷
- سطوح کوچک ۴۶۸
- سلول کاری ۴۳۳
- سیستم
- انتقال قدرت ۳۱۱
- برنامه ریزی خارج خط ۴۵۹، ۱۵
- کاهش سرعت ۳۱۱
- کنترل ۳۳۴
- کنترل مکان ۳۳۴، ۱۲
- مدار بسته ۳۳۵
- سیلندره های بادی (نیوماتیکی) ۳۱۹
- سیلندره های هیدرولیکی ۳۱۹
- سینماتیک ۷۷، ۵
- مستقیم ۱۲۵، ۷۷، ۶
- وارون ۱۲۵، ۶
- شاخص طولی سازه ای ۳۰۵
- شیبه سازی ۴۵۹، ۹
- شرایط اولیه ۳۳۷
- شکل بسته ۲۲۳
- صورت درجه دوم ۲۳۱



- ۴۰۵،۱۳ -نیرو  
کنترل‌کننده
- ۴۱۴،۴۰۵ - ترکیبی مکان و نیرو  
- ژاکوبی ترانهاده ۳۹۳  
- ژاکوبی وارون ۳۹۳  
- غیر ظریف ۳۷۹
- ۴۶۹ گرافیک سایه‌زده شده  
گشتاورهای مفصلی ۹
- ۲۳۲ لاگرانژین  
لختی مؤثر ۳۵۷  
لقی (پس‌زنی چرخنده‌ها) ۳۱۲  
لنگرهای اصلی ۲۱۴  
لنگرهای لختی جرم ۲۱۳
- ماتریس  
-جرم ۲۲۸  
-دکارتی ۲۳۵  
-دوران ۲۴  
-ژاکوبی ۱۸۸،۱۶۹،۷  
-های یک‌امتداد سره ۴۶  
متصل‌سازی ۴۳۹، ۴۷۰  
متغیر مفصلی ۸۲  
مجری نهایی ۲۹۳، ۶  
مجموع طولی ۳۰۵  
مج ۲۹۷  
- سه گردون ۳۰۲  
محور آنی دوران ۱۸۰  
محور-زاویه ۲۷۶، ۵۵  
محور و زاویه معادل ۲۷۶، ۵۵  
محورهای اصلی ۲۱۴  
مدل  
-جهانی ۴۶۰  
-متمرکز ۳۶۰  
-های شبکه‌ای ۴۶۸
- ۴۱۴،۱۳ -نیرو  
قراردادهای مجموعه زوایا ۴۸۹، ۱۸۱، ۵۵  
قسمت سر ۳۴۷  
قسمت وابسته به مدل ۳۴۷  
قضیه اولی دربارۀ دوران ۵۶  
قضیه محورهاى موازی ۲۱۵  
قطب غالب ۳۳۹  
قطبها ۳۳۷  
قلم نوری ۴۶۳  
قیدهای طبیعی ۴۰۷  
قیدهای مصنوعی ۴۰۸
- کاراندازهای پره‌ای ۳۱۹  
کالیبراسیون ۴۷۹، ۱۵۹  
-سلول کاری ۴۷۹، ۴۶۷  
کار مجازی ۱۹۷  
گذگذار نوری با گردش پله‌ای ۳۲۱  
کراندار ۳۵۱  
کرنش‌سنج ۳۲۱  
کسینوسهای هادی ۲۴  
کنترل
- ۳۷۸ -پیشرو  
-ترکیبی مکان و نیرو ۴۱۴، ۴۰۵، ۱۳  
- تعقیب مسیر ۳۴۶  
-خطی ۳۳۳  
-خطی‌کننده ۳۷۰  
-خطی و مستقل‌کننده ۳۷۵  
-رقمی (دیجیتال) ۳۵۳  
- زمانی ناپیوسته ۳۷۸، ۳۵۳  
-عددی ۳  
- غیرخطی ۳۶۹، ۱۳  
-مبتنی بر مختصات دکارتی ۳۹۰،  
۳۹۲  
-مبتنی بر مفصل ۳۹۱  
-مدار باز ۳۳۵  
- مفصل مستقل ۳۳۶

- های CAD ۴۶۷، ۴۶۳  
 مستقل کردن ۳۷۵  
 مسیر (مسیر مکانی-زمانی) ۲۵۵  
 مشتگیری عددی ۳۲۱  
 معادله  
 -تبدیل ۴۴  
 -فضای پیکربندی ۲۲۹  
 -فضای حالت ۲۲۸  
 -مشخصه ۳۳۷  
 معیار مهارت ۳۰۶  
 معین مثبت ۲۳۱  
 مفصلهای لولایی (دورانی) ۷۸، ۶  
 مفصلهای کشویی (لغزشی) ۷۸، ۶  
 مکانیزم استوارت ۳۰۹  
 موانع محدودکننده حرکت ۳۲۳  
 موتور  
 -های بدون جاروبک ۳۲۰  
 -های پله‌ای ۳۲۰  
 -های جریان متناوب ۳۲۰  
 موش (ماوس) ۴۶۳  
 مولد مسیر ۲۷۳  
 میرایی  
 -بحرانی ۳۳۸  
 -مؤثر ۳۵۷  
 ناپایدار ۳۳۵  
 نسبت چرخنده ۳۱۲  
 نسبت میرایی ۳۴۰  
 نظارت بر رویدادها ۴۴۲  
 نقاط بینایی ۲۵۷، ۹  
 نقاط تکیه ۷  
 نقاط محاسبه شده ۱۵۸  
 نقاط مسیر ۲۵۷  
 نقطه تعلیم داده شده ۱۵۸  
 نقطه تنظیم ۳۶۲  
 نقطه عمل ۳۷۰  
 نقطه گذر ۲۷۴  
 نقطه مج ۲۹۷  
 نگاشت ۲۸، ۲۷، ۷  
 نمادگذاری دناویت-هارتنبرگ ۸۳  
 نمایش  
 -به وسیله سطوح کوچک ۴۶۸  
 -تحلیلی ۴۶۸  
 -شبکه‌ای ۴۶۸  
 نوعهای هندسی ۴۳۹  
 نويز ۳۵۰  
 نیرو  
 -ی کوربولیس ۲۲۹  
 -ی گریز از مرکز ۲۲۹  
 وابسته به مدل ۳۴۷  
 ورودی کراندار-خروجی کراندار ۳۵۱  
 ورودیهای مرجع ۳۵۳  
 هم مکان ۳۲۱  
 یک ورودی و یک خروجی (SISO) ۳۳۶